

## פתרון הבחינה

# במתמטיקה

קיץ תשע"ח, 2018, שאלון: 35581  
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

נמידע על פסיכומטרי  
ביזאל גבע ←

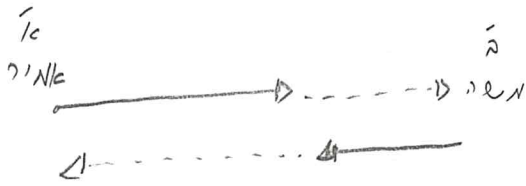
הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.





1. שני רוכבי אופניים, אמיר ומשה, יצאו בשעה 6:00 זה לכיוונו של זה.  
 אמיר רכב במהירות קבועה מעיר א לעיר ב, ומשה רכב במהירות קבועה מעיר ב לעיר א.  
 אמיר ומשה עברו זה על פני זה והמשיכו כל אחד ליעדו. אמיר הגיע לעיר ב שעתיים אחרי שעבר על פני משה,  
 ואילו משה הגיע לעיר א 8 שעות אחרי שעבר על פני אמיר.  
 א. באיזו שעה עברו אמיר ומשה זה על פני זה?  
 נסמן את מהירות נסיעתו של אמיר באות V.  
 בדיוק כאשר עברו אמיר ומשה זה על פני זה יצאה יסמין, רכובה על אופנוע, מעיר א לעיר ב, במהירות קבועה.  
 נתון שיסמין הגיעה לעיר ב אחרי אמיר, אך לפני שמשה הגיע לעיר א.  
 ב. (1) הבע באמצעות V את המרחק בין עיר א לעיר ב.  
 (2) הבע באמצעות V את טווח המהירויות האפשרי של יסמין.

א. נאצייר (על מוס: מהירות, אמיר = v, מהירות, משה = y, הנמן 38 סתאפז צה 8



מהירות	זמן	דרך
אמיר 38 סתאפז אפני משה	v	±v
משה 38 סתאפז אמיר	y	±y
אמיר משה סתאפז	v	2v
משה אמיר סתאפז	y	8y

נשוה בין הדרך שאמיר עבר לפני שתאפז על פני משה לפני שתאפז על פני אמיר  
 (סתאפז אמיר וסתאפז)  
 I  $±v = 8y$   
 II  $±y = 2v$

למידע על פסיכומטרי  
 ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**



אתרי חלוקת המשוואות נקרא:

$$\frac{zv}{zy} = \frac{zy}{zv} \rightarrow zv^2 = zy^2 \rightarrow v = zy$$

נמצא את  $z$ :  $y \neq 0$

$$z \cdot zy = zy \rightarrow z = \frac{1}{z}$$

זו הצגה במשוואה I

$$2z = 8 \rightarrow z = 4$$

אתרי ומהם אלו הם את פני זה קשה  $10^{30}$

ב.ת. ע"י סוף או  $v = zy$   $\frac{1}{z}v = y$

אם הציק הוא חומר הצרכים וטניהם זר שאלו זה את פני זה

$$f = zv + zy \rightarrow 4 \cdot v + 4 \cdot \frac{1}{z}v = \frac{6v}{x}$$

(2) נבנה טבלה עבור כל הציק ולפתור: נציג את מהות יסודי  $x$ .

I:  $\frac{6v}{x} + 4 > 6$

מיון יסודי יסודי : מה שגדול יותר

II:  $\frac{6v}{x} + 4 < 6$

מיון יסודי יסודי : מה שגדול יותר

ציק	מש	מהות	מה שגדול יותר
$6v$	6	$v$	מה שגדול יותר
$6v$	$\frac{6v}{\frac{1}{z}v} = 12$	$\frac{1}{z}v$	מה שגדול יותר
$6v$	$\frac{6v}{x}$	$x$	מה שגדול יותר

I:  $\frac{6v}{x} > 2 \rightarrow 6v > 2x \rightarrow 3v > x$

II:  $\frac{6v}{x} < 2 \rightarrow 6v < 2x \rightarrow \frac{3}{2}v < x$

$$\left| \frac{3}{2}v < x < 3v \right|$$

אתרי זהו יסודי נקרא:

לחידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעבודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**



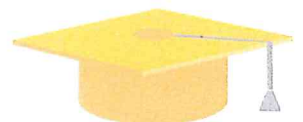
2.  $a_n$  היא סדרה הנדסית אינ'סופית מתכנסת שסכומה שלילי.
- $a_1$  הוא האיבר הראשון בסדרה,  $q$  היא מנת הסדרה.
- א. לפניך ארבע טענות (IV-I). רק אחת מהן בהכרח נכונה. ציין את מספרה ונמק.
- (I)  $q < 0$
- (II)  $a_1 < 0$  וגם  $q < 0$
- (III)  $a_1 < 0$
- (IV)  $a_1 > 0$  או  $q < 0$
- נסמן ב־  $T$  את סכום האיברים במקומות האיזוגיים בסדרה  $a_n$ ,  
ונסמן ב־  $R$  את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה  $a_n$ .
- $p$  הוא פרמטר.
- נתון:  $T + p \cdot R = 0$ .
- ב. הבע את  $p$  באמצעות  $q$ .
- $b_n$  היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא  $p$ .
- ג. האם  $b_n$  היא סדרה מתכנסת? נמק.
- ד. נתון:  $p$  שלילי. הראה שלכל  $n$  טבעי  $a_{n+1} > a_n$  (כלומר הראה שהסדרה  $a_n$  היא סדרה עולה).

א. סכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

כיוון ש  $-1 < q < 1$  הרי שהמכנה חיובי ולכן המכנה שלילי, כיוון ש  $a_1 > 0$ . לכן האגף שמכנהו (כיוון) הוא

שלילי



ב. סכום האיברים בהזלמה הוא 5 איברים:

$$T = \frac{a_1}{1-q^2}$$

סכום האיברים בהקולמה הוא 5 איברים:

$$R = \frac{a_2}{1-q^2} = \frac{a_1 \cdot q}{1-q^2}$$

נציב בשוואה:

$$\frac{a_1}{1-q^2} + p \cdot \frac{a_1 \cdot q}{1-q^2} = 0 \quad / \cdot (1-q^2)$$

$a_1 \neq 0$

$$1 + pq = 0$$

$$p = -\frac{1}{q}$$

ד. יציא  $q > -1$  וכן  $1 < p$  וכן  $p < -1$

ומכאן  $0 < p < 1$  או  $p < -1$  וכן  $q < -1$  או  $q > 1$



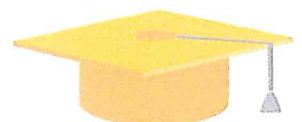
3. נתון  $0 < \epsilon < 1$

לפי הנתון, להסגור את הסדרה  $a_n$

אולי, יציב,  $a_n$  אולי וזכור

להסדרה  $a_n$  צורה, זכור

$$a_n < a_{n+1}$$



3. בעיר גדולה נערך מבחן לכל תלמידי התיכון.  
 37% מן התלמידים שניגשו למבחן נעזרו בחבריהם כדי להתכונן למבחן.  $\frac{35}{37}$  מהם עברו את המבחן.  
 מספר התלמידים שלא נעזרו בחבריהם ולא עברו את המבחן קטן פי 5 ממספר התלמידים שנעזרו בחבריהם ועברו את המבחן.
- א. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן, והתברר שהוא לא עבר את המבחן. מהי ההסתברות שהוא נעזר בחבריו?  
 ב. יעל והדס ניגשו למבחן. ידוע שיעל נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן, והדס לא נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן. האם ההסתברות שיעל עברה את המבחן גבוהה מההסתברות שהדס עברה את המבחן? נמק.  
 ג. בחרו באקראי 6 תלמידים שניגשו למבחן.  
 מהי ההסתברות שבדיוק שליש מהם לא נעזרו בחבריהם ועברו את המבחן?  
 ד. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן. מהי ההסתברות שהוא מקיים לפחות אחת משתי הטענות II-I:  
 (I) התלמיד נעזר בחבריו.  
 (II) התלמיד לא עבר את המבחן.

3 א. (סמן את הקבוצות)  
 A - תלמידי תיכון ששקמו את המבחן.  
 $\bar{A}$  - תלמידי תיכון שלא שקמו את המבחן.  
 B - תלמידי תיכון שנעזרו בחבריהם.  
 $\bar{B}$  - תלמידי תיכון שלא נעזרו בחבריהם.

\*  $P(B) = 0.37$  (טענה קטגורית)

\*  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{35}{37} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.35$

\*  $5 \cdot P(\bar{B} \cap \bar{A}) = P(B \cap A)$

$\therefore P(\bar{B} \cap \bar{A}) = 0.35 \quad | :5$

$P(\bar{B} \cap \bar{A}) = 0.07$







$$\binom{6}{2} 0.56^2 (1-0.56)^4 = 0.1763$$

מכיון שצריך לפתור אחת משתי האסות אין לתפוס את האירועים בין שתי הקבוצות. ע"פ הנוסחה:

3.

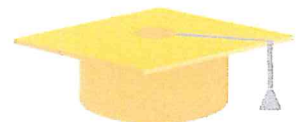
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

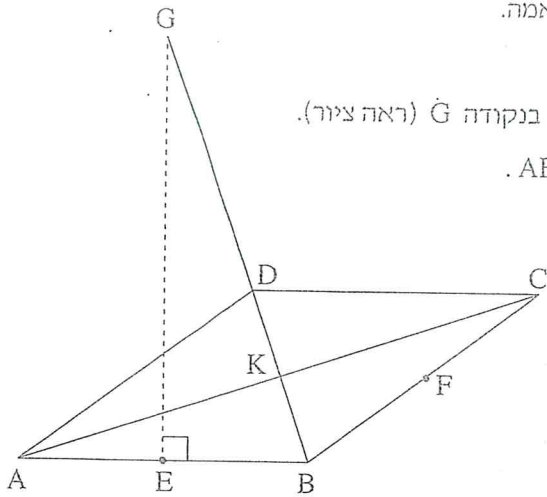
נציא מהסגור את

המשנים:

$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cup B) = 0.09 + 0.37 - 0.02 = \underline{0.44}$$



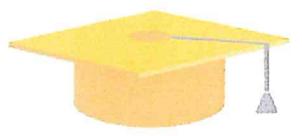


4. ABCD הוא מעוקן. E ו-F הן אמצעי הצלעות AB ו-BC בהתאמה. הנקודה K היא מפגש האלכסונים של המעוקן. מן הנקודה E העלו אנך ל-AB, החותך את המשך האלכסון BD בנקודה G (ראה ציור).  
 א. הוכח: הנקודה G היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.  
 ב. הקטע GF חותך את האלכסון AC בנקודה M, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש BDC.  
 ג. הוכח שהמשולשים BFC, BKC, MFC, ו-BFG דומים זה לזה.  
 ד. נסמן ב-R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC, וב-r את רדיוס המעגל החוסם את המשולש BDC.  
 ה. (1) הוכח כי  $\frac{MC}{GB} = \frac{MF}{CF}$  וכי  $\frac{MF}{CF} = \frac{BK}{CK}$ .  
 (2) הראה כי היחס בין אלכסוני המעוקן שווה ל- $\frac{r}{R}$ .

