

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשע"ח, 2018, מועד ב, שאלון: 35581
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

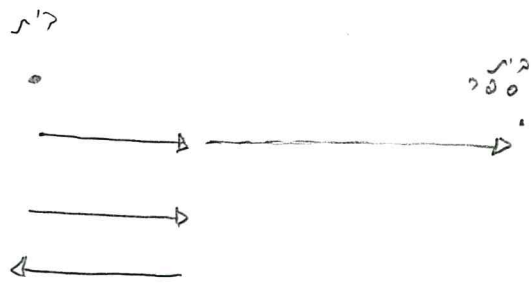
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. המרחק מביתה של רננה עד בית הספר הוא 500 מטרים.
 רננה יצאה מביתה אל בית הספר והלכה במהירות קבועה.
 3 דקות לאחר שיצאה מביתה, יצא משם אביה בעקבותיה כדי להביא לה כריך ששכחה. הוא רץ במהירות קבועה של 2.5 מטרים לשנייה.
 כאשר הגיע האב לרננה הם עמדו ושוחחו במשך 2 דקות והוא נתן לה את הכריך, ולאחר מכן הלך כל אחד מהם לדרכו – רננה לבית הספר והאב בחזרה אל הבית. רננה המשיכה ללכת באותה המהירות שהלכה לפני כן, והאב הלך במהירות של 1.5 מטרים לשנייה.
 אביה של רננה הגיע אל הבית בדיוק באותו הזמן שהגיעה רננה אל בית הספר.
 א. חשב את מהירות ההליכה של רננה.
 ב. כמה זמן עבר מן הרגע שרננה יצאה מביתה ועד שהגיעה אל בית הספר?

נתונים: מהירות האב היא רננה - x
 מהירות האב היא רננה + 2.5



זמן	מהירות	מרחק
3 דקות	x	x
2.5 (t-180)	2.5	2.5
500 - xt	x	x
xt	1.5	1.5

$$I: xt = 2.5(t-180) \quad \text{גשושית 3 דקות}$$

$$II: \frac{500-xt}{x} = \frac{xt}{1.5} \quad \text{גשושית 1.5}$$

$$I \rightarrow II: \frac{500 - 2.5(t-180)}{2.5(t-180)} = \frac{2.5(t-180)}{1.5}$$



$$750 - 3.75(t-180) = \frac{6.25(t-180)^2}{t}$$

$$750t - 3.75t(t-180) = 6.25(t^2 - 360t + 32400)$$

$$10t^2 - 3675t + 202500 = 0$$

$$t_1 = 300$$

$$t_2 = 67.5$$

t_2 (פסל)

$$t = 300$$

מכיוון שהקילו

$$t - 180$$

היה אפוא

$$300x = 2.5(300 - 180)$$

רצ"ב במסוואה \neq ונקודות:

$$\boxed{x = 1}$$

ק. (חזק את אמות האולטר, הלחנות של כננה, ונוסף את 2 בק' השיתה

$$120 + \frac{500 - xt}{x} + t = \text{הגון שאזר מהרצא שכלנה תצלה}$$

38 שהיזהר אל קיר הספר.

רצ"ב $t = 300$! $x = 1$

$$300 + \frac{500 - 300}{1} + 120$$

$$\boxed{620 \text{ ש"ח}}$$



2. הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n}$, $a_1 = -\frac{1}{c}$. נתון: $c > 0$.

- א. הוכח כי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות האי-זוגיים מהווים סדרה הנדסית, וכי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים גם הם סדרה הנדסית.
- ב. (1) רשום את 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n . הבע את תשובתך באמצעות c אם יש צורך.
 (2) הבע באמצעות c את סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n .
 (3) הוכח שלכל n טבעי, הסכום של $2n - 1$ האיברים הראשונים בסדרה a_n אינו תלוי ב- n .
- ג. הסדרה b_n מוגדרת באופן הזה: $b_n = -\frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$.
- (1) הראה כי b_n היא סדרה הנדסית.
 (2) מהו תחום הערכים של c שבעבורם b_n היא סדרה יורדת?
 (3) נתון שהסדרה האינסופית b_n היא סדרה יורדת. הבע באמצעות c את סכומה.



$$a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n}, \quad a_1 = -\frac{1}{c}, c > 0 \quad (2)$$

ל"3 (1)

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \text{מ"ק גז}$$

$$a_{n+2} = -\frac{c^{n+1-2}}{a_{n+1}} = -\frac{c^{n-1}}{-\frac{c^{n-2}}{a_n}} = \frac{a_n \cdot c^{n-1}}{c^{n-2}}$$

$$a_{n+2} = a_n \cdot c^{n-1-(n-2)}$$

$$a_{n+2} = a_n \cdot c$$

⇓

$$\boxed{\frac{a_{n+2}}{a_n} = c}$$

⇓

כל הא'ק'ים בסדרה a_n הנמצאים במקומות
הא'זוגיים מהווים סדרה הנדסית שמתחילה ב- c .
וכן הא'ק'ים הנמצאים במקומות הא'י-זוגיים
סדרה הנדסית שמתחילה ב- c .



