פתרון הבחינה
במתמטיקה

קיץ תשע"ח, 2018, מועד ב, שאלון: 35582

מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

1. נתונה הפרבולה הקנונית $y^2 = 2px$. $p > 0$ הוא פרמטר.

הנקודות $A(x_1 , y_1)$ ו־ $B(x_2 , y_2)$ נמצאות על הפרבולה.

נתון: שיפוע הישר AB הוא $\frac{4}{3}$,

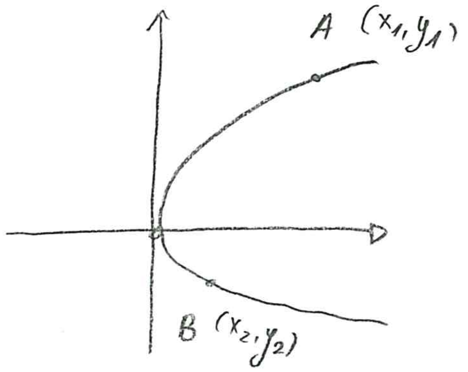
שיעור ה־ y של אמצע הקטע AB הוא 9 .

א. מצא את משוואת הפרבולה.

נתון: המשיקים לפרבולה דרך הנקודות A ו־ B מאונכים זה לזה.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו־ B (הנקודה A נמצאת ברביע הראשון).

ג. מצא עוד זוג נקודות על הפרבולה שהמשיקים דרכן לפרבולה מאונכים זה לזה.



1 א. שתי הנקודות מקיימות את משוואת הפרבולה ולכן:

$$y_1^2 = 2px_1 \rightarrow x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$$

$$y_2^2 = 2px_2 \rightarrow x_2 = \frac{y_2^2}{2p}$$

$$A\left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right) , B\left(\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right)$$

$$m_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{\frac{y_1^2}{2p} - \frac{y_2^2}{2p}} = \frac{4}{3}$$

עפ"י הנתון השיפוע של AB הוא $\frac{4}{3}$

$$I: \quad 3(y_1 - y_2) = 4\left(\frac{y_1^2 - y_2^2}{2p}\right)$$

$$II: \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = 9.$$

עפ"י הנתון ששיעור ה־y של אמצע הקטע הוא 9.

I: $3(y_1-y_2)=\frac{2(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{p}$

II: $y_1+y_2=18$

II→I: $3(y_1-y_2)=\frac{2(y_1-y_2)\cdot 18}{p}$

מכיוון שהשיפוע בין A ו B, אינו 0 $y_1 \neq y_2$ נוכל לחלק ב (y_1-y_2) את שני האגפים ונקבל:

$$3=\frac{36}{p}$$

$$p=12$$

משוואת הפרבולה היא: $\boxed{y^2=24x}$

ב. ממשוואת משיק לפרבולה בנק' שעליה $m=\frac{p}{y_0}$

שיפוע המשיק בנק' A: $\frac{12}{y_1}$

שיפוע המשיק בנק' B: $\frac{12}{y_2}$

עפ"י הנתון שהישרים מאונכים

III $\frac{12}{y_1}\cdot\frac{12}{y_2}=-1$

$$\frac{144}{y_1y_2}=-1 \rightarrow 144=-y_1y_2$$

II→III: $144=-y_1(18-y_1)$

$$144 = -18y_1 + y_1^2$$

פתרונות המשוואה:

$$y_1 = 24$$
$$y_1 = -6$$

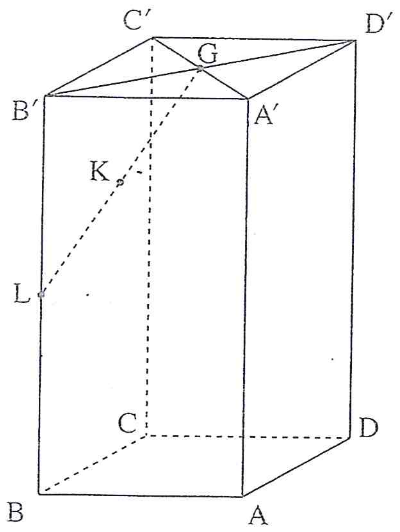
מכיוון ו A נמצאת ברביע הראשון עפ"י הצבה במשוואה II ובמשוואת הפרבולה נקבל: $\boxed{A(24,24)}$, $\boxed{B(1.5,-6)}$