נימוק	יחסים
	1. ABCD מאוּוּן
	2. $AE = EB = x$
	3. $AB = BC = 2x$
	4. $BF = FC = x$
	5. $\angle GEB = 90^\circ$
	6. GE אורך מרכזי במעגל החוסם את המשולש ABC
	7. $AK = KC$
	8. $\angle GKC = 90^\circ$
	9. GK אורך מרכזי במעגל החוסם את המשולש ABC
נתון	
סימון + נתון	
AB אורך 3x, E אמצע	
חוקי קטעים + מאוּוּן	
הצלעות שוות	
נתון F אורך 3x, BC	
נתון שקטעו אנך ל-AB	
אם (2+5)	
מאפייני האלכסונים	
חוצים זה את זה	
מאפייני האלכסונים	
ואנכים זה לזה	
אם (8+7)	

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**



נימוק

נק' המפגש של שני אנכים האנכים  
היא נק' המפגש של האנכים האנכים  
נק' מפגש אנכים אנכים היא מרכז המפגש  
א.ש.ל. א

נתן

מרכז מפגש החוסם המושל הוא נק' מפגש  
האנכים האנכים האנכים של המושל

מטון ש F היא האמצע 1-M היא תיקן מותק  
יוצא אורך אנכי עקטא B. לפי (4)

MF אורך אנכי

המסוין האלכסונים האנכים זה לזה.

המספר

צווית משותפת

לפי המשפט צהיין 5.5 (17+16)

נתן הקטע GF קוטר אורך AC מ-1 MF וסרה לפי 11

לפי המספר לפי (15+19)

צווית משותפת

לפי המשפט צהיין 5.5 (20+21)

פתרון

10. היא מרכז המושל החוסם את המושל ABC

11. מ מרכז המושל החוסם את BDC

12. מ נק' מפגש האנכים האנכים המושל BDC

13. MF הוא אורך אנכי BC עקטא

14.  $\angle MFC = 90^\circ$

15.  $\angle CLB = 90^\circ$

16.  $\angle MFC = \angle CLB$

17.  $\angle KCB = \angle MCF$

18.  $\triangle BKC \sim \triangle MFC$

19.  $\angle GFB = 90^\circ$

20.  $\angle GFB = \angle CLB$

21.  $\angle GBF = \angle KBC$

22.  $\triangle BFG \sim \triangle BKC$

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



(י"ח)ן

ה'ג

(18+22) לפי  
נ.ש.פ

$\triangle BFG \sim \triangle BKC \sim \triangle MFC$  .23

ותפי צלעות מתאימות בהתאמות  
צומים ( $\triangle BFG \sim \triangle MFC$ )

$\frac{MC}{BG} = \frac{MF}{BF}$  .24

הצבה לפי (4)

$\frac{MC}{BG} = \frac{MF}{FC}$  .25

ותפי צלעות מתאימות בהתאמות  
צומים ( $\triangle BKC \sim \triangle MFC$ )

$\frac{BK}{MF} = \frac{KC}{FC}$  .26

אזכרה

$BK \cdot FC = KC \cdot MF$  .27

אזכרה

$\frac{BK}{KC} = \frac{MF}{FC}$  .28

נ.ש.פ (כ"ו)

(25+28) לפי ה'ה'פ'ר

$\frac{BK}{CK} = \frac{MC}{GB}$  .29

מ מרכז המעגל ה'ה' כן ה'ה'פ'ר

$MC = r$  .30

ג מרכז המעגל ה'ב' כן ה'ה'פ'ר

$GB = R$  .31

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



(י"א/ק)	C אס
האזעזען האלפטניא חזרים.	$\frac{BD}{AC} = \frac{2KB}{2CK} = \frac{KB}{CK} \quad .32$
אפי 29	$\text{נחס האלפטניא} = \frac{KB}{CK} = \frac{MC}{GB} \quad .33$
אפי (31 + 30)	$\frac{MC}{GB} = \frac{r}{R} \quad .34$
נ.א.א (2)	

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

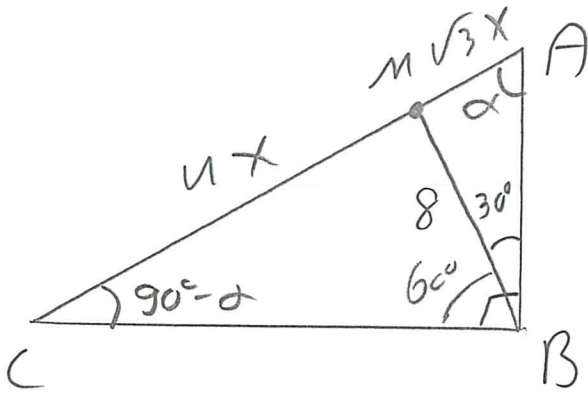
הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.