$$a_1 = -\frac{1}{c} \quad \text{משווא}$$

(1) (2)

$$\Downarrow$$

$$a_3 = -\frac{1}{c} \cdot c = -1$$

$$a_5 = -1 \cdot c = -c$$

$$a_7 = -c \cdot c = -c^2$$

נ'ב'ג > ג'ב'ג

$$\underline{n=1} \quad a_2 = -\frac{c^{-1}}{a_1} = \frac{-\frac{1}{c}}{-\frac{1}{c}} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$a_4 = 1 \cdot c = c$$

$$a_6 = c \cdot c = c^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{-\frac{1}{c}, 1, -1, c, -c, c^2, -c^2}$$

$$S_7 = -\frac{1}{c} + 1 + (-1) + c + (-c) + c^2 + (-c^2) \quad (2)$$

$$\boxed{S_7 = -\frac{1}{c}}$$



(3) נא'מ ש-7 הא'בל'ם הראשונ'ם הם

$$-c^2, -c, 1, -1, c, -c^2, \dots$$

נסתכל על הא'בל'י הסג'נה אלא הא'בל' הראשון

נקרא: $1, -1, c, -c, c^2, -c^2, \dots$

הא'בל'ם במקומות הזוג'ים בסג'נה a_n

הם: $1, c, c^2, \dots$

הא'בל'ם במקומות הא'זוג'ים בסג'נה (a_n)

הם: $-1, -c, -c^2, \dots$

נפ'ל את a_{n-1} הא'בל'ם הראשונ'ם בסג'נה a_n

א'בל' הראשון הראשון בעכ'ז (1) - ו-ח א'בל'ם הנמצא'ם במקומות הזוג'ים (1) - ו-ח א'בל'ם הנמצא'ם במקומות הא'זוג'ים.

ק'ל לראות כי סכום כל שתי א'בל'ם סמוכ'ם

בסג'נה a_n (כ'כ ל a_1) הוא 0: $1+(-1)$

$c+(-c)$

$c^2+(-c^2)$

⋮

מכאן: $S_{2n-1} = a_1 = -\frac{1}{c}$



(3) ניתן לפתור את הסעיף (3)
הפוך אמרת (וסמנאלת יומה);

נשאל על סכומי חזקות:

א' ב' ס' מהכנה a_n במקומות א' ב' ס' (*)
ובמקומות א' ב' ס' (*)

$$a_1^* = a_2 = 1$$

$$a_1^\# = -\frac{1}{c}$$

$$q^* = c$$

$$q^\# = c$$

$$n^* = n - 1$$

$$n^\# = n$$

בסכום a_n e' a_{n-1} א' ב' ס'
"

ח א' ב' ס' במקומות א' ב' ס' *

ח-1 א' ב' ס' במקומות א' ב' ס' *



$$S_{2n-1} = S_n^* + S_{n-1}^*$$

$$S_{2n-1} = \frac{-\frac{1}{c}(c^n - 1)}{c - 1} + \frac{1(c^{n-1} - 1)}{c - 1} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{c}(c^n - 1) + \frac{c^n}{c} - 1}{c - 1} = \frac{-\frac{1}{c}(c^n - 1) + \frac{1}{c}(c^n - c)}{c - 1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{c}(-c^n + 1 + c^n - c)}{c - 1} = \frac{-\frac{1}{c}(c - 1)}{c - 1} = -\frac{1}{c}.$$



סכום a_{n-1} א'קלם בסדרה a_n
 א'נו מלוי ק-ח.



$$b_n = - \frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}} \quad (1)$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \text{מ'קוץ } (1)$$

$$b_{n+1} = - \frac{2}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{-2}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}}}{\frac{-2}{a_n \cdot a_{n+1}}} = \frac{a_n}{a_{n+2}} = \boxed{\frac{1}{c}}$$

\Downarrow
 b_n סדרה הנצט'ת ומ'תה $\frac{1}{c}$.

(2) הסדרה הנצט'ת יונכרת $0 < q < 1$

$$\Downarrow$$

$$0 < \frac{1}{c} < 1, \quad c > 0$$

$$\frac{1}{c} < 1$$

$$c > 1$$



$$b_1 = \frac{-2}{a_1 \cdot a_2} = \frac{-2}{-\frac{1}{c} \cdot 1} \quad (3)$$

$$b_1 = 2c$$

$$q = \frac{1}{c}$$

$$S = \frac{2c}{1 - \frac{1}{c}} = \frac{2c}{\frac{c-1}{c}} = \boxed{\frac{2c^2}{c-1}}$$





3. במבחן רב־ברירה ("אמריקני") יש 5 שאלות.
 לכל שאלה מוצגות 4 תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.
 התלמידים צריכים לסמן תשובה אחת מבין 4 התשובות המוצגות.
 תלמיד שמסמן את התשובה הנכונה על השאלה מקבל 20 נקודות לשאלה זו.
 תלמיד שמסמן תשובה לא נכונה על השאלה אינו מקבל נקודות לשאלה.
 כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 60 נקודות סך הכול.
- א. על 2 מן השאלות ידע שחר בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.
 בשאר השאלות הוא סימן באקראי תשובה אחת בכל שאלה.
 (1) מהי ההסתברות ששחר יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?
 (2) מהי ההסתברות ששחר יעבור את המבחן?
- ב. על 2 מן השאלות ידע דניאל בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.
 בכל אחת משלוש השאלות האחרות ידע דניאל בוודאות שתשובה אחת, מבין 4 התשובות המוצגות, אינה נכונה,
 ולכן סימן באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.
 מהי ההסתברות שדניאל יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?
- ג. על 3 מן השאלות ידעה הדס בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימנה אותן.
 בכל אחת משתי השאלות האחרות היא ידעה בוודאות ש- k מבין 4 התשובות המוצגות אינן נכונות, וסימנה
 באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.
 ידוע שההסתברות שהדס תצבור בדיוק 60 נקודות במבחן שווה להסתברות שהיא תצבור 100 נקודות במבחן.
 מצא את k . נמק.