ג. פרבולה קנונית היא סימטרית ביחס לציר ה-x, ומכיוון ששיפוע משיק לפרבולה בנק' שעליה הוא: $\frac{p}{y_0}$, אם נבחר את הנק' ששיעור ה-y שלהן הוא נגדי לתשובה שבסעיף ב' נקבל ששיפועי המשיקים בנק' אילו הם נגדיים לשיפועי המשיקים שבסעיף ב'. ולכן גם מכפלתם היא מינוס 1. ולכן ישרים אילו מאונכים, ומכאן שאפשר לבחור $y=-24$ ו $y=6$, ואחרי הצבה במשוואת הפרבולה נקבל $\boxed{(24,-24)}$, $\boxed{(1.5,6)}$

הערה:

כל זוג ערכי y שיקיים את המשוואה: $-y_1y_2=144$, יכול להיות פתרון.

למשל: $(6,12)$ ו $(-6,12)$



.2 בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ הנקודה L היא אמצע המקצוע BB',
והנקודה G היא מפגש האלכסונים של הפאה $A'B'C'D'$.
הנקודה K היא אמצע הקטע LG (ראה ציור).
נסמן: $\overrightarrow{AD}=\underline{u}$; $\overrightarrow{AB}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו־ $\underline{w}$ את $\overrightarrow{DK}$.

ב. הוכח שהנקודה K נמצאת על האלכסון DB',
ומצא את היחס $\frac{DK}{DB'}$.

ההמשך של הקטע AK חותך את המישור $BCC'B'$ בנקודה F.
נתון: $\overrightarrow{AF}=s\cdot\underline{u}+\underline{v}+t\cdot\underline{w}$.

ג. (1) מצא את s ואת t, והראה כי הנקודה F נמצאת
על המקצוע $B'C'$.
(2) מצא את היחס $\frac{B'F}{B'C'}$.

2 א.

$$\vec{DK} = \vec{DA} + \vec{AB} + \vec{BL} + \vec{LK}$$

$$\vec{DK} = -\underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} + \frac{1}{2}(\vec{LG})$$

$$\vec{DK} = -\underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\underline{w} + \frac{1}{2}(\underline{u}-\underline{v})\right)$$

$$\vec{DK} = -\underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} + \frac{1}{4}\underline{w} + \frac{1}{4}\underline{u} - \frac{1}{4}\underline{v}$$

$$\boxed{\vec{DK} = \frac{3}{4}\underline{w} + \frac{3}{4}\underline{v} - \frac{3}{4}\underline{u}}$$

ב.

$$\vec{DB'} = \underline{w} + \underline{v} - \underline{u}$$

$$\vec{DK} = \frac{3}{4}(\underline{w} + \underline{v} - \underline{u})$$

$$\vec{DK} = \frac{3}{4}\vec{DB'}$$

מכיוון ש $\vec{DK}$ הוא כפולה בסקלר של $\vec{DB'}$ הווקטורים תלויים לינארית
ומכיוון ששניהם יוצאים מנק' משותפת D הם על אותו הישר.

מכיוון והם על אותו ישר מתקיים: $\boxed{\frac{DK}{DB'}=\frac{3}{4}}$

גכוו נתון: $\vec{AF}=S\underline{u}+\underline{v}+t\underline{w}$

נביע את וקטור $\vec{AK}$.

$$\vec{AK}=\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}+\frac{1}{2}\vec{LG}$$

$$\vec{AK}=\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\underline{w}+\frac{1}{2}(\underline{u}-\underline{v})\right)$$

$$\vec{AK}=\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}+\frac{1}{4}\underline{w}+\frac{1}{4}\underline{u}-\frac{1}{4}\underline{v}$$

$$\vec{AK}=\frac{1}{4}\underline{u}+\frac{3}{4}\underline{v}+\frac{3}{4}\underline{w}$$