5. ABC הוא משולש ישר זווית ( $\angle ABC = 90^\circ$ ).  
 M היא נקודה על היתר כך ש-  $AM : MC = \sqrt{3} : 4$ .  
 נתון:  $BM = 8$ ,  $\angle ABM = 30^\circ$ .
- א. (1) סמן:  $MC = 4x$  וחשב את זוויות המשולש ABC.  
 (2) חשב את הרדיוסים של המעגלים החוסמים את המשולשים ABM ו-CMB.
- ב. נסמן את מרכזי המעגלים החוסמים את המשולשים ABM ו-CBM ב-  $O_1$  ו-  $O_2$  בהתאמה.  
 (1) הסבר מדוע המרובע  $BO_1MO_2$  הוא דלתון.  
 (2) חשב את אורך הקטע  $O_1O_2$ .

(שיטת אר הנגזרים):



$\angle A = \alpha$  (סני)  
 $\Downarrow$   
 $\angle C = 90^\circ - \alpha$

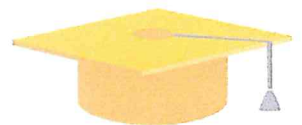
א. (ג) נרשום שני משפטי סינוסים ונגלה:

$\triangle ABM$ :  $\frac{8}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}x}{\sin 30^\circ} \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3} \sin \alpha}$

$\triangle BCM$ :  $\frac{8}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{4x}{\sin 60^\circ} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{\cos \alpha}$

$\frac{4}{\sqrt{3} \sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\cos \alpha}$  (כאן)  
 $\Downarrow$

$4 \cos \alpha = 3 \sin \alpha \quad /: \cos \alpha \neq 0$   
 $\Downarrow$



$$\tan \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\alpha = 53.13^\circ$$



$$\angle A = 53.13^\circ, \angle C = 36.87^\circ$$

$\Delta ABM$  (2)

$$R_{ABM} = 5$$

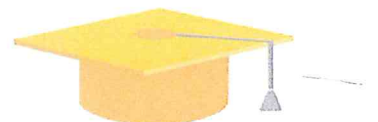
$$\Leftrightarrow \frac{8}{\sin 53.13^\circ} = 2R$$

$\Delta BCM$

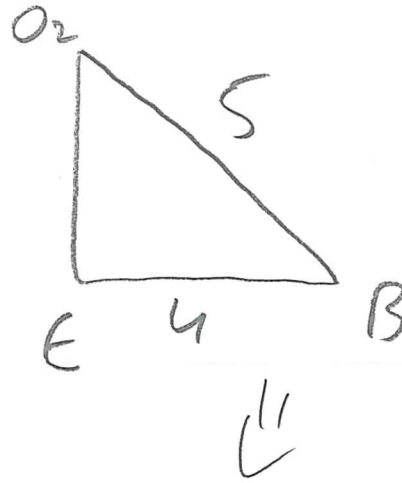
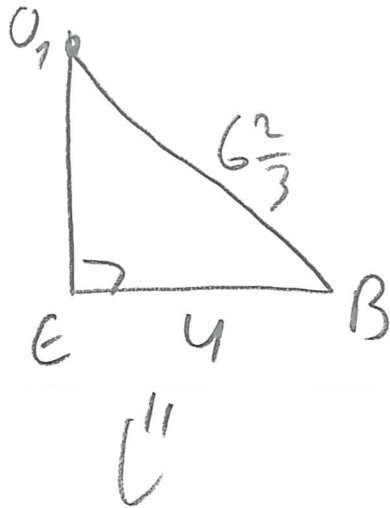
$$R_{BCM} = 6\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{\sin 36.13^\circ} = 2R$$

בהינתן כיוון ש-  $\alpha$  הוא הכנס הנגד הזווית  
 גם משולש  $ABM$ , הכי  $\angle M = \angle B$   
 ברובה פונה מתדוים  $\angle M = \angle B$   
 מכאן, ראי שההצלחה מוביל  $\angle M = \angle B$  בלבד



(2)  $O_1, O_2$  איזכסון האש, דעלמון זאכן  
מאזונטן  $O_1$ - $B$  וחוצה אמתו. (נראה  $E$ - $B$ )  
נוצקים בתוך הבלמון משוואת ישרי  $O_1$  ו- $O_2$ :

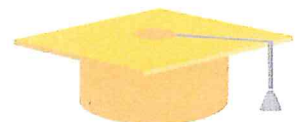


$$O_1 E = \sqrt{28\frac{4}{9}} = 5\frac{1}{3}$$

$$O_2 E = 3$$

$$O_1 O_2 = 8\frac{1}{3}$$

זאכין:





6. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax-1}{\sqrt{ax^2-2x+1}}$ .  $a$  הוא פרמטר.

נתון: הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$ .

א. הוכח:  $a > 1$ .

ענה על סעיף ב. אם יש צורך, הבע באמצעות  $a$ .

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.

(2) כתוב את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המקבילות לציר ה- $x$ .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתון:  $a = 3$ .

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , על ידי ציר ה- $x$ , ועל ידי הישרים  $x = \frac{2}{3}$  ו- $x = 2$ .

ד.  $g(x)$  היא פונקציה רציפה המוגדרת לכל  $x$ .

