פתרון הבחינה
במתמטיקה

קיץ תשע"ח, 2018, שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

סדרות

1. הסדרה a_n מוגדרת באופן הזה: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 3$.

הסדרה b_n מוגדרת על ידי הכלל: $b_n = a_n + a_{n+1}$.

א. (1) הוכח: $b_n = 2a_n + 3$.

(2) הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית, ומצא את ההפרש שלה ואת b_1 .

נתון: $b_1 + b_m = 120$.

ב. (1) חשב את m .

(2) חשב את הסכום: $b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots + b_{2m}$

(סכום האיברים בסדרה b_n החל מהאיבר b_{m+1} ועד האיבר b_{2m} , כולל).

א. (1) נתון כי $b_n = a_n + a_{n+1}$

נציב את כלל הנסיגה הנתון של הסדרה a_n:

$b_n = a_n + a_n + 3$

$\boxed{b_n = 2a_n + 3}$

(2) על-מנת להוכיח כי הסדרה b_n היא חשבונית

נראה שההפרש $b_{n+1} - b_n$ הוא קבוע.

ראשית נציב את b_{n+1} באמצעות הצבת $n+1$

בנוסחה ל-b_n שמצאנו בסעיף א.(1):

$b_{n+1} = 2a_{n+1} + 3$

כעת נציב ב a_{n+1} את כלל הנסיגה הנתון:

$b_{n+1} = 2(a_n + 3) + 3$

$b_{n+1} = 2a_n + 6 + 3$

$b_{n+1} = 2a_n + 9$

כעת נמצא את ההפרש $b_{n+1} - b_n$:

$b_{n+1} - b_n \Rightarrow 2a_n + 9 - (2a_n + 3) \Rightarrow 2a_n + 9 - 2a_n - 3 \Rightarrow 6$

מצאנו שההפרש בין כל שני איברים סמוכים כלל"ס
בסדרה b_n הינו קבוע ושווה ל-6 ולכן הסדרה b_n
הינה סדרה חשבונית שהפרשה הוא 6.

כעת נמצא את b_1 על-ידי הצבת $n=1$
בנוסחה שמצאנו בסעיף א.(1):

$b_1 = 2a_1 + 3$

נתון כי $a_1 = 0$ ולכן:

$b_1 = 2 \cdot 0 + 3$

$\boxed{b_1 = 3}$

ב. (1) ראשית, נביע את b_m באמצעות הנוסחה לאיבר כללי של סדרה חשבונית:

$$b_m = 3 + (m-1)\cdot 6$$

$$b_m = 3 + 6m - 6$$

$$b_m = 6m - 3$$

כעת, נציב את b_m שמצאנו ואת b_1 מסעיף א. (2) בנתון:

$$3 + 6m - 3 = 120$$

$$6m = 120$$

$$\boxed{m = 20}$$

ב. (2) נציב את ה-m שמצאנו בסעיף ב. (1) בסכום המבוקש ונקבל:

$$b_{21} + b_{22} + \ldots + b_{40}$$

נמצא את b_{21} לפי הנוסחה לאיבר כללי של סדרה חשבונית:

$$b_{21} = 3 + (21-1)\cdot 6$$

$$b_{21} = 123$$

ניתן לראות כי מספר המחוברים בין האיבר b_{21} לאיבר b_{40} הוא 20.

נציב בנוסחה לסכום סדרה חשבונית:

$$S_{20} = [2\cdot 123 + (20-1)\cdot 6]\cdot\frac{20}{2}$$

$$\boxed{S_{20} = 3600}$$

2. ABCDE היא פירמידה ישרה שבסיסה הוא ריבוע, כמתואר בציור.

נתון: EM הוא גובה של הפירמידה, והוא שווה באורכו לאלכסון הבסיס.

נסמן: $AB = a$.

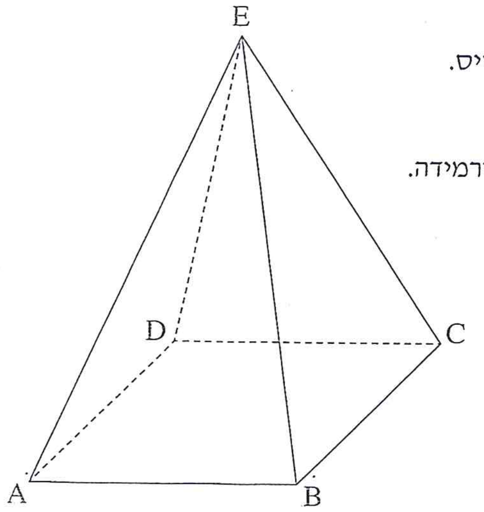
א. חשב את גודל הזווית בין מקצוע צדדי בפירמידה ובין בסיס הפירמידה.