3

סה"כ 5 שאלות.

מתוך 4 תשובות רק אחת נכונה
אם תלמי' בוחר תשובה באקראי;

ההסתברות לענות נכון היא $p = \frac{1}{4}$

כדי לעבור את המבחן על התלמי' לעבור לפחות
60 יקדויות ולכן עליו לענות נכון על 3 שאלות
לפחות.

א

נמנן שיתלמי' ענה נכון על 2 שאלות
ולכן כדי לעבור את המבחן, עליו לענות נכון
על שאלה אחת נוספת מתוך 3 שאלות.

$$P = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{27}{64}}$$

(2)

כדי ששני יעבור את המבחן
עליו לענות נכון לפחות על שאלה 1 מתוך 3.

$$P = \frac{27}{64} + \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \boxed{\frac{37}{64}}$$



7) צ'ינאן צנה נכון על 2 שאות. צ'ינאן יוצא הכי
 אחת מ 3 השאות הנוספות על תשובה אחת שבווצאות לא נבונה.
 ולכן צ'ינאן צריך לבחור בה שאלה כזו תשובה אחת נבונה
 מתוך 3 תשובות אפשריות. ולכן ההסתברות שהיא יבחר
 באקראי את התשובה הנכונה היא $\frac{1}{3}$.

$$P(\text{אצטווק בג'וק סטנק}) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{4}{9}}$$

8) הוצים בווצאות יוצה צ'ננות נכון על 3 שאות.
 על 2 השאות האחרות הוצים יוצה בווצאות k
 מתוך 4 תשובות לא נכונות. כלומר, עליה לבחור באופן
 אקראי תשובה 1 מתוך $4-k$ תשובות. ולכן ההסתברות
 שתצנה נכון על שאלה מסוים היא $\frac{1}{4-k}$.

מכיון שהוצים נכונים צ'ננות נכון על 3 שאות ובכך צ'ננות נכונה
 כל שצ'ננות הסופי יהיה סט נק, עליה לבחור נכון על 0 שאות
 נוספות. וכך יש מצביו 100 נק, עליה לבחור נכון על 2 שאות
 ההסתברות

$$1 - p = 1 - \frac{1}{4-k} = \frac{4-k-1}{4-k} = \frac{3-k}{4-k}$$

הוא נכון
 על שאותי כצ'ננות.



$$P\left(\begin{array}{c} 21230 \\ \text{ק' 60} \end{array}\right) = \binom{2}{0} \cdot \left(\frac{1}{4-k}\right)^0 \cdot \left(\frac{3-k}{4-k}\right)^2 = \left(\frac{3-k}{4-k}\right)^2$$

$$P\left(\begin{array}{c} 21230 \\ \text{ק' 100} \end{array}\right) = \binom{2}{2} \cdot \left(\frac{1}{4-k}\right)^2 \cdot \left(\frac{3-k}{4-k}\right)^0 = \left(\frac{1}{4-k}\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{3-k}{4-k}\right)^2 = \left(\frac{1}{4-k}\right)^2 \cdot (4-k)^2$$

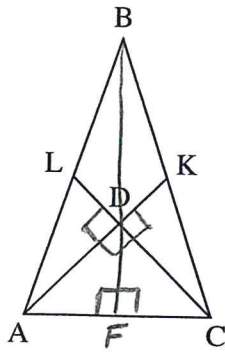
$$(3-k)^2 = 1$$

$$3-k > 0$$

$$3-k=1$$

$$\boxed{k=2}$$





4. ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = BC$).
 AK ו-CL הם תיכונים במשולש, החותכים זה את זה בנקודה D.

נתון: $AK \perp CL$.

א. הוכח: $BD = AC$.

ב. חשב את היחס $\frac{S_{BLDK}}{S_{\Delta ABC}}$.

ג. M הוא מרכז המעגל החוסם את המרובע ALKC.

(1) הוכח: $\angle AML = 90^\circ$.

(2) מצא את היחס $\frac{AM}{AD}$.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

נ"מ'ק	טענות
נתון	$AB = BC$ (1)
נתון	CL, AK תיכונים (2)
נתון	$AK \perp CL$ (3)
כ.ע	BF תיכון של AC (4) (עובר דרך D) (מכאן התיכונים)
ס'מ'ון	$DF = x$ (5)
מכאן התיכונים מתחלקים בחס 2:1 של 2:1. (הק"ע הארוך סמוך לקרקור)	$BD = 2DF = 2x$ (6)
ע"כ (3)	ΔADC ישר זווית (7)
ע"כ (4)	DF תיכון של AC ΔADC ? (8)
תיכון ע"כ שווה למחצית הישר (8) (7)	$AC = 2DF = 2x$ (9)





(י'אוק)

כלל מעבר (9) (6) נ.ש.ל.א'

קטע המתבר אמצעי של זבלעל

הוא קטע אמצעים (ע"ג הזווה) (2)

קטע אמצעים שווה למחצית הזבלעל

השליש (9) (11)

תיכון לבטס בנשול שווה לוק"מ

הוא גם זובה (1) (4)

קטע אמצעים מקביל לזבלעל השליש (11)

כלל מעבר (13) (14)

שטח מרובע שאלכסונו מאונכים שווה

למחצית מכלול האלכסונים (6) (12)

סכום קטעים (5) (6)