נסמן ב- $S$  את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים  $x = \frac{1}{3}$  ו- $x = b$  ( $b > \frac{1}{3}$ ).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , על ידי גרף הפונקציה  $g(x)$  ועל ידי הישרים  $x = \frac{1}{3}$  ו- $x = b$  שווה ל- $2S$  בעבור כל  $b$ .

הבע את  $g(x)$  באמצעות  $f(x)$  בתחום  $x > \frac{1}{3}$  (כתוב את שתי האפשרויות). אין צורך להוכיח את תשובתך.



6

$$f(x) = \frac{ax-1}{\sqrt{ax^2-2x+1}}$$

למיין: תמונה ההיכנסה של  $x$

⇓

$$x \text{ בר } ax^2-2x+1 > 0$$



$$\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ \Delta < 0 \quad (\Delta = b^2 - 4ac) \end{cases}$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot a \cdot 1 < 0$$

$$4 - 4a < 0 \quad | :4$$

$$1 - a < 0 \quad a < 1 \quad a > 0$$

$$\boxed{a > 1}$$





(3)

תמונה של ו'כ'צב

$$u = ax - 1$$

$$u' = a$$

$$v = \sqrt{ax^2 - 2x + 1}$$

$$v' = \frac{ax - 1}{\sqrt{ax^2 - 2x + 1}}$$

$$f'(x) = \frac{a\sqrt{ax^2 - 2x + 1} - \frac{(ax - 1)^2}{\sqrt{ax^2 - 2x + 1}}}{ax^2 - 2x + 1} = 0 \cdot \frac{ax^2 - 2x + 1}{\sqrt{ax^2 - 2x + 1}}$$

$$a(ax^2 - 2x + 1) - (ax - 1)^2 = 0$$

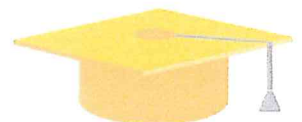
$$a^2x^2 - 2ax + a - a^2x^2 + 2ax - 1 = 0$$

$$a - 1 = 0$$

$$a \neq 1$$



אין יק' ק'צבין



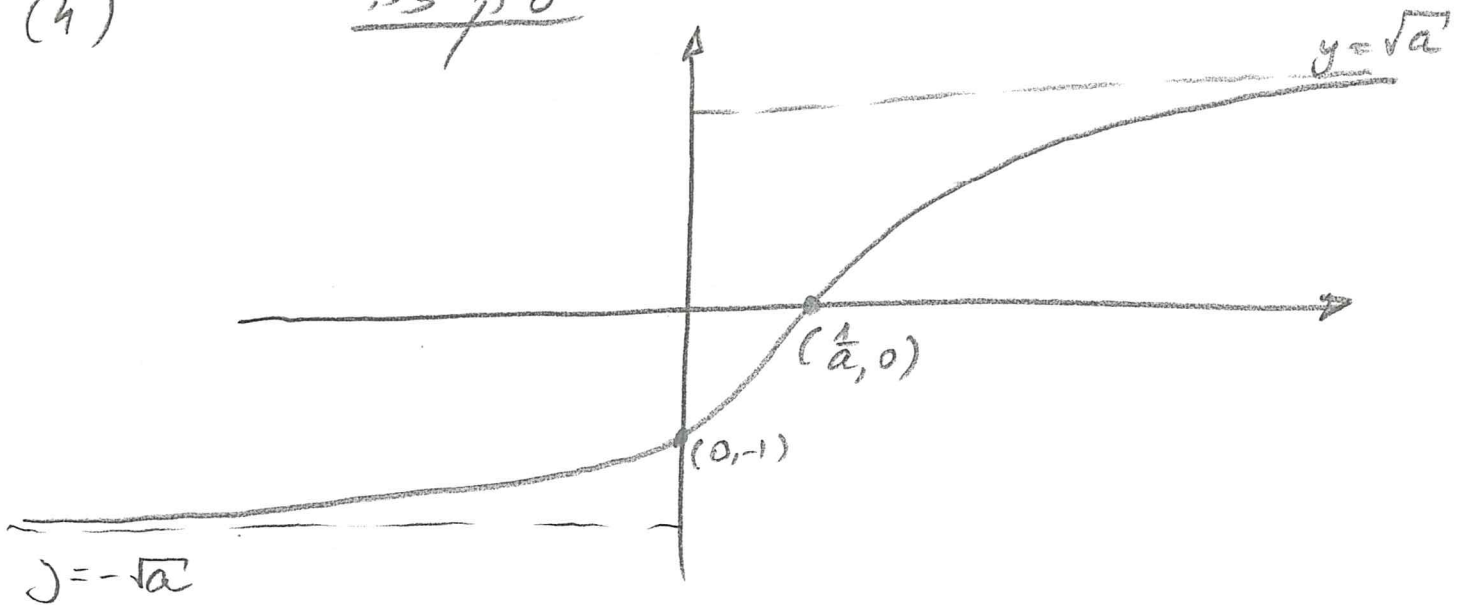
	$x \geq 0$
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗

$f'(x) > 0$   
 $a > 1$   
 $a - 1 > 0$   
 הוכחה של  $f'(x)$   
 מ'ול'  $x \geq 0$

$f(x)$  עולה לכול  $x$   
 ו'וכן לכול  $x$

(4)

סק'ציה



למידע על פסיכומטרי  
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
 אל תתפשר עליה.



$$\textcircled{ד} \quad S = \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{ax-1}{\sqrt{ax^2-2x+1}} dx$$