EK הוא גובה בפאה צדדית של הפירמידה.

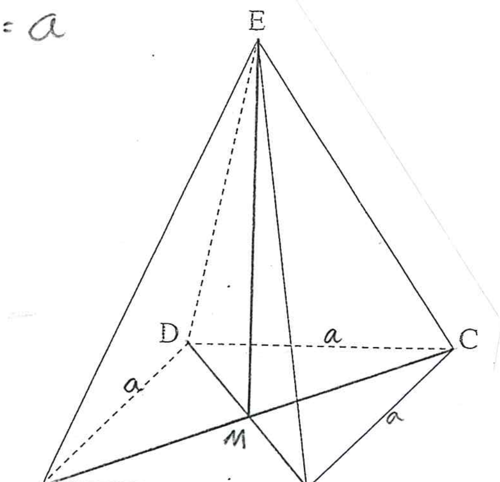
ב. חשב את גודל הזווית בין EK ובין בסיס הפירמידה.

ג. נתון: שטח המעטפת של הפירמידה הוא 36.75 סמ"ר.

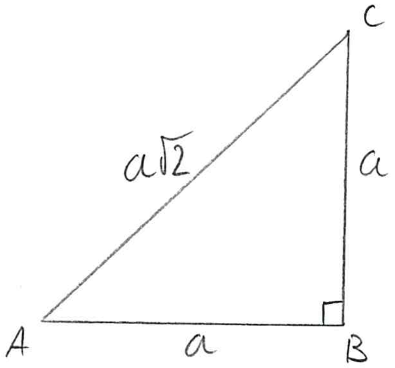
חשב את a .



נוסיף לשרטוט את EM, גובה הפירמידה ואת AC ו- BD,
אלכסוני הבסיס.
בפירמידה ישרה שבסיסה ריבוע, גובה הפירמידה חותך את
הבסיס בנקודת מפגש האלכסונים.
נתון כי גובה הפירמידה שווה באורכו לאלכסון הבסיס.
כמו-כן, בריבוע האלכסונים שווים, ולכן: $EM = AC = BD$.
נתון כי: $AB = a$. בריבוע כל הצלעות שוות ולכן:
$AB = BC = CD = AD = a$



נתבונן במשולש ABC שהוא ישר-זווית ושווה-שוקיים:



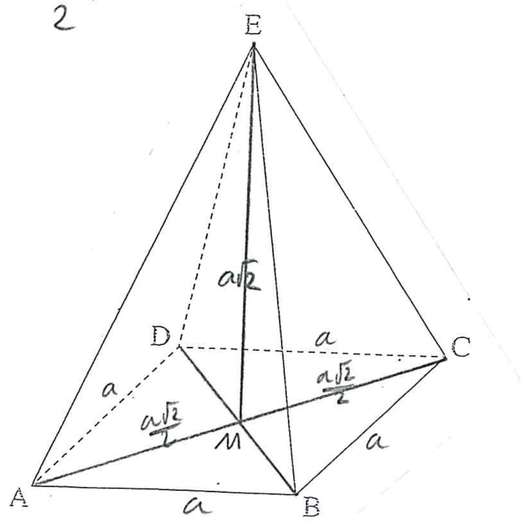
נמצא את אורך היתר, AC, באמצעות משפט פיתגורס:

$$AC^2=a^2+a^2$$
$$AC^2=2a^2$$
$$AC=a\sqrt{2}$$

כלומר: $EM=AC=BD=a\sqrt{2}$.

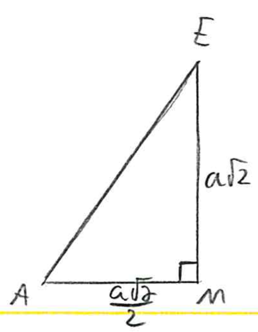
האלכסונים בריבוע חוצים זה את זה, ולכן:

$$AM=CM=DM=BM=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$



א. הזווית שבין מקצוע צדדי בפירמידה לבין בסיס הפירמידה, היא הזווית EAM.