שמשולש ע"ג זבלעל וזובה לזבלעל

(5) (17)

חישוב אולגרי (16) (18) נ.ש.ל.ל'

קטע נ'ה

$AC = BD$ (10)

קטע LK אמצעים (11)

$LK = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$ (12)

$BF \perp AC$ (13)

$LK \parallel AC$ (14)

$LK \perp BD$ (15)

$S_{BLKD} = \frac{BD \cdot LK}{2}$ (16)

$= \frac{2x \cdot x}{2} = x^2$

$BF = BD + DF$ (17)

$S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BF}{2}$ (18)

$= \frac{2x \cdot 3x}{2} = 3x^2$

$\frac{S_{BLKD}}{S_{ABC}} = \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$ (19)



נימוק

טענה

נתון

תיכונים פרקיים במשולש שווה שוקיים
שווים זה לזה. (1) (2)

מפגש התיכונים מחלק את התיכונים ביחס
של 2:1 (21)

ע"כ (22) (3)

הישוב שווה במשולש LKA

מרכיבית הצלוע ב-2 משווה

היקפי ששטח א' אותה הקטן (24)
מ.ש. א' (1) (20)

סימון (20)

ע"כ פיתגורס? ΔALM (25) (26)

סימון

ע"כ (21) (22)

ע"כ פיתגורס ΔLDA (3) (28) (29) (27)

מ.ש. א' (2) (1)

(20) מ מרכז מעגל

ALKA

$LC=KA$ (21)

$LD=DK$ (22)

ΔLDK
שווה שוקיים וישר
שווה (23)

$\angle LKA=45^\circ$ (24)

$\angle LMA=2\angle LKA$
 $=90$ (25)

$LM=AM=R$ (26)

$LA=\sqrt{R^2+R^2}=R\sqrt{2}$ (27)

$LD=X$ (28)

$AD=2X$ (29)

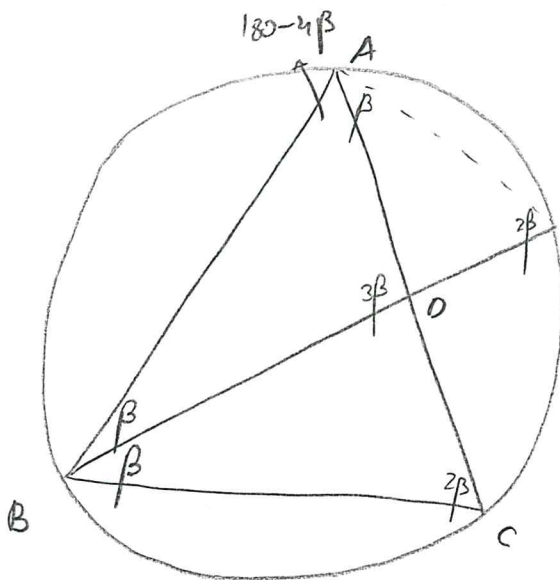
$(2X)^2+X^2=(R\sqrt{2})^2$ (30)

$5X^2=2R^2$

$\frac{\sqrt{10}}{4}=\frac{R}{2X}=\frac{AM}{AD}$



5. ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$).
 BD הוא חוצה זווית במשולש ABC.
 המשך הקטע BD חותך את המעגל החוסם את המשולש ABC בנקודה E.
 גודל הזווית ABC הוא 2β .
 א. הבע באמצעות β את $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$, היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש ADE.
 אין צורך לפשט את הביטוי שקיבלת.
 נתון: BE שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC.
 ב. חשב את היחס $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$.
 נסמן ב- a את אורך השוק AB.
 ג. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל החוסם על ידי המשולש ABC.
 בתשובותיך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.



105
 $\angle BAC = 180^\circ - 4\beta$
 לפי סכום זוויות ב- ΔABC
 $\angle ADB = 3\beta$
 ΔBDC זווית חיצונית
 $\angle CAE = \beta$, $\angle AEB = 2\beta$
 זוויות היקפיות הנשענות
 על קשתות שוות.

לפי משפט הסינוסים:
 נצביר: R רדיוס
 המעגל החוסם את
 ΔABC

$$\Delta ABE = \frac{AE}{\sin \beta} = 2R$$

$$AE = 2R \sin \beta$$

$$\Delta ABC: \frac{AB}{\sin 2\beta} = 2R$$

$$AB = 2R \cdot \sin 2\beta$$



$$\Delta ADE: \frac{AE}{\sin(180^\circ - 3\beta)} = \frac{AD}{\sin 2\beta}$$

אם AE קצר + \sin ארוך

$$AD = \frac{2R \sin 2\beta \cdot \sin \beta}{\sin 3\beta}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (2R \sin 2\beta)^2 \cdot \sin(180^\circ - 4\beta)}{\frac{1}{2} \cdot 2R \sin \beta \cdot \frac{2R \sin 2\beta \sin \beta}{\sin 3\beta} \cdot \sin \beta}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sin 4\beta \cdot \sin^2 3\beta \cdot 4R^2}{\frac{1}{2} \cdot \sin^3 \beta \cdot \sin 2\beta \cdot 4R^2} = \frac{\sin 4\beta \sin 3\beta \sin 2\beta}{\sin^3 \beta}$$

אם $\angle BAE = 180^\circ - 3\beta$ חזרו בוויית.