הצבה

$$u = ax^2 - 2x + 1$$

$$du = (2ax - 2) dx$$

$$dx = \frac{du}{2(ax-1)}$$



$$S = \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{ax-1}{\sqrt{ax^2-2x+1}} dx = \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{ax-1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{2(ax-1)} =$$

$$= \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \sqrt{u} = \sqrt{ax^2-2x+1} \Big|_{\frac{2}{3}}^2$$

$$a=3 \quad \text{נ"פ"ר}$$

$$S = \sqrt{3x^2-2x+1} \Big|_{\frac{2}{3}}^2 = \sqrt{3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1} - \sqrt{3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + 1} =$$

$$= 3 - 1 = \boxed{2}$$



8

$g(x)$  כצ'פה ומואפני  
x לזר

שטח  $S = \int_{\frac{1}{3}}^b f(x) dx$

I נ'נה  $f(x) > g(x)$   
במחוס ה'טון

I  
מטן:

$$\int_{\frac{1}{3}}^b (f(x) - g(x)) dx = 2S$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^b f(x) dx - \int_{\frac{1}{3}}^b g(x) dx = 2S$$

$$S - 2S = \int_{\frac{1}{3}}^b g(x) dx$$

$$-S = \int_{\frac{1}{3}}^b g(x) dx$$

$$-\int_{\frac{1}{3}}^b f(x) dx = \int_{\frac{1}{3}}^b g(x) dx \Rightarrow \boxed{g(x) = -f(x)}$$





II

נניח  $f(x) < g(x)$

במרום הנמוך

$$\int_{\frac{1}{3}}^b (g(x) - f(x)) dx = 2S$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^b g(x) dx - \int_{\frac{1}{3}}^b f(x) dx = 2S$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^b g(x) dx = S + 2S$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^b g(x) dx = 3 \cdot \int_{\frac{1}{3}}^b f(x) dx$$



$$g(x) = 3f(x)$$



7.  $f(x)$  היא פונקציה גזירה, המוגדרת לכל  $x$ , כך ש-  $f(x) \neq 0$  לכל  $x$ .

א. הוכח שאם הפונקציה  $f(x)$  עולה בקטע מסוים, אז הפונקציה  $\frac{1}{f(x)}$  יורדת באותו הקטע;

ואם הפונקציה  $f(x)$  יורדת בקטע מסוים, אז הפונקציה  $\frac{1}{f(x)}$  עולה באותו הקטע.

נתונה הפונקציה  $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2$ , המוגדרת לכל  $x$ .

ב. האם קיים  $x$  שבעבורו  $g(x) = 0$ ? נמק.

ג. (1) האם הפונקציה  $g(x)$  היא פונקציה זוגית? נמק.

(2) הראה שלכל  $x$  מתקיים:  $g(x) = g(x + 2\pi)$ .

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ , וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$  בתחום  $-\pi \leq x \leq 3\pi$ .

נתונה הפונקציה  $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}$ .

ענה על סעיף ד. תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ד. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $h(x)$ ? נמק.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $h(x)$  בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$  באותה מערכת צירים שבה סרטטת את

גרף הפונקציה  $g(x)$ .



7

$f(x)$  איז פונקציע וואס איז פארעם פאר  $x$

$x$  פאר  $f(x) \neq 0$

8

נעמט  $f(x)$  פארעם

$\Downarrow$

$f'(x) > 0$

$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

$f^2(x) > 0$  ,  $f'(x) > 0$

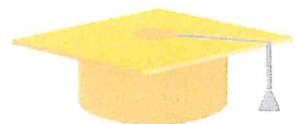
$(f(x) \neq 0)$  פאר  $x$  , און נעמט

$\Downarrow$

$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' < 0$

$\Downarrow$

$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' < 0$



נכונות:  $f(x)$  ו'וכר

$\Downarrow$

$$f'(x) < 0$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} > 0$$

$\Downarrow$

$\frac{1}{f(x)}$

$$g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2$$

( $\geq$ )

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$\Downarrow$

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1$$

$\Downarrow$

$$-1 \leq \sin^2 x + \cos x \leq 2$$

$\Downarrow$

$$1 \leq \sin^2 x + \cos x + 2 \leq 4$$

$\Downarrow$

$$g(x) \neq 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

לא ק"ס ברש"א  
שאנוכו



(1)

$$g(-x) = (\sin(-x))^2 + \cos(-x) + 2$$

$$g(-x) = (-\sin x)^2 + \cos x + 2$$

$$g(-x) = \sin^2 x + \cos x + 2 = g(x)$$

$\Downarrow$   
 פונקציה זוגית

$$(2) \quad g(x+2\pi) = (\sin(x+2\pi))^2 + \cos(x+2\pi) + 2$$

$$g(x+2\pi) = \sin^2 x + \cos x + 2 = g(x)$$



(3) נתק ק'צון  $\approx$  מסומם  
 $0 \leq x \leq \pi$

$$g'(x) = 2\sin x \cos x - \sin x = \sin 2x - \sin x$$

$$\sin 2x - \sin x = 0$$

$$\sin 2x = \sin x$$

$$2x = x + 2\pi k$$

$$2x = \pi - x + 2\pi k$$

$$x_1 = 2\pi k$$

$$3x = \pi + 2\pi k$$

k	$x_1$	$x_2$
-1	x	x
0	0	$\frac{\pi}{3}$
1	x	$\pi$

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k$$

$$f(0) = \sin^2 0 + \cos 0 + 2 = 3$$

$$f(\pi) = \sin^2 \pi + \cos \pi + 2 = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} + 2 = 3\frac{1}{4}$$



$$g''(x) = 2\cos 2x - \cos x$$

$$g''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$$

⇓

נק' מקסימום  $\left(\frac{\pi}{3}, 3\frac{1}{4}\right)$

⇓

נק' מינימום  $(0, 3)$   
קצה  $(\pi, 1)$

מכיון כי  $f(x) = f(x+2\pi)$  נכון

אם הפונקציה מקבלת מינימום בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$