נתבונן במשולש EAM שהוא ישר-זווית:



נחשב את הזווית EAM באמצעות tan:

$$\tan\angle EAM = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

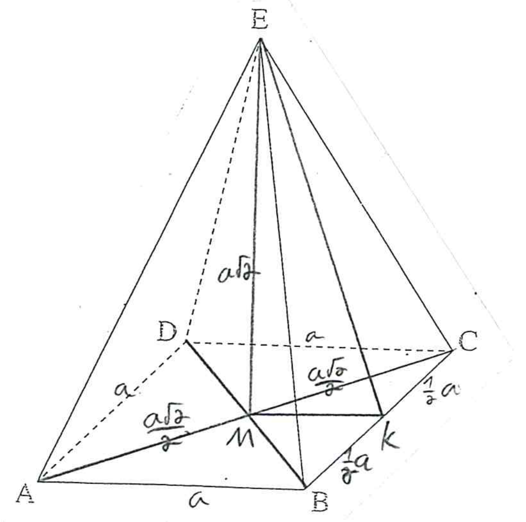
$$\tan\angle EAM = \frac{2a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}$$

$$\tan\angle EAM = 2$$

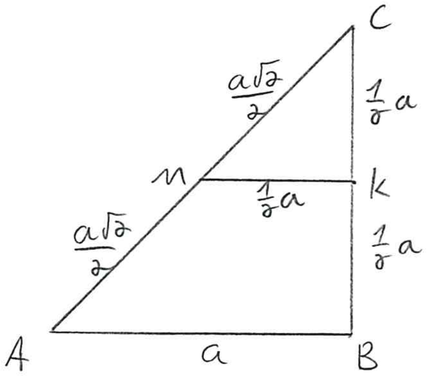
$$\boxed{\angle EAM = 63.435^\circ}$$

ה. נתון ש Ek הוא גובה בפאה צדדית של הפירמידה.
הפירמידה ישרה כל המקצועות הצדדיים שווים ולכן כל אחת מהפאות היא משולש שווה-שוקיים.

Ek הוא גובה במשולש שווה שוקיים ולכן הוא גם תיכון.
כלומר: $Bk = Ck = \frac{1}{2}a$.



נתבונן במשולש ABC שהוא ישר זווית ושווה שוקיים:

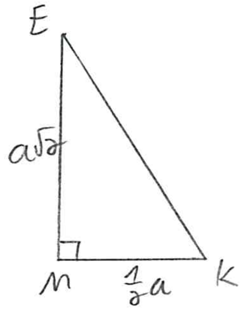


MK הוא קטע אמצעים במשולש זה

לכן שווה לחצי מ- AB,

כלומר: $MK=\frac{1}{2}a$.

הזווית שבין EK ובין בסיס הפירמידה היא הזווית EKM. נתבונן במשולש EMK שהוא ישר-זווית:



נחשב את הזווית באמצעות tan:

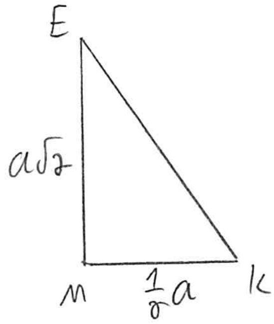
$$\tan\angle EKM=\frac{a\sqrt{2}}{\frac{1}{2}a}$$

$$\tan\angle EKM=2\sqrt{2}$$

$$\boxed{\angle EKM=70.529^\circ}$$

ב. שטח המעטפת של הפירמידה הוא סכום השטחים של ארבעת הפאות הצדדיות.

מכיוון שבסיס הפירמידה הוא ריבוע, כל ארבעת השטחים שווים ולכן נחשב את השטח של אחת הפאות ונכפול פי 4.