$\Delta ABE:$

$$\frac{BE}{\sin(180^\circ - 3\beta)} = 2R$$

אם יותין + להיות:

$$\frac{R}{\sin 3\beta} = 2R$$

$$\sin 3\beta = \frac{1}{2} \quad R \neq 0 \quad \text{אכיון } R \neq 0$$

$$3\beta = 30^\circ + 360^\circ$$

$$3\beta = 150^\circ + 360^\circ$$

$$\beta = 10^\circ + 120^\circ$$

$$\beta = 50^\circ + 120^\circ$$

אם $\angle BAE = 180^\circ - 3\beta$ חזרו בוויית. (היא צוויית קטנים במעלה)

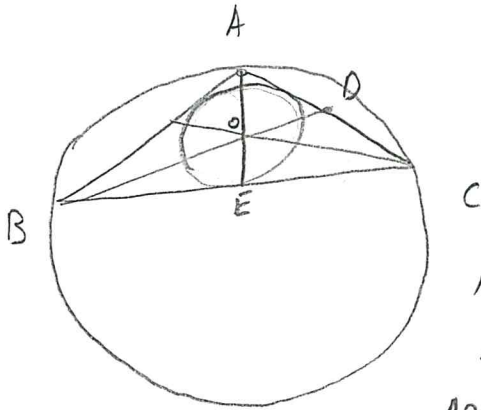
אם $\angle BAE = 180^\circ - 3\beta$ חזרו בוויית. (היא צוויית קטנים במעלה)



$\beta = 10^\circ$

נציג גודל מסתף א' ונקבל:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}} = \frac{\sin 40^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 20^\circ}{\sin 10^\circ} = \boxed{20.99}$$



ג. תהי' O נק' המרכז של המעגל החסום, במקרה זה AO היא חוצה זווית היא במשולש שווה שוקיים חוצה זווית היא גם גובה ואם תיכון ואם נמשך אל AO אז נק' E שהיא נק' החיתוך של המשך AO עם BC , נקבל ש AE היא חוצה זווית A של ΔABC .

המעגל החסום נקבע על ידי הנקודה E על BC , נקבל ש AE היא חוצה זווית A של ΔABC . AE היא חוצה זווית A של ΔABC וכן היא חוצה זווית A של ΔABC . AE היא חוצה זווית A של ΔABC וכן היא חוצה זווית A של ΔABC .

לפי המשולש

מטרתנו למצוא את OE , אך (נצו) תהיה את BE במשולש ΔABE זווית $\angle ABE$ זווית $\angle ABE = 20^\circ$ וכן $\beta = 10^\circ$ לפי חוקי זוויות.

$\Delta ABE: \cos 20^\circ = \frac{BE}{a} \rightarrow BE = a \cos 20^\circ$

$\Delta BOE: \tan 10^\circ = \frac{OE}{BE}$

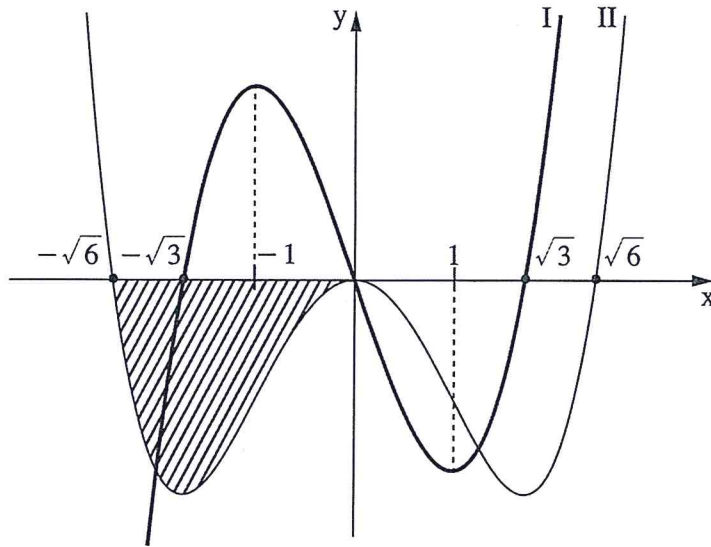
נציג את BE ונקבל:

$OE = a \tan 10^\circ \cdot \cos 20^\circ$

$OE = 0.165a =$ רציוס המעגל החסום



6. לפניך הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו- $f''(x)$ (פונקציית הנגזרת הראשונה ופונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$) בתחום $-2.5 \leq x \leq 2.5$. שני הגרפים עוברים בראשית הצירים.



- א. התאם בין הגרפים I ו-II ובין הפונקציות $f'(x)$ ו- $f''(x)$. נמק.
- ב. (1) כמה נקודות קיצון פנימיות יש לפונקציה $f(x)$ בתחום המתואר בגרף? נמק את תשובתך.
(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$ בתחום המתואר בגרף? נמק את תשובתך.
- ג. עבור איזה ערך של x בתחום $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ שיפוע המשיק לגרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, הוא מינימלי?
נתון: $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ה. נתון: ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה הוא t .
הבע באמצעות t את השטח המוגבל על ידי גרף II ועל ידי החלק השלילי של ציר ה- x (השטח המקווקו בציר).
- ו. נתון: קיימים a, b, c ממשיים כך ש- $f(x) = ax^5 + bx^3 + c$. מצא את c ואת היחס $\frac{a}{b}$.