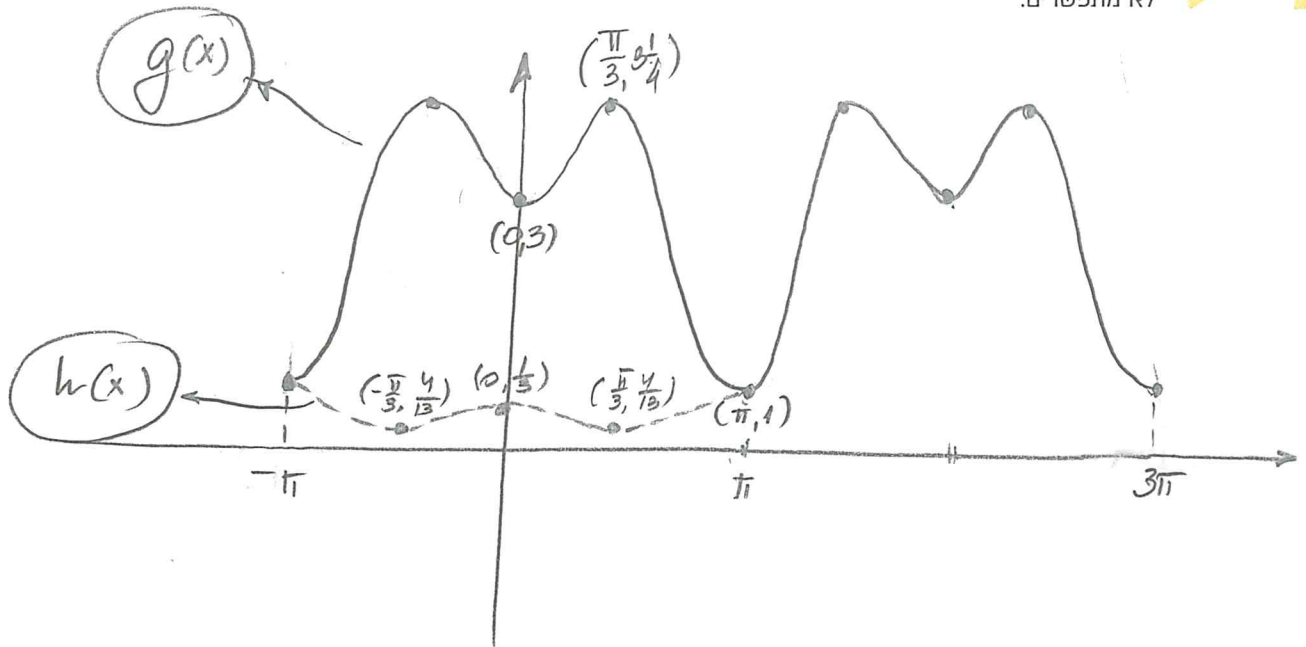
על פי סימטריה תמצא מינימום גם בתחום  $\pi \leq x \leq 3\pi$

ומכיון ש  $f(x)$  פונקציה זוגית  
המינימום שיוצא ממס'  $x$  יצא גם ממס'  $-x$

לכן נראה שמינימום בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ !

$$-\pi \leq x \leq 0$$





3

$$h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}$$

⇔

$$h(x) = \frac{1}{g(x)}$$

(1)

תחום ההגדרה

$$g(x) \neq 0$$

$$x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0$$

⇔

$$x \in \mathbb{R}$$





(2)  $g(x)$  יקראו אנוכי

$$g(-\pi) = g(\pi) = 1$$

$\Downarrow$

$$h(-\pi) = h(\pi) = \frac{1}{1} = 1$$

$$g\left(-\frac{\pi}{3}\right) = g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\frac{1}{4}$$

$\Downarrow$

$$h\left(-\frac{\pi}{3}\right) = h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{13}$$

$$g(0) = 3$$

$\Downarrow$

$$h(0) = \frac{1}{3}$$

$$h'(x) = \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$$x \text{ לר } g^2(x) > 0$$

$$h'(x) < 0 \text{ אם } g'(x) > 0$$

$$h'(x) > 0 \text{ אם } g'(x) < 0$$





$(-\frac{\pi}{3}, \frac{4}{13})$   $(\frac{\pi}{3}, \frac{4}{13})$  נק' מינימום

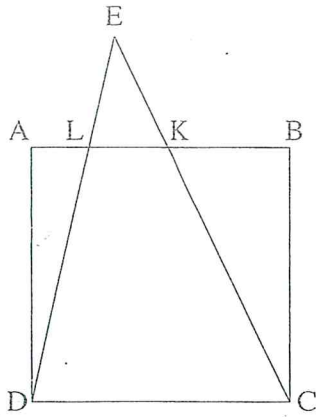
$(0, \frac{1}{3})$  נק' מקסימום

$(-\pi, 1)$   $(\pi, 1)$  מקסימום קצה

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.

