פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשע"ח, 2018, מועד ב, שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

<u>סדרות</u>

1. נתונות שתי סדרות הנדסיות אין־סופיות, a_n ו־ b_n.
המנה של הסדרה a_n היא q, והמנה של הסדרה b_n היא $3q$.
נתון: $a_1 = b_1$.
נסמן את סכום איברי הסדרה a_n ב־ S ואת סכום איברי הסדרה b_n ב־ T (S ו־ T הם מספרים ממשיים).
נתון: $\frac{S}{T} = \frac{6}{7}$.
א. חשב את q.

נתון: $a_4 = 5$.
ב. חשב את b_4.

א) נתון כי S הוא סכום איברי הסדרה a_n.
נביע סכום זה באמצעות הנוסחה לסכום סדרה הנדסית אינסופית:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

נתון כי T הוא סכום איברי הסדרה b_n.
נביע סכום זה באמצעות הנוסחה לסכום סדרה הנדסית אינסופית:

$$T = \frac{b_1}{1-3q}$$

נתון גם כי: $\frac{S}{T} = \frac{6}{7}$ ולכן:

$$\frac{\frac{a_1}{1-q}}{\frac{b_1}{1-3q}} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{a_1}{1-q} \cdot \frac{1-3q}{b_1} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{a_1(1-3q)}{b_1(1-q)} = \frac{6}{7}$$

לפי הנתון: $a_1 = b_1$ ולכן:

$$\frac{a_1(1-3q)}{a_1(1-q)} = \frac{6}{7}$$

נצמצם ב- a_1:

$$\frac{1-3q}{1-q} = \frac{6}{7} \quad / \cdot 7(1-q)$$

$$7(1-3q) = 6(1-q)$$

$$7-21q = 6-6q$$

$$-15q = -1 \quad / : (-15)$$

$$\boxed{q = \frac{1}{15}}$$

(ב) נתון כי: $a_4 = 5$

לפי הנוסחה לאיבר כללי של סדרה הנדסית: $a_1 q^3 = 5$

נציב את ה- q שמצאנו בסעיף א': $a_1 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^3 = 5$

$$a_1 \cdot \frac{1}{3375} = 5 \quad / : \frac{1}{3375}$$

$$a_1 = 16,875$$

לפי הנתון: $a_1 = b_1$ ולכן: $b_1 = 16,875$

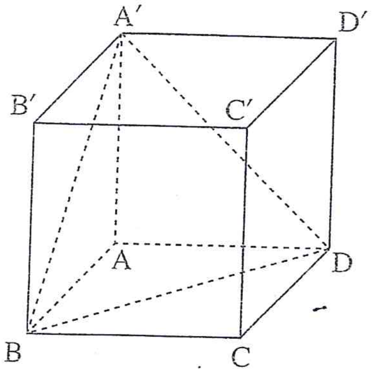
לפי הנוסחה לאיבר כללי של סדרה הנדסית: $b_4 = b_1 \cdot (3q)^3$

נציב את $q = \frac{1}{15}$ ואת $b_1 = 16,875$:

$$b_4 = 16,875 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{15}\right)^3$$

$$\boxed{b_4 = 135}$$

<u>טריגונומטריה במרחב</u>



2. $ABCDA'B'C'D'$ היא קובייה שאורך המקצוע שלה הוא a (ראה ציור).

א. הסבר מדוע המשולש $A'BD$ הוא משולש שווה צלעות.

$A'M$ הוא גובה במשולש $A'BD$.

ב. חשב את גודל הזווית בין $A'M$ ובין הפאה $ABCD$.

נתון: שטח המשולש $A'BD$ הוא $8\sqrt{3}$.

ג. (1) חשב את a.

(2) $AA'BD$ היא פירמידה. חשב את שטח הפנים שלה.

בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

(א) נתון כי אורך מקצוע הקובייה הוא a.
בקובייה כל המקצועות שווים זה לזה ולכן:

$$AB=AD=AA'=a$$

בנוסף, בקובייה כל המקצועות היוצאים מקודקוד מאונכים זה לזה ולכן: $\measuredangle BAD=\measuredangle BAA'=\measuredangle DAA'=90^\circ$

כלומר: $\Delta BAD\cong\Delta BAA'\cong\Delta DAA'$
לפי משפט חפיפה צלע-זווית-צלע.