10. על פי הדימויים ישנה הנמלה בין שיפועי x של נקודות היוליון של אזור II לשיפועי x של נקודות היוליון של ציר x של אזור I. לא דיילת הנמלה הפוכה בין האופיים.

$$\begin{aligned} c &= f'(-\pi) \\ c &= f'(-I) \end{aligned}$$



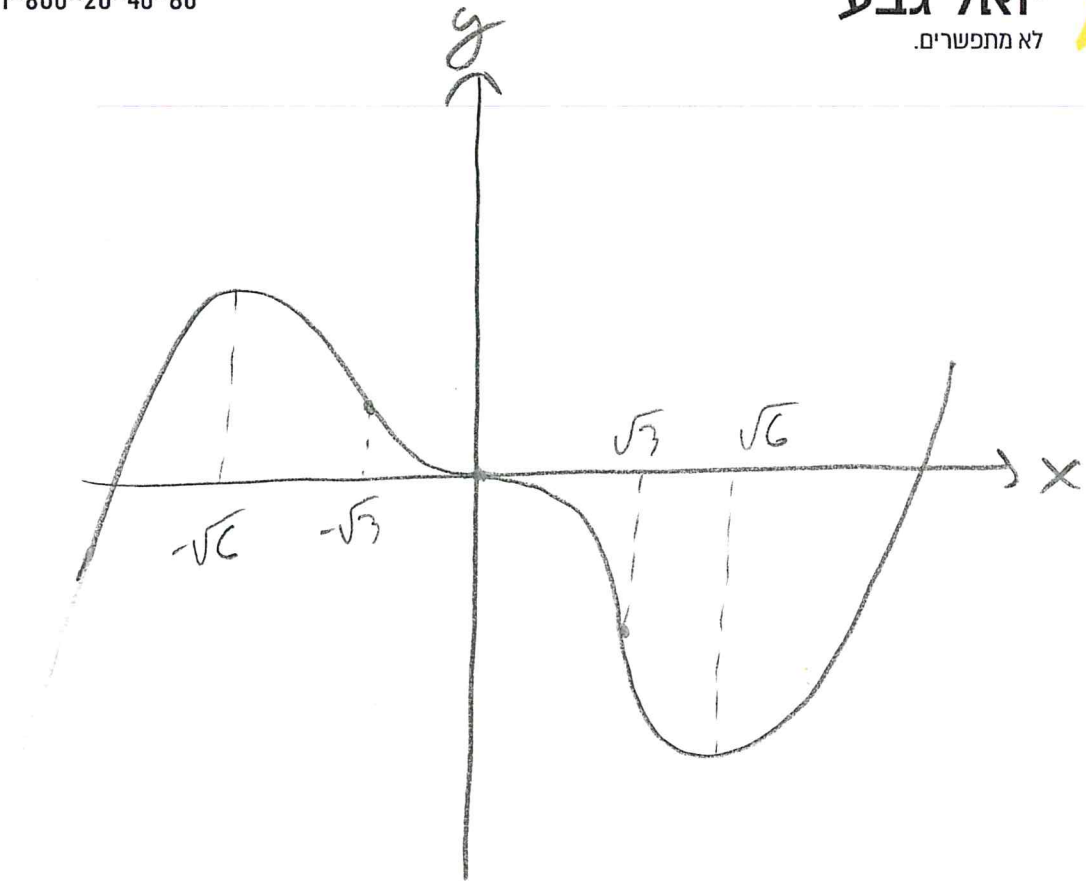
ד. (1) הגרף של $(x) f$ חותך את ציר ה- x , (נקודת חיתוך עם ציר ה- x היא נקודה שבה $f(x) = 0$)
 ולכן יש **שתי נקודות היציגן פנימיות** ל- $f(x)$.

(2) עמדה של $(x) f$ יש 3 נקודות היציגן, ואם כן **שלוש נקודות פיתול**.

ד. שיפוט המשקל של הנגזרת הוא הקצו של גוף הנגזרת השלילית בחומר המבודד הקצו האינפיניטלי של הנגזרת השלילית מהדף **$x=7$** .

3. נשים לב שד $x=0$ יש אפואקליה (נקודת פיתול) דהיינו שבה גם הנגזרת היא שווה לאפס.
 נתון שהפונקציה $(x) f$ איננה זוגית.
 נגזרת אבי הסעיפים הקודמים, נוכח **אם כן** גוף של הפונקציה $(x) f$:





$$S = \int_{-\sqrt{6}}^0 -f'(x) dx = \left[-f(x) \right]_{-\sqrt{6}}^0 \quad \cdot \text{ה}$$

$$= -f(0) - (-f(-\sqrt{6})) = f(-\sqrt{6}) - f(0) = \boxed{4}$$

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + c \quad \cdot \text{א}$$

$\boxed{c=0}$ הפונקציה עוברת בראשית, ולכן

כאשר נגזור ונציב $x = \sqrt{6}$:

$$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 \Rightarrow f'(\sqrt{6}) = 5a(\sqrt{6})^4 + 3b(\sqrt{6})^2$$

$$5a \cdot 36 + 3b \cdot 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = -\frac{1}{10}} \quad \text{ולכן:}$$



7. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ענה על הסעיפים ב-ה עבור התחום $x \geq \frac{2}{7}$.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית. מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענה על סעיף ו עבור התחום $x > 0$.

ו. נסתכל על נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

לפניך 3 טענות (i-iii). אחת מהן נכונה. איזו מהן היא הנכונה? נמק.

(i) ככל שמתקרבים ל- $x = 0$, המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וקטן.

(ii) המרחק בין כל שתי נקודות חיתוך סמוכות נשאר קבוע.

(iii) ככל שמתקרבים ל- $x = 0$, המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וגדל.