עפ"י הנתון שהמשך הקטע AK חותך את המישור $BCC'B'$ בנקודה F הנק' F, K, A הן על אותו ישר, ויש תלות לינארית, ולכן היחס המקדמי צריך להיות שווה:

$$\frac{S}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}\rightarrow\boxed{S=\frac{1}{3}.}$$

$$\frac{t}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}\rightarrow\boxed{t=1}$$

$$\vec{B'F}=\vec{B'B}+\vec{BA}+\vec{AF}$$

$$\vec{B'F}=-\cancel{\underline{w}}-\cancel{\underline{v}}+\frac{1}{3}\underline{u}+\cancel{\underline{v}}+\cancel{\underline{w}}$$

$$\vec{B'F}=\frac{1}{3}\underline{u}$$

מכיוון ו $\vec{B'F}$ הוא כפולה בסקלר של $\vec{B'C'}$ $(\vec{B'C'}=\underline{u})$ הווקטורים תלויים לינארית ומכיוון שנקודת המוצא מנק' משותפת B' הם על אותו ישר.

$$\boxed{\frac{B'F}{B'C'}=\frac{1}{3}}$$

(2)

3. z_A , z_B ו־ z_C הם שלושה מספרים מרוכבים שונים זה מזה המייצגים את הנקודות A , B ו־ C במישור גאוס, בהתאמה.

נתון: $|z_A|=|z_B|=|z_C|=\sqrt{65}$,

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון,

z_A ו־ z_C מקיימים את המשוואה: $(8-i)z=(8+i)\bar{z}$.

א. (1) מצא את z_A ואת z_C .

(2) הסבר מדוע $\sphericalangle ABC=90^{\circ}$.

נתון: $AB = BC$.

ב. מצא את z_B (מצא את שתי האפשרויות).

נתון: הנקודה B נמצאת ברביע השני.

ג. a_n היא סדרה הנדסית שבה $a_1=z_A$ ו־ $a_2=z_B$.

נתון: m הוא מספר טבעי כך שסכום m האיברים הראשונים של הסדרה a_n הוא 0 .

הסבר מדוע m מתחלק ב־ 4 ללא שארית.

<u>א</u> (1) נגדיר $z=x+yi$

$$\begin{cases} \text{I} & (8-i)(x+yi)=(8+i)(x-yi) \\ \text{II} & |x+yi|=\sqrt{65} \end{cases}$$

I $\cancel{8x}+8yi-xi+\cancel{y}=\cancel{8x}-8yi+xi+\cancel{y}$

$(8y-x)i=(-8y+x)i$

$8y-x=-8y+x$

$16y=2x$

$\boxed{8y=x}$

II $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{65} \quad |()^2$

$(8y)^2+y^2=65$

$$64y^2+y^2=65 \rightarrow 65y^2=65 \rightarrow y^2=1$$

$y=1$ או $y=-1$

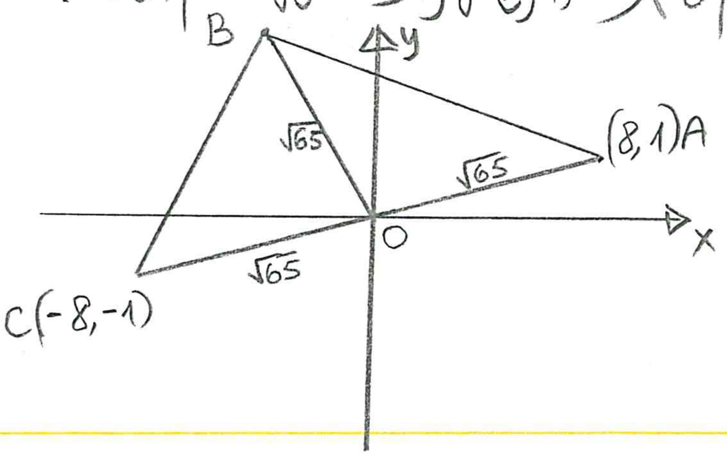
$x=8$ $x=-8$

(נתון ש- Z_A ברביע I) $Z_A=8+i$ $Z_C=-8-i$

א(2) שיעורי הנקודות A ו- C נגדיים ולכן הנקודות נמצאות על קו ישר שעובר דרך ראשית הצירים. (ראשית הצירים היא אמצע הקטע AC). הנקודות A, B ו- C נמצאות במרחק זהה מראשית הצירים - נתון, מתקבל משולש שבו התיכון לצלע שווה למחציתה ולכן מדובר במשולש ישר זווית

הסבר נוסף - מתקבל מעגל קנוני שבו AC קוטר ו- B נמצאת על היקפו, כך ש- ∢ABC הינה זווית היקפית הנשענת על קוטר.