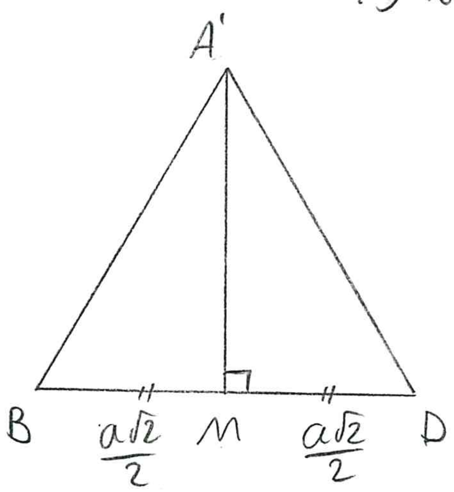
מכאן נובע ש: $BA'=DA'=BD$

לפי המשפט: צלעות מתאימות במשולשים חופפים שוות זו לזו.

$\boxed{\text{ולכן: } \Delta A'BD \text{ הוא שווה-צלעות.}}$

(ניתן היה גם להגיע אל הצלעות $A'D$, $A'B$ ו- BD באמצעות משפט פיתגורס)

(ב) נתבונן ב- $\Delta A'BD$ שהוא שווה צלעות:

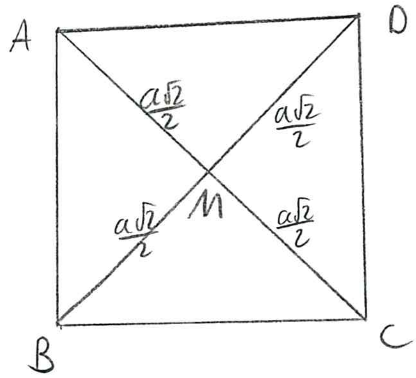


$A'M$ הוא גובה במשולש זה ולכן
הוא גם תיכון, כך ש:

$$BM = DM = \frac{1}{2}BD$$

אורך BD, שהוא אלכסון בריבוע
$ABCD$ הוא $a\sqrt{2}$ ולכן: $BM = DM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

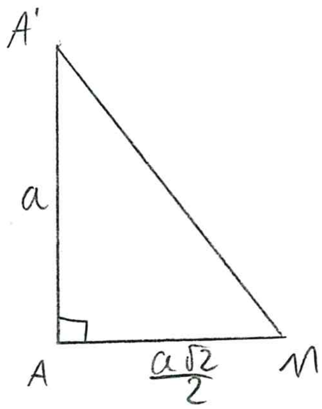
נתבונן בבסיס התחתון של התיבה $ABCD$ שהוא ריבוע:



כאמור M הוא אמצע BD
ולכן הוא נקודת מפגש האלכסונים.

בריבוע האלכסונים שווים וחוצים
זה את זה ולכן:

$$BM = DM = AM = CM = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



נתבונן ב- $\Delta A'AM$ שהוא ישר-זווית:
הזווית שבין $A'M$ לבסיס $ABCD$
היא הזווית $A'MA$.

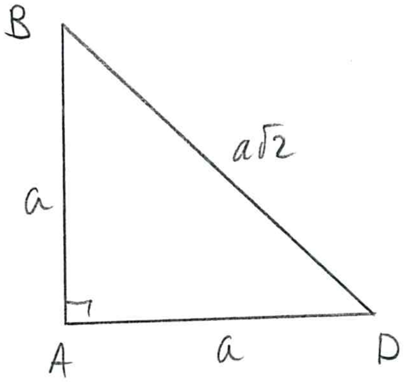
$$\tan\angle A'MA = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

$$\tan\sphericalangle A'MA = a \cdot \frac{2}{a\sqrt{2}}$$

$$\tan\sphericalangle A'MA = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\sphericalangle A'MA = 54.735^\circ}$$

ד) (1) נתבונן ב- ΔBAD שהוא ישר-זווית ושווה-שוקיים:



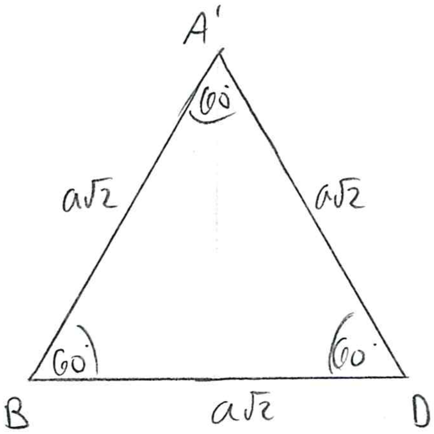
נחשב את BD באמצעות משפט פיתגורס:

$$BD^2 = a^2 + a^2$$

$$BD^2 = 2a^2 \quad /\sqrt{\ }$$

$$BD = a\sqrt{2}$$

ולכן: $A'B = A'D = BD = a\sqrt{2}$



נתבונן ב- $\Delta A'BD$ שהוא שווה-צלעות:

במשולש שווה-צלעות כל הזוויות שוות ל- 60° ולכן $\sphericalangle A' = \sphericalangle B = \sphericalangle D = 60^\circ$

נביע את שטח $\Delta A'BD$ באמצעות a:

$$S_{A'BD} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ}{2}$$

$$S_{A'BD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

לפי הנתון: $S_{A'BD}=8\sqrt{3}$

נשווה את השטח שהבענו לשטח הנתון:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$$

$$a^2=16\ /\sqrt{\ }$$

$$\boxed{a=4}$$

(2) $AA'BD$ היא פירמידה המורכבת מ-4 משולשים:

$\Delta A'AB$, $\Delta A'AD$, ΔBAD ו- $\Delta A'BD$.

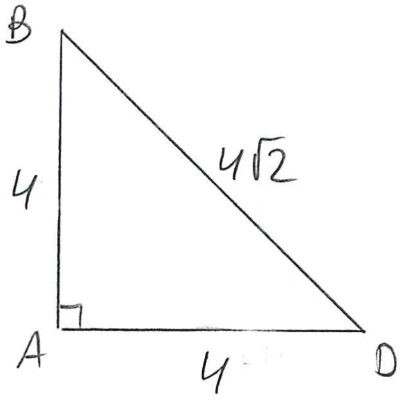
שטח הפנים של הפירמידה הוא סכום השטחים של ארבעת המשולשים הללו.

לפי הנתון: $S_{A'BD}=8\sqrt{3}$.

בסעיף א' הוכחנו כי: $\Delta BAD\cong\Delta A'AD\cong\Delta A'AB$

ולכן השטחים שלהם שווים, כלומר:

$$S_{BAD}=S_{A'AD}=S_{A'AB}$$



נתבונן ב- ΔBAD שהוא ישר-זווית:

נחשב את שטח המשולש:

$$S_{ABD}=\frac{4\cdot 4}{2}$$

$$S_{ABD}=8$$

ולכן:

$$S_{ABD}=S_{A'AD}=S_{A'AB}=8$$

נחשב את שטח הפנים של הפירמידה:

$$P_{A'ABD}=8+8+8+8\sqrt{3}$$

$$\boxed{P_{A'ABD}=24+8\sqrt{3}=37.856}$$

3. נתונה הפונקציה $f(x)=2\cdot\sin x+\cos(2x)$, המוגדרת בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

ענה על הסעיפים א-ב בעבור התחום הנתון.

א. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הישר $y=k$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון בנקודת המקסימום שלה.

ג. (1) מצא את k .

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־ y , על ידי הישר $y=k$ ועל ידי הישר $x=\frac{\pi}{2}$.

א.

על מנת למצוא את נקודות הקיצון נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת ל- 0 ;

$f'(x)=2\cos x-2\sin 2x$

$f'(x)=0$

$0=2\cos x-2\sin 2x$

$2\sin 2x=2\cos x \quad /:2$

$\sin 2x=\cos x$

$2\sin x\cos x-\cos x=0$

$\cos x(2\sin x-1)=0$

$\cos x=0$ $2\sin x-1=0$

$\cos x=\cos(\frac{\pi}{2})$ $\sin x=\frac{1}{2}$

$\sin x=\sin(\frac{\pi}{6})$

מציאת שיעורי ה- x התחום הנתון ;