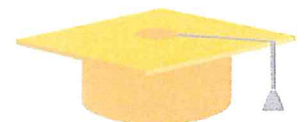




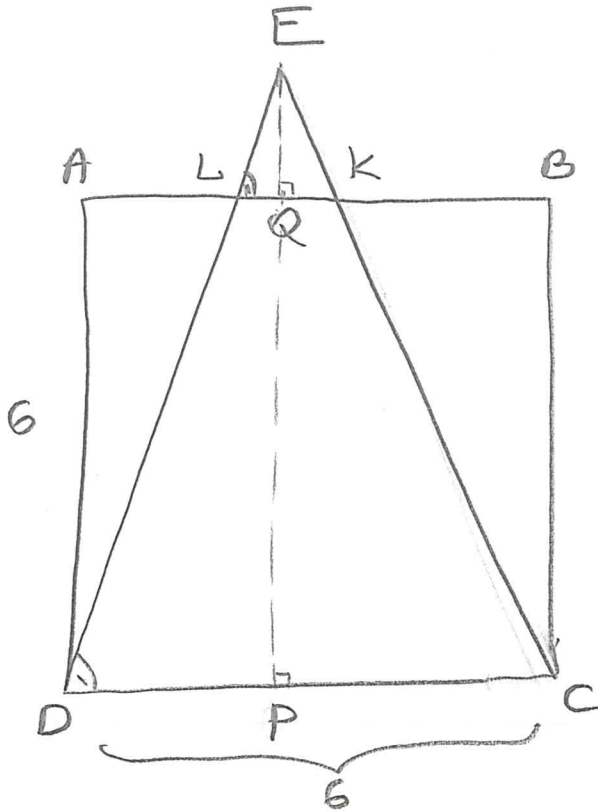
8. ABCD הוא ריבוע שאורך צלעו 6 ס"מ.  
 K ו-L הן נקודות על הצלע AB.  
 נתון כי הישרים CK ו-DL חותכים זה את זה בנקודה E,  
 הנמצאת מחוץ לריבוע ABCD (ראה ציור).  
 נסמן:  $LK = x$ .
- א. הבע באמצעות x את גובה המשולש KLE.
  - ב. עבור איזה ערך של x סכום שטחי המשולשים BCK, ADL ו-KLE הוא מינימלי? נמק.
- תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

למידע על פסיכומטרי  
 ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
 אל תתפשר עליה.**



8



ABCD כ"ת

$LK = x$  ס"מ

$EQ \perp LK$  } כ"ת  
 $EP \perp DC$  } ז-ש-א-ק

10

$\angle E = \angle E$  ( זווית משותפת )

$\angle L = \angle D$  ( זווית מתאימה )

$\Downarrow$

$\triangle ELK \sim \triangle EDC$

ש"ת משכ"ב זווית

$\Downarrow$

$$\frac{LK}{DC} = \frac{EQ}{EP}$$

יש הצט"ב  
יש הצט"ב  
במשולש זווית

$QP = AD = 6$

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.





$$\frac{x}{6} = \frac{EQ}{EQ+6}$$

$$6 \cdot EQ = x \cdot EQ + 6x$$

$$EQ(6-x) = 6x$$

$$EQ = \frac{6x}{6-x}$$

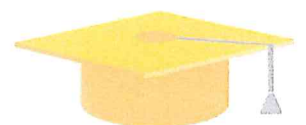
$$\textcircled{2} S_{ELK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6x}{6-x} \cdot x = \frac{3x^2}{6-x}$$

$$S_{DAL} + S_{CBK} = \frac{6 \cdot AL}{2} + \frac{6 \cdot KB}{2} = 3(AL + KB) =$$

$$= 3(6-x)$$

$$f(x) = \frac{3x^2}{6-x} + 3(6-x) \quad \min$$

$\leftarrow$   $x > 0$   
 $\rightarrow$  price



$$f'(x) = \frac{6x(6-x) - (-1) \cdot 3x^2}{(6-x)^2} - 3 = 0 \quad / \cdot (6-x)^2$$

$$36x - 6x^2 + 3x^2 - 3(6-x)^2 = 0$$

$$36x - 3x^2 - 3(36 - 12x + x^2) = 0 \quad / : 3$$

$$12x - x^2 - 36 + 12x - x^2 = 0$$

$$-2x^2 + 24x - 36 = 0 \quad / : (-2)$$

$$x^2 - 12x + 18 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 18}}{2} = \frac{12 \pm 6\sqrt{2}}{2} = 6 \pm 3\sqrt{2}$$

$$0 \leq x \leq 6 \quad \left( \begin{array}{l} \text{קטן מאונקן הביטוי} \\ \text{בכ"ב 1} \end{array} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$x = 6 - 3\sqrt{2} = 1.76$$

למידע על פסיכומטרי  
 ביואל גבע ←  
 כי האבנה  
 ח'ול'

$$f''(x) = -12x + 72$$

$$f''(1.76) = -12 \cdot 1.76 + 72 = 50.88 > 0$$

למידע על פסיכומטרי  
 ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**





עקוב  $x = 6 - 3\sqrt{2}$  סכום הסל'ם

סל'ם הסל'ם  $ADL$ ,  $BCK$ ,  $KLE$

הוא מ'ט'י.

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.