ראה ציור:



ב. נתון $AB=BC$ כך ש ΔABC ישר
זווית ושווה שוקיים. BO הוא חציון
לכן גם גובה. השיפועים של AC ו BO
הופכיים ונגדיים. נחשב את שיפוע CA
וכך נדע את שיפוע BO.
נמצא את נקודה $B(x_B,y_B)$

$$m_{CA}=\frac{1-(-1)}{8-(-8)}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

נובע ששיפוע הישר BO הוא -8

$$\begin{cases} \text{I} & m_{BO}=-8=\dfrac{y_B-0}{x_B-0} \\ \text{II} & d_{BO}=\sqrt{65}=\sqrt{(x_B-0)^2+(y_B-0)^2} \end{cases}$$

$$\text{I} \qquad y_B=-8x_B$$

$$\text{II} \qquad 65=x_B^2+(-8x_B)^2$$

$$65=65x_B^2$$

$$1=x_B^2$$

$x_B=1$, $y_B=-8$, $B(1,-8)$, $z_B=1-8i$

$x_B=-1$, $y_B=8$, $B(-1,8)$, $z_B=-1+8i$

ג

$a_1 = Z_A = 8+i$

$a_2 = Z_B = -1+8i$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-1+8i}{8+i} \cdot \frac{8-i}{8-i} = \frac{-8+i+64i+8}{8^2+1^2} = \frac{65i}{65} = i$$

$$S_m = \frac{a_1(q^m-1)}{q-1}$$

כדי שהסכום של סדרה הנדסית יצא 0 עבור
q^m-1 צריך להתאפס, נבדוק
איזה ערכים של m זה יקרה:
(תזכורת $q=i$)

$i^m - 1 = 0$

$i^m = 1$

$(cis\,90)^m = cis\,0$

$cis(90m) = cis\,0$

$90m = 0 + 360k$

$m = 0 + 4k$

$m = 4k$

מאחר ! $m=4k$ בהכרח מתחלק ? 4

4. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$.

נסמן: $g(x)=e^x-x$.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, והסבר מדוע לכל x מתקיים: $e^x-x\ge 1$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$? נמק.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) הראה כי $f'(x)=\frac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}$.

ידוע כי הביטוי $2e^x-xe^x-1$ מוגדר לכל x וחיובי בתחום $-1\le x\le 1$.

ג. (1) חשב את $f(-1)$ ואת $f(1)$, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-1\le x\le 1$.

(2) הסתמך על הסעיפים הקודמים והסבר מדוע לפונקציה $f(x)$ יש לפחות שתי נקודות קיצון בתחום ההגדרה שלה כולו.

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי ציר ה־ x , על ידי הישר $x=-1$ ועל ידי גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-1\le x\le 0$.

(4)

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$$

נסמן $g(x)=e^x-x$

א) (1) תחום ההגדרה של $g(x)$: כל x

(2) נק' קיצון של $g(x)$:

$g'(x)=e^x-1$

$e^x-1=0$

$e^x=1$

$x=0$

$g(0)=e^0-0=1$ $(0,1)$

$g''(x)=e^x>0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{מינ' } (0,1)}$

צ"ל $e^x-x\geq 1$

לפונקציה יש נק' מינימום בנק' $(0,1)$ ולכן הערך המינימלי שלה הוא 1. לכן כל שאר ערכי הפונקציה (שהיא פונקציה רציפה) גבוהים מ- 1.

$e^x-x\geq 1 \Leftarrow g(x)\geq 1$

ב) (1) תחום ההגדרה של $f(x)$:

$$e^x - x \neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$g(x) \neq 0$$

לפי סעיף א' $g(x) \geq 1$ ולכן לכל ערך של x $g(x) \neq 0$.

$$\Downarrow$$

תחום הגדרה $\boxed{\text{כל } x}$.