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$

k	x
0	$\frac{\pi}{2}$ ✓
~~1~~	~~$\frac{5\pi}{2}$~~
~~-1~~	~~-1.5π~~

$\boxed{x=\frac{\pi}{2}}$

$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$

k	x
~~0~~	~~$-\frac{\pi}{2}$~~
~~1~~	~~1.5π~~
~~-1~~	~~-2.5π~~

$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$

k	x
0	$\frac{\pi}{6}$ ✓
~~1~~	~~$\frac{13\pi}{6}$~~
~~-1~~	~~$-\frac{11\pi}{6}$~~

$\boxed{x=\frac{\pi}{6}}$

$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$

k	x
~~0~~	~~$\frac{5\pi}{6}$~~
~~1~~	~~$\frac{17\pi}{6}$~~
~~-1~~	~~$-\frac{7\pi}{6}$~~

מציאת שיעורי ה-y של הנקודות החשובות לקיצון:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{6}, 1.5\right)$$

מציאת שיעור ה-y של קיצון הקצה:

$$f(0) = 2\sin(0) + \cos(2\cdot 0) = 1 \Rightarrow (0, 1)$$

x	0	$\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\pi}{2}$
y'		+	0	−	0
y	1	↗	1.5	↘	1

נציב ערכי בינוים בנגזרת על מנת למצוא את תחומי העליה והירידה:

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - 2\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right) = +$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right) = -$$

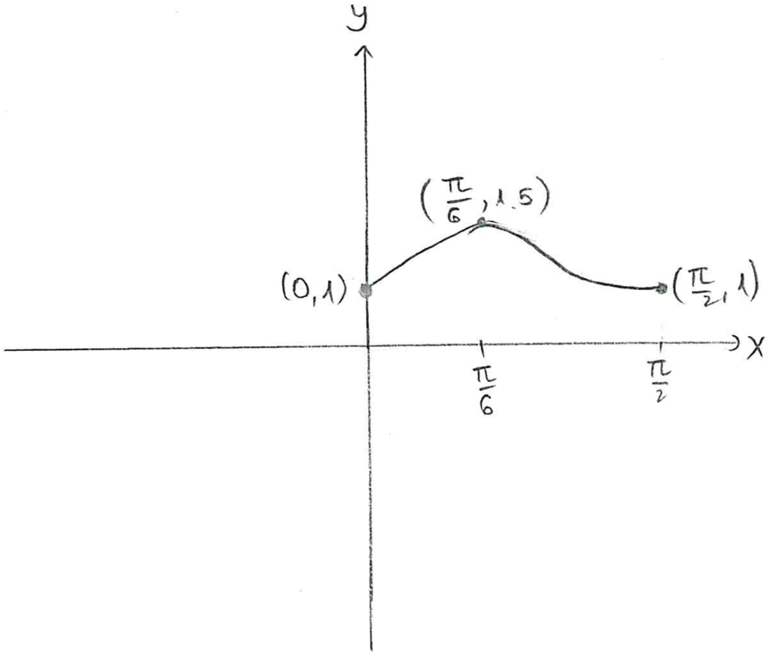
תשובה סופית:

$(0, 1)$ מינימום קצה

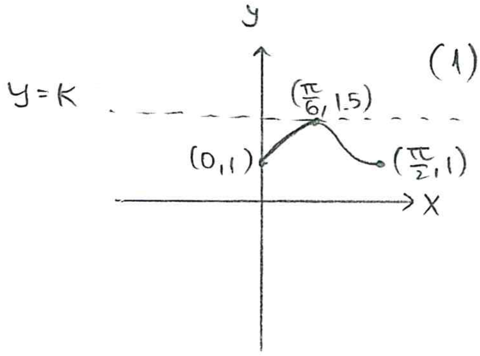
$\left(\frac{\pi}{6}, 1.5\right)$ מקסימום

$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ מינימום קצה

ב. סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$:

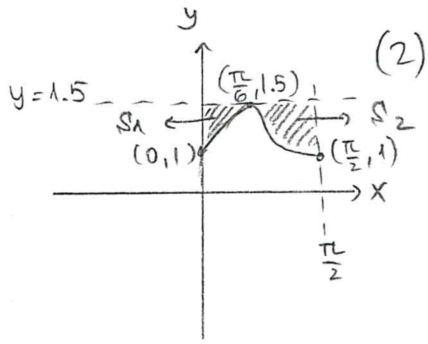


ג. (1)