$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \quad (7)$$

תחום ההגדרה (L)

$$x \neq 0$$

נחוק: $x \geq \frac{2}{7}$

נתק חיתוך עם צ'כ ה X $\pi - k$

$$\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{x} = \pi k \quad | : \pi$$

$$\frac{1}{x} = k$$

$$x = \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{k} \geq \frac{2}{7}$$

$$\frac{7 - 2k}{7k} \geq 0$$

$$7k(7 - 2k) \geq 0$$

$k=0$ $k=3.5$

$k=1, 2, 3$

$x \geq \frac{2}{7}$



$k=1$

$x=1$

$(1, 0)$

$k=2$

$x = \frac{1}{2}$

$(\frac{1}{2}, 0)$

$k=3$

$x = \frac{1}{3}$

$(\frac{1}{3}, 0)$



(ג)

נק' ק' 13

$$f'(x) = -\frac{\pi}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

$$\swarrow$$

$$-\frac{\pi}{x^2} \neq 0$$

$$\searrow$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad | : \pi$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} + k$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1+2k}{2}$$

$$x = \frac{2}{1+2k}$$

$$x \geq \frac{2}{7}$$

$$\frac{2}{1+2k} \geq \frac{2}{7} \quad | : 2$$

$$\frac{1}{1+2k} - \frac{1}{7} \geq 0$$

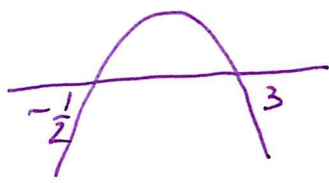
 \Leftrightarrow

$$7(7 - 1 - 2k)(1 + 2k) \geq 0$$

$$7(6 - 2k)(1 + 2k) \geq 0$$



$$k = 3 \quad k = -\frac{1}{2}$$



$$k = 0, 1, 2, 3$$

$$k = 0 \quad x = 2$$

$$k = 1 \quad x = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

$$k = 2 \quad x = \frac{2}{1+4} = \frac{2}{5}$$

$$k = 3 \quad x = \frac{2}{1+6} = \frac{2}{7}$$

$$f(2) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{3}}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{5}}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{2}{7}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{7}}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) = -1$$





$$f'(x) = -\frac{\pi}{x^2} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

לפנינו קבוצת הס'אן של f'' נמצא
 $\frac{\pi}{x^2} > 0$ עבור $x > 0$ בהשערה

לפנינו קבוצת הס'אן של f'' נמצא

$$\left(-\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)' = -\left(-\frac{\pi}{x^2}\right) \cdot \left(-\sin\frac{\pi}{x}\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{x^2} \sin\frac{\pi}{x}$$

$$f''(2) = -\frac{\pi}{2^2} \sin\frac{\pi}{2} < 0 \Rightarrow (2, 1) \max$$

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{\pi}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} \sin\frac{\pi}{\frac{2}{3}} > 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}, -1\right) \min$$

$$f''\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{\pi}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \sin\frac{\pi}{\frac{2}{5}} < 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}, 1\right) \max$$

⇓

$$\left(\frac{2}{7}, -1\right) \min$$

קצב



③ אם אלו ק"ת

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sin\left(\frac{\pi}{\infty}\right) \right] =$$

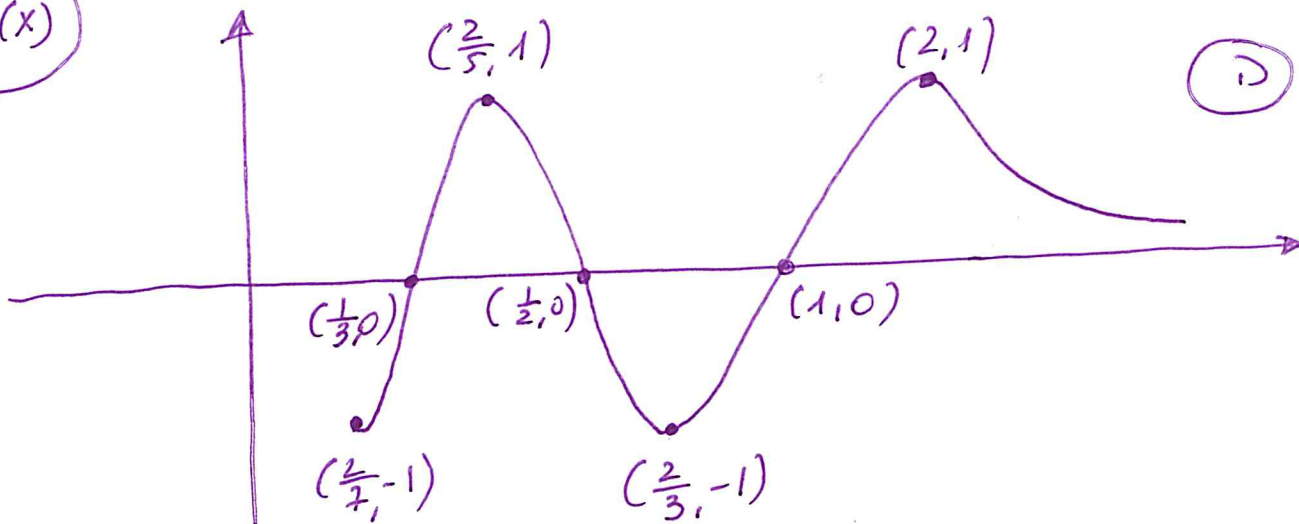
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [\sin 0] = 0$$

||

$$y = 0$$



$f(x)$



נתון: $x > 0$

עם סדר $>$ נק' מיתון עם צ'כ
ה x : $x = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$