(2) לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטה אנכית כי אין ערך x שמאפס את המכנה שלה.

אס' אופקית:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1,\ x > 0}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{0 - 1}{0 - \infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0,\ x < 0}$$

(3) נק' חיתוך של $f(x)$ עם הצירים

ציר X

$$\frac{e^x-1}{e^x-x}=0$$

$$e^x-1=0$$

$$e^x=1$$

$$x=0$$

$$\boxed{(0,0)}$$

ציר Y

$$f(0)=\frac{e^0-1}{e^0-0}=\frac{0}{1}=0$$

$(0,0)$

(4) נג'

$$f'(x)=\frac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}$$

$u=e^x-1 \qquad u'=e^x$

$v=e^x-x \qquad v'=e^x-1$

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}=\frac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+2e^x-1}{(e^x-x)^2}$$

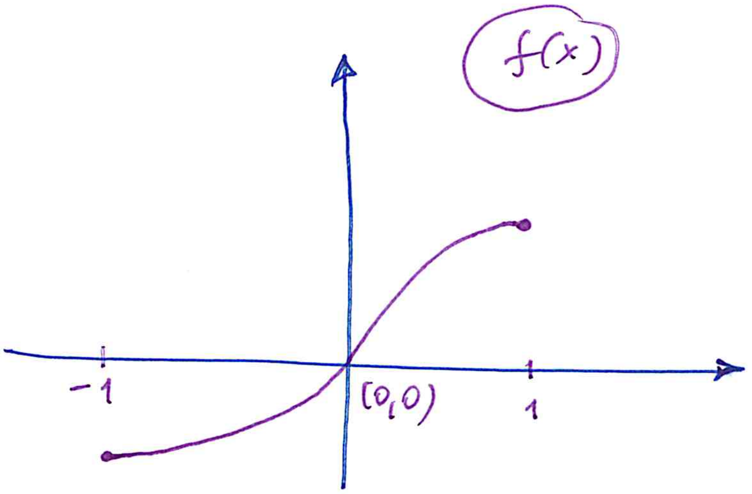
$$f'(x)=\frac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}.$$

נתון: $2e^x - xe^x - 1$ מוגדר לכל x
וחיובי בתחום $-1 \le x \le 1$

ג) (1)

$$f(-1) = \frac{e^{-1}-1}{e^{-1}+1} = -0.46$$

$$f(1) = \frac{e^{1}-1}{e^{1}-1} = 1$$



המונה של $f'(x)$ חיובי
עפ"י הנתון, המכנה
של $f(x)$ חיובי.
⇓
$f'(x) > 0$ לכל x
⇓
$f(x)$ עולה בתחום
$-1 \le x \le 1$

(2) $f'(0) = 1$, $f'(-5) = -0.038$, $f'(x)$ רציפה לכל x
אז קיימת בין $x=0$ ל-$x=-5$ לפחות נקודה אחת
שבה $f'(x)=0$! היא נקודת מינימום.

$f'(5) = -0.021$, $f'(0) = 1$ ולכן בין $x=0$ ל-$x=5$
קיימת לפחות נקודה אחת שבה $f'(x)=0$
והיא נקודת מקסימום.

(3)

$$S = \int_{-1}^{0} -\frac{e^x-1}{e^x-x}\,dx$$

הצבה:

$$u = e^x - x \qquad\qquad e^x - x \geq 1 \Rightarrow e^x - x > 0$$

$$du = (e^x-1)\,dx$$

$$dx = \frac{du}{e^x-1}$$

$$S = \int_{-1}^{0} -\frac{e^x-1}{u}\cdot\frac{du}{e^x-1} = \int_{-1}^{0} -\frac{1}{u}\,du =$$

$$= -\ln|u| = -\ln(e^x-x)\Big|_{-1}^{0} =$$

$$= -\ln(e^0-0) + \ln(e^{-1}+1) =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{e}+1\right) = 0.313$$

יח"ר

5. נתונה הפונקציה: $f(x)=\ln(e^{2x}+b)$. $b>0$ הוא פרמטר.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

נתונה הפונקציה: $g(x)=\ln(e^{x}+be^{-x})$.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ג. (1) הוכח: $f(x)-g(x)=x$.