הישר $y=K$ משיק לפונקציה בנקודת המקסימום שלה ולכן $y=1.5 \Leftarrow \boxed{K=1.5}$

(2)



השטח האפור שווה להפרש שבין המלבן שנוצר ע"י הצירים וע"י הישרים $y=1.5$, $x=\frac{\pi}{2}$, לבין השטח הלבן. לכן

$$S_{\square} = 1.5 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi$$ יח"ר

$$S_{\text{לבן}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x + \cos 2x)\,dx =$$

$$-2\cos x+\frac{\sin 2x}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$\underline{x=\frac{\pi}{2}}$: $-2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{2}=0$

$\underline{x=0}$: $-2\cos(0)+\frac{\sin(2\cdot 0)}{2}=-2$

$S_{\text{זמן}}=0-(-2)=2$ יח"ר

$S_{\text{מאופר}}=S_{\square}-S_{\text{זמן}}$

$S_{\text{מאופר}}=\frac{3}{4}\pi-2=\boxed{0.356 \text{ יח"ר}}$

4. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a-e^x}{e^{2x}}$. $a>0$ הוא פרמטר.

א. **(1)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

אם יש צורך, הבע באמצעות a .

נתון: גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בראשית הצירים.

ב. מצא את a .

הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. **(1)** מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g'(x)=f(x)$.

ד. מצא את שיעור ה־ x של נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגה.

א (1) תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא לכל x.
$(e^{2x}\neq 0)$.

(2) נקודות חיתוך עם ציר ה-y נציב $x=0$:

$$f(0)=\frac{a-e^0}{e^0}=\frac{a-1}{1}=a-1 \rightarrow \boxed{(0,\ a-1)}$$

נקודות חיתוך עם ציר ה-x נשווה ל $f(x)=0$:

$$\frac{a-e^x}{e^{2x}}=0 \rightarrow a-e^x=0 \rightarrow a=e^x$$

$$\ln a=\ln e^x$$

$$\ln a=x$$

$$\boxed{(\ln a,\ 0)}$$

ב) מהנתון כי הגרף עובר דרך ראשית הצירים: $f(0)=0$

$$0=\frac{a-e^0}{e^0} \rightarrow a-e^0=0 \rightarrow a-1=0 \rightarrow \boxed{a=1}$$

ג) (1) תנאי הכרחי לנקודת קיצון פנימית: $f'(x)=0$

$$f(x)=\frac{1-e^x}{e^{2x}}$$

$$f'(x)=\frac{-e^x\cdot e^{2x}-(1-e^x)\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x})^2}=$$

$$=\frac{-\cancel{e^{2x}}(e^x+2(1-e^x))}{(e^{2x})^{\cancel{2}}}=\frac{-(e^x+2-2e^x)}{e^{2x}}=$$

$$=\frac{-(2-e^x)}{e^{2x}}=\frac{e^x-2}{e^{2x}}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow e^x-2=0 \rightarrow e^x=2$$

$$\ln e^x=\ln 2$$

$$x=\ln 2$$

$$f(\ln 2)=\frac{1-e^{\ln 2}}{e^{2\ln 2}}=\frac{1-2}{4}=\frac{-1}{4} \rightarrow \left(\ln 2,-\frac{1}{4}\right)$$

נמצא את סוג הקיצון עפ"י טבלת ערכי הנגזרת הראשונה:

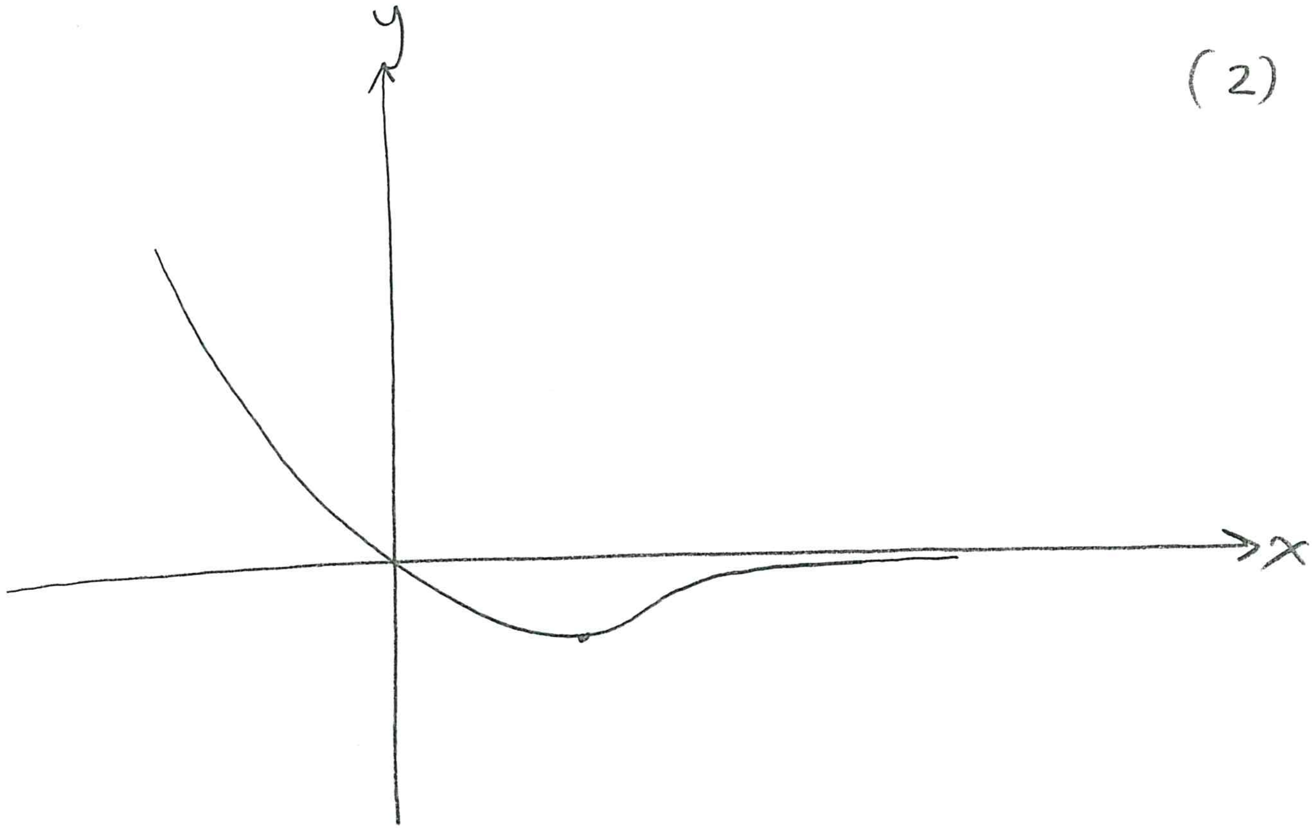
x	0	ln2	2
$f'(x)$	− יורדת	מינימום	+ עולה

$f'(0) = e^0 - 2 = -1 < 0 \rightarrow$ יורדת

$f'(2) = e^2 - 2 = 5.4 > 0 \rightarrow$ עולה

מינימום $\boxed{(\ln 2, -\frac{1}{4})}$

ג (2)



3. תנאי הכרחי לנקודת קיצון לפונקציה $g(x)$

הוא כי הנגזרת מתאפסת $g'(x)=0$

מכיוון שמתקיים $g'(x)=f(x)$

נבדוק את הנקודה בעבורה $f(x)=0$

מהסעיפים הקודמים: $f(x)=0$ כאשר $x=0$

נבדוק את סוג הקיצון עפ"י טבלת עליה וירידה:

	-1	0	1
$g'(x)=f(x)$	+ עליה	מקסימום	− ירידה

מהגרף שציירנו בסעיף ב-(2):

$$g'(-1)=f(-1)>0$$
$$g'(1)=f(1)<0$$

לכן בעבור $x=0$ נקבל נקודת מקסימום.

5. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\ln(x^2)}{x^2}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואת האסימפטוטה האנכית של הפונקציה $f(x)$.