שתי נק' מיתון סמוכות $(\frac{1}{k}, 0), (\frac{1}{k+1}, 0)$

המרחק בין שתי נק' הסמוכות

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

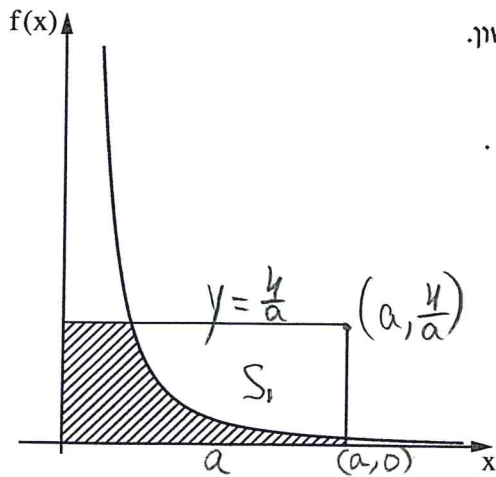
ככל k אצל הביטוי $\frac{1}{k(k+1)}$ קטן, כלומר

המרחק בין שתי נק' מיתון הסמוכות קטן יותר.



ומכיון ש $x = \frac{1}{k}$, ברוב שכל $k \in \mathbb{Z}$,
 היא יקטן ויתקרב ל-0.
 ומכיון כל שמתקבלים $x = (n, n+1)$ את x
 ומצדדים את k , היתחם בין שתי נק'
 ח'טון הסמוכות הולך וקטן.





8. בציר שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2}$ בתחום $x > 0$, ומלבן ששתיים מצלעותיו נמצאות על הצירים והוא נמצא ברביע הראשון. נתון: שטח המלבן הוא 4.
- נסמן ב- a את אורך צלע המלבן שנמצאת על ציר ה- x . נתון: $a \geq \frac{1}{4}$.
- א. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הצירים, על ידי צלעות המלבן ועל ידי גרף הפונקציה $f(x)$ (השטח המקווקו בציור).
- ב. עבור איזה ערך של a השטח שמצאת בסעיף א הוא מקסימלי?

א שטח המלבן הוא 4.
אורך צלע המלבן שנמצאת על ציר ה- x הוא $a = x$
נסיק שאורך צלע המלבן שנמצאת על ציר ה- y הוא $\frac{4}{a} = y$

נחשב את נקודת החיתוך בין הפונקציה

הישר $y = \frac{4}{a}$

$$\frac{4}{a} = \frac{1}{x^2} \rightarrow x^2 = \frac{a}{4} \rightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{a}}{2}} \quad x = \frac{-\sqrt{a}}{2} \text{ (נסר)}$$

נבטא כעת את השטח שבין הישר $y = \frac{4}{a}$

עכשיו הפונקציה ולתאר מכן נחסיר משטח

המלבן את השטח שמושב. נסמן את השטח המבוקש S_1

$$S_1 = \int_{\frac{\sqrt{a}}{2}}^a \left(\frac{4}{a} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int_{\frac{\sqrt{a}}{2}}^a \left(\frac{4}{a} - x^{-2} \right) dx = \left[\frac{4}{a} \cdot x - \frac{x^{-1}}{-1} \right]_{\frac{\sqrt{a}}{2}}^a$$



$$\left[\frac{4}{a}x + \frac{1}{x} \right]_{\frac{\sqrt{a}}{2}}^a = \left(\frac{4}{a} \cdot a + \frac{1}{a} \right) - \left(\frac{4}{a} \cdot \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{1}{\frac{\sqrt{a}}{2}} \right)$$

$$= \left(4 + \frac{1}{a} \right) - \left(\frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{a}} \right) = 4 + \frac{1}{a} - \frac{4}{\sqrt{a}}$$

$$S_{\text{בוקס}} = S_{\text{קו}} - S_{\text{עליון}} = 4 - \left(4 + \frac{1}{a} - \frac{4}{\sqrt{a}} \right) = \frac{4}{\sqrt{a}} - \frac{1}{a}$$

$$S_{\text{בוקס}} = \frac{4\sqrt{a} - 1}{a}$$

ק נגזיר כונת $g(a)$ שמשוואה של $S_{\text{בוקס}}$
 נסו f' קוצר. נחקור אותה בתחום $\frac{1}{4} \leq a$,
 ונמצא את הנקודות המוחלט שלה.

$$g(a) = \frac{4\sqrt{a} - 1}{a}$$

$$u = 4\sqrt{a} - 1 \quad u' = \frac{4}{2\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{a}}$$

$$v = a \quad v' = 1$$

$$g'(a) = \frac{\frac{2a}{\sqrt{a}} - [4\sqrt{a} - 1]}{a^2} = \frac{2\sqrt{a} - 4\sqrt{a} + 1}{a^2} = \frac{1 - 2\sqrt{a}}{a^2}$$



$$g'(a) = \frac{1 - 2\sqrt{a}}{a^2} = 0$$

$$1 - 2\sqrt{a} = 0$$

$$1 = 2\sqrt{a}$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{a}$$

$$\boxed{\frac{1}{4} = a}$$

a	$\frac{1}{4}$	$< a$
$g'(a)$	0	—
$g(a)$	max קצה	↘

$a = \frac{1}{4}$ הוא נקודת קיצון של a - הנקודה הנמוכה
 ולכן נקודת קיצון של $a = \frac{1}{4}$ הנקודה הנמוכה.