(2) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ (אם צריך, הבע באמצעות b).

נתון כי נקודת המינימום של הפונקציה $g(x)$ נמצאת על האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את ערך הפרמטר b .

ה. הצב $b=4$ וסרטט במערכת צירים אחת סקיצה של הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$.

$f(x)=\ln(e^{2x}+b)$ $b>0$

א (1) e^{2x} חיובי תמיד מאחר והוא ביטוי מעריכי

b חיובי - נתון

תנאי ארגומנט ה $\ln$ חיובי תמיד ולכן ת.ה הוא כל x.

א (2) $f'(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+b}$

מונה הנגזרת חיובי תמיד מאחר ומדובר בביטוי מעריכי.

המכנה חיובי תמיד לפי סעיף קודם.

לכן הנגזרת חיובית תמיד ← $f(x)$ עולה לכל x.

$g(x)=\ln(e^{x}+be^{-x})$

ב ת.ה ש הפונ' g הוא כל x מאחר ומדובר בסכום ש ביטויים מעריכיים עם מקדמים חיוביים.

ג(1) נפשט את הפונ' $g(x)$

$$g(x)=\ln(e^x+be^{-x})$$

$$g(x)=\ln[e^{-x}(e^{2x}+b)]=\ln(e^{-x})+\ln(e^{2x}+b)$$

$$g(x)=-x\ln(e)+f(x)=-x+f(x)$$

$$\boxed{g(x)=-x+f(x)}$$

נוכיח את שנדרש:

$$f(x)-g(x)=f(x)-[-x+f(x)]=x$$

ג(2) נשווה את הפונ' על מנת למצוא חיתוך:

$$g(x)=f(x)$$

$$-x+f(x)=f(x)$$

$$-x=0$$

$$\boxed{x=0}$$

$$f(0)=\ln(e^0+b)=\ln(1+b)$$

נקודת החיתוך היא: $(0,\ln(1+b))$

ד. אסי' אופקית ימנית? $f(x)$ לא קיימת

מאחר וכאשר x שואף לאינסוף, e^{2x} שואף גם כן לאינסוף וכאשר נפעיל $\ln$ על אינסוף נקבל אינסוף.

אסימ' אופקית שמאלית ל $f(x)$ קיימת ב $y=\ln(b)$

מאחר וכאשר x שואף למינוס אינסוף, e^{2x} שואף לאפס

ומקבלים $y=\ln(b)$.

נמצא את שיעור ה-x של נקודת המינ' ולאחר

מכן נציב את נקודת המינימום ב $g(x)$ כדי

למצוא את b.

$$g'(x)=-1+f'(x)=0$$

$$f'(x)=1$$

$$\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+b}=1$$

$$2e^{2x}=e^{2x}+b$$

$$e^{2x}=b$$

$$2x=\ln(b)$$

$$\boxed{x=\frac{\ln(b)}{2}}$$

נקודת המינ' היא $\left(\frac{\ln(b)}{2},\ln(b)\right)$. נציב אותה

ב $g(x)$.

$$g(x) = -x + f(x)$$

$$\ln(b) = -\frac{\ln(b)}{2} + \ln\left(e^{\cancel{2}\cdot\frac{\ln(b)}{\cancel{2}}} + b\right)$$

$$\frac{3\cdot\ln(b)}{2} = \ln(2b)$$

$$3\cdot\ln(b) = 2\ln(2b)$$

$$\ln(b^3) = \ln((2b)^2)$$

$$b^3 = 4b^2$$

$$b^2(b-4) = 0$$

$b=0$ $\quad$ $b-4=0$

נפסל- $\quad$ $\boxed{b=4}$

b חיובי

ה. עבור $b=4$ נבנה את המידע על הפונ'