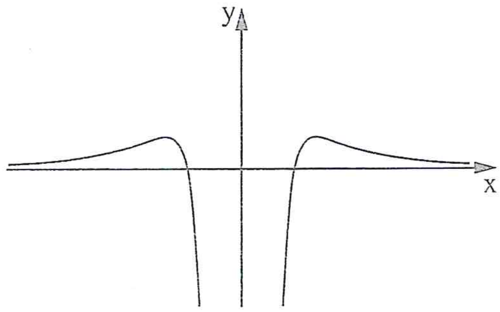
(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

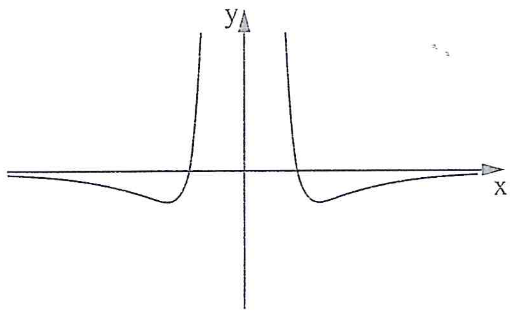
(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(6) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

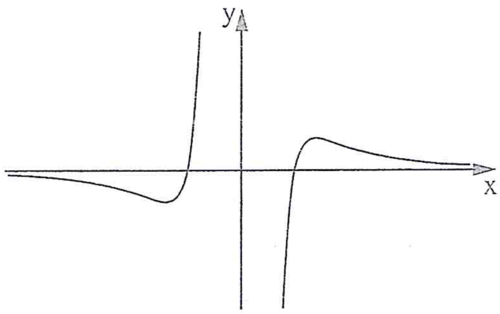
ב. לפניך ארבעה גרפים (I-IV). איזה מהם הוא הגרף של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$? נמק.



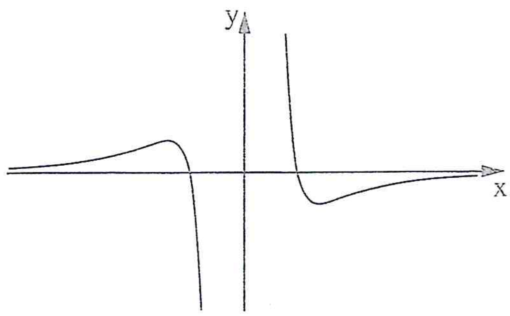
I



II



III



IV

ד (1) מכנה שונה מאפס : $x^2 \neq 0$
תוכן הלוג חיובי : $x^2 > 0$

מכאן $\boxed{\text{תחום ההגדרה הוא } x \neq 0}$

(2) $\boxed{x=0}$ - אסימפטוטה אנכית לפונקציה $f(x)$.

(3) לנקודת חיתוך עם ציר האנכי נציב $x=0$
אך $x=0$ מחוץ לתחום ההגדרה ולכן
$\boxed{\text{אין נקודת חיתוך עם ציר האנכי.}}$

לנקודת החיתוך עם ציר האופקי נציב $f(x)=0$

$$\frac{\ln(x^2)}{x^2}=0 \rightarrow \ln(x^2)=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$$

$$\boxed{(1,0),\ (-1,0)}$$

(4) תנאי הכרחי לנקודת קיצון פנימית : $f'(x)=0$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2}\cdot x^2 - \ln(x^2)\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{2x(1-\ln(x^2))}{x^4} =$$

$$= \frac{2(1-\ln(x^2))}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow 1-\ln(x^2)=0$$

$$\ln(x^2) = 1$$

$$x^2 = e \rightarrow x = \pm\sqrt{e}$$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