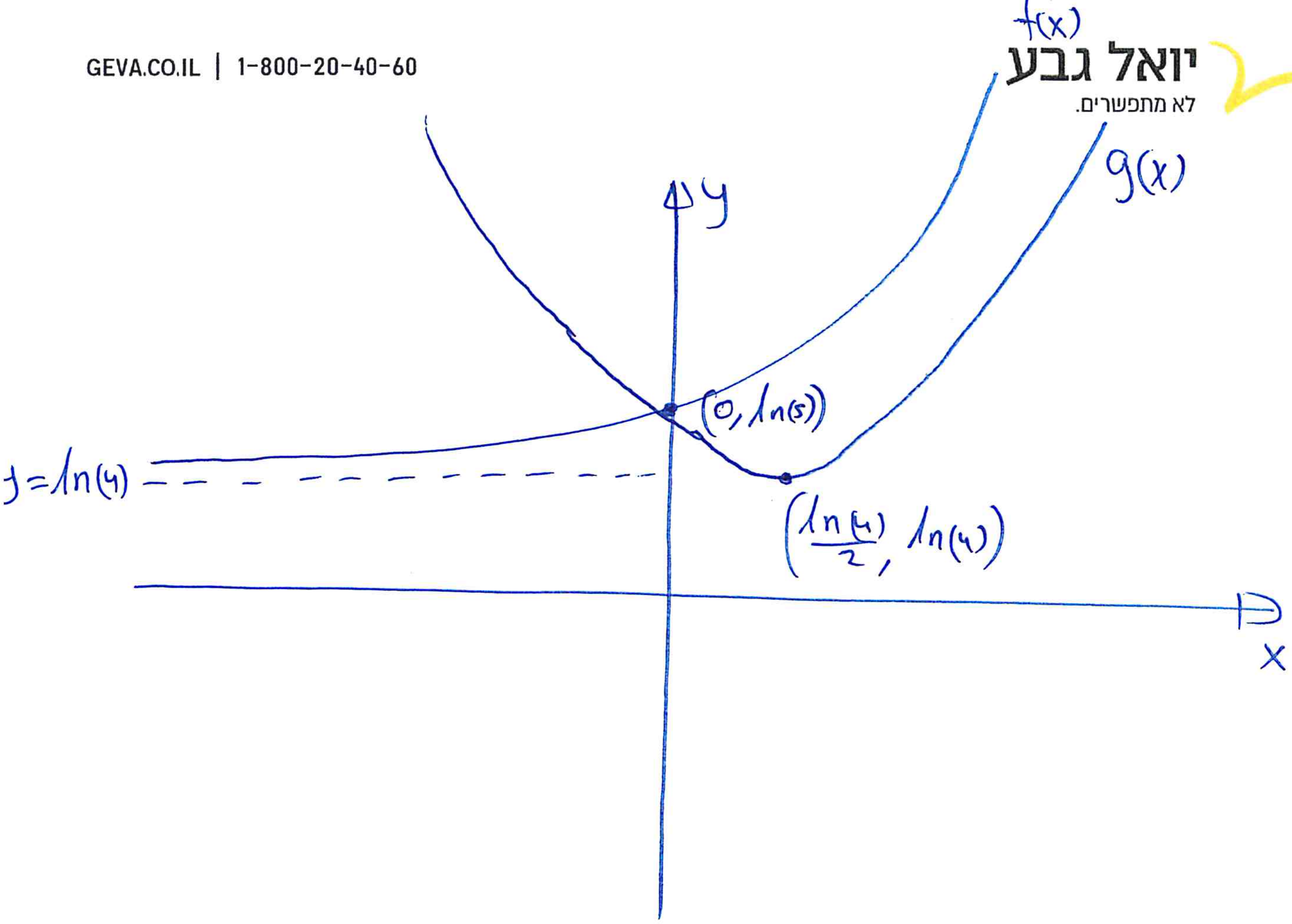
$f(x)$: תמיד עולה, אופקית שמאלית $y=\ln(4)$,

חותכת את ציר y: ואת $g(x)$

? $(0, \ln(5))$

$g(x)$: נק' חוח ?

$\left(\frac{\ln(4)}{2}, \ln(4)\right)$


f(x)
g(x)
y
$(0, \ln(5))$
$y = \ln(4)$
$\left(\frac{\ln(4)}{2}, \ln(4)\right)$
x