$$f(-\sqrt{e}) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

$\rightarrow$ $(\sqrt{e}, \frac{1}{e})$, $(-\sqrt{e}, \frac{1}{e})$

נמצא את סוג הקיצון עפ"י טבלת הנגזרת הראשונה

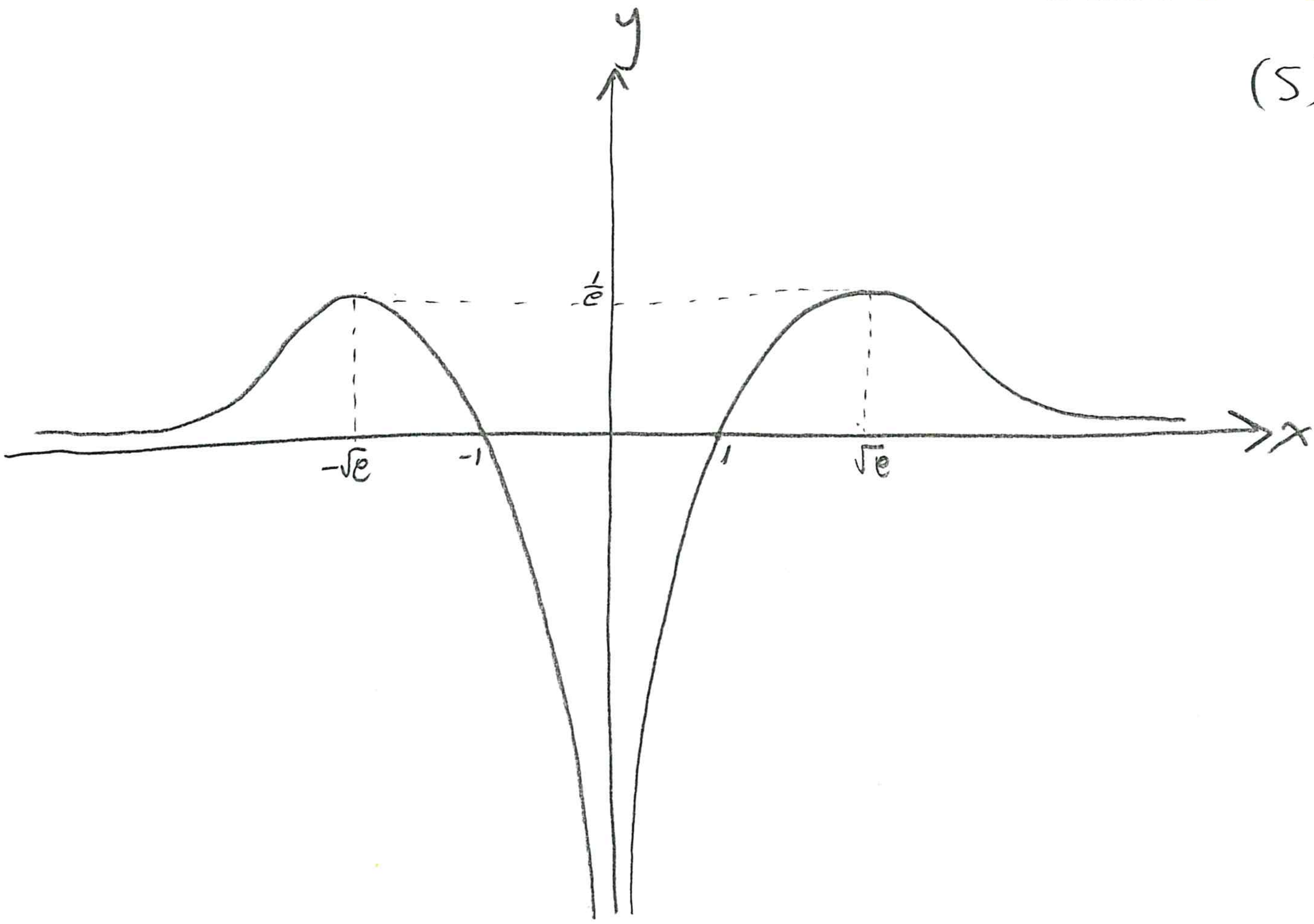
x	-2	$-\sqrt{e}$	-1	0	1	$\sqrt{e}$	2
$f'(x)$	$+$	מקסימום	$-$		$+$	מקסימום	$-$

$f'(-2)>0$, $f'(1)>0$

$f'(-1)<0$, $f'(2)<0$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (-\sqrt{e}, \frac{1}{e}) & \text{מקסימום} \\ (\sqrt{e}, \frac{1}{e}) & \text{מקסימום} \end{array}}$$

(5)



(6) מהשרטוט ונקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים

תחום חיוביות של הפונקציה: $x>1$, $x<-1$

תחום שליליות של הפונקציה: $0<x<1$

$-1<x<0$

ב) כאשר $f(x)$ עולה, $f'(x)$ חיובית

מהשרטוט שבסעיף א-5, תחום העליה של $f(x)$

הוא בערך $0<x<\sqrt{e}$, $x<-\sqrt{e}$

ולכן בתחומים אלה גרף הנגזרת $f'(x)$ חיובי.

רק גרף IV מקיים תנאי זה

ולכן $\boxed{\text{גרף IV הוא גרף הנגזרת } f'(x)}$