נתבונן במשולש EMK שהוא ישר-זווית:

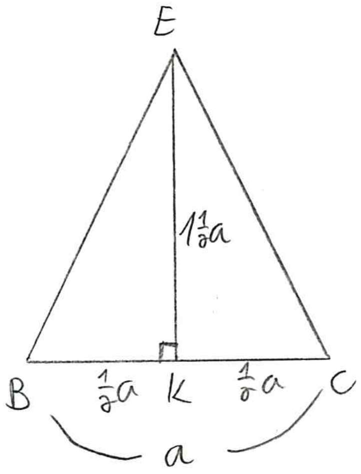
נגיע אל EK באמצעות משפט פיתגורס:

$$EK^2 = (a\sqrt{2})^2 + (\tfrac{1}{2}a)^2$$

$$EK^2 = 2a^2 + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$EK^2 = 2\tfrac{1}{4}a^2$$

$$EK = 1\tfrac{1}{2}a$$



כעת נתבונן במשולש EBC, שהוא שווה-שוקיים:

נגיע את שטח המשולש:

$$S_{EBC} = \frac{1\frac{1}{2}a \cdot a}{2}$$

$$S_{EBC} = \frac{3}{4}a^2$$

כעת נגיע את שטח המעטפת של הפירמידה:

$$M_{EABCD} = 4 \cdot \frac{3}{4}a^2$$

$$M_{EABCD} = 3a^2$$

נתון כי שטח המעטפת של הפירמידה הוא 36.75 סמ"ר.

נשווה את השטח שהבענו לנתון:

$$3a^2 = 36.75$$

$$a^2 = 12\frac{1}{4}$$

$$\boxed{a = 3\frac{1}{2} \text{ ס"מ}}$$

3. הפונקציה $f'(x) = 2\sin 2x$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

ענה על הסעיפים א-ה בעבור התחום $0 \le x \le \pi$.

א. מצא את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בנקודה $(0, -2)$.

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הישר $x = \pi$, על ידי ציר ה־ y ועל ידי ציר ה־ x .

א. נמצא נק' קיצון ← נפתור משוואה: $f'(x)=0$

$0 = 2\sin 2x$

$\sin 2x = 0$

$2x = \pi k \quad /:2$

$x = \frac{\pi k}{2}$ הפתרון הכללי:

ובתחום הנתון:

$x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$

נקבע את סוג הנק' בעזרת טבלה:

x	0	$x=\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$x=\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f'(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} > 0$

$f'(\frac{2\pi}{3}) = -3 < 0$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{r}{\text{שיעורי נק' הקיצון:}} \\ x=0 & x=\frac{\pi}{2} & x=\pi \\ \text{min} & \text{max} & \text{min} \\ \text{קצה} & & \text{קצה} \end{array}}$$

ב. מציאת הפונקציה $f(x)$:

נבצע אינטגרל לאיברים לנגזרת $f'(x)$:

$$f(x)=\int 2\sin 2x\,dx$$

$$f(x)=\frac{-2\cos 2x}{2}+c$$

$$f(x)=-\cos 2x+c$$

על מנת למצוא את הקבוע c נציב את שיעורי הנק' הנתונה $(0,-2)$

$$-2=-\cos(2\cdot 0)+c$$

$$c=-1$$

לכן הפונקציה $f(x)$ היא:

$$\boxed{f(x)=-\cos 2x-1}$$

ג. שיעורי נק' חיתוך עם ציר x ← נציב $f(x)=0$

$$0=-\cos 2x-1$$

$$\cos 2x=-1$$

$$2x=\pi+2\pi k \quad /:2$$

הפתרון הכללי: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

הפתרון בתחום הנתון $x=\frac{\pi}{2}$

נקודת החיתוך היא $\boxed{\left(\frac{\pi}{2},0\right)}$

3. סרטוט גרף הפונקציה:

נתונים לנו הנק' $(0,-2)$, $(\frac{\pi}{2},0)$

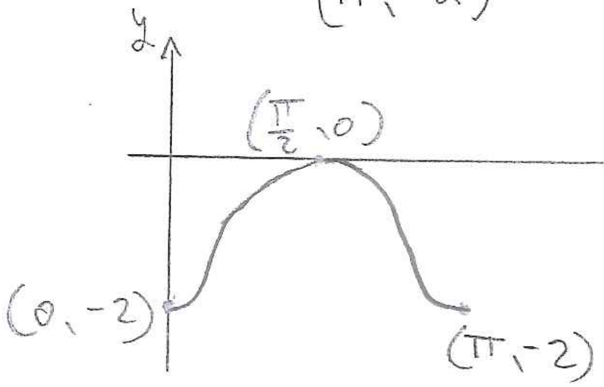
נמצא את שיעור y בנק' הקצה בה $x=\pi$

ע"י הצבה בפונקציה:

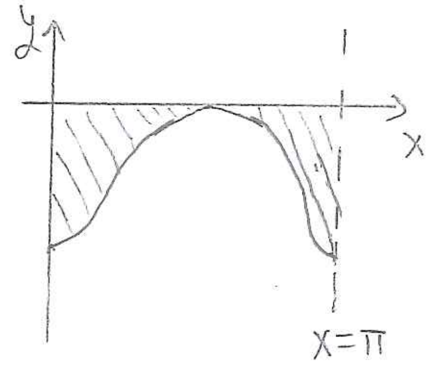
$$f(\pi)=-\cos(2\pi)-1$$

$$f(\pi)=-2$$

נק' קצה $(\pi,-2)$



ה. נסרטט את השטח המבוקש:



נחשב בעזרת אינטגרל

$$\int_0^{\pi}\left[0-(-\cos 2x-1)\right]dx=\int_0^{\pi}(\cos 2x+1)\,dx$$

$$\left[\frac{\sin 2x}{2}+x\right]_0^{\pi}$$

$$\left[\frac{\sin 2\pi}{2}+\pi\right]-\left[\frac{\sin 2\cdot 0}{2}+0\right]$$

$$\boxed{S=\pi}$$
יח"ר

4. נתונה הפונקציה $f(x) = ae^x - 9e^{-x}$. a הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = \ln 3$ הוא 6 .

ב. מצא את a . פרט את חישוביך.

הצב $a = 1$ וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים.

א. תחום ההגדרה: $\boxed{\text{כל } x}$

ב. $f'(\ln 3) = 6$

$f'(x) = a \cdot e^x - 9 \cdot e^{-x} \cdot (-1)$

$f'(x) = a \cdot e^x + 9 \cdot e^{-x}$

$f'(\ln 3) = a \cdot e^{\ln 3} + 9 \cdot e^{-\ln 3}$

$f'(\ln 3) = 3a + 3$

$3a + 3 = 6$

$3a = 3$

$\boxed{a = 1}$

ג. $f(x) = e^x - 9e^{-x}$

(1) חיתוך עם ציר x :

$e^x - 9 \cdot e^{-x} = 0$

$e^x - \frac{9}{e^x} = 0 \quad / \cdot e^x$

$(e^x)^2 - 9 = 0$

$(e^x)^2 = 9 \quad / \sqrt{\ }$

$e^x = 3 \qquad \cancel{e^x = -3}$

$e^x = 3$

$x = \ln 3$

$\boxed{(\ln 3, 0)}$

חיתוך עם ציר y :

$f(0) = e^0 - 9 \cdot e^{-0}$

$f(0) = -8$

$\boxed{(0, -8)}$

(2) $f'(x) = e^x + 9e^{-x}$

$f'(x) = 0$

$e^x + 9e^{-x} = 0$

$e^x + \frac{9}{e^x} = 0$

$(e^x)^2 + 9 = 0$

$(e^x)^2 = -9$

אין פתרון - אין נקודות קיצון.

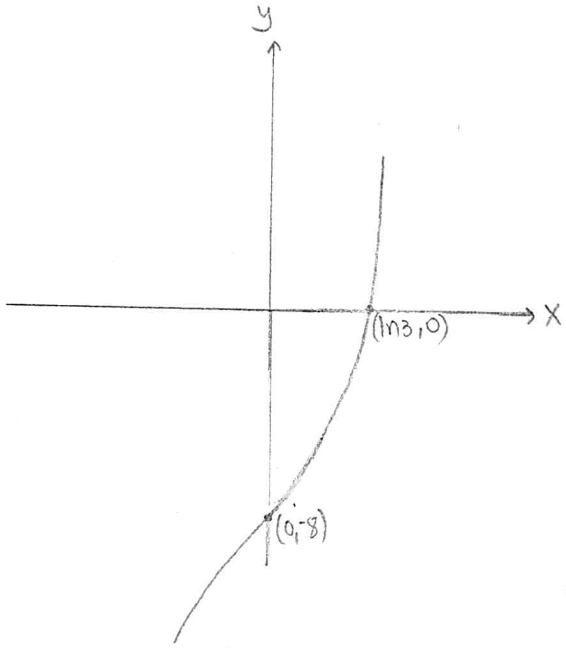
x	0
y'	+
y	↗

נציב $x=0$ בנגזרת על מנת למצוא תחומי עליה/ירידה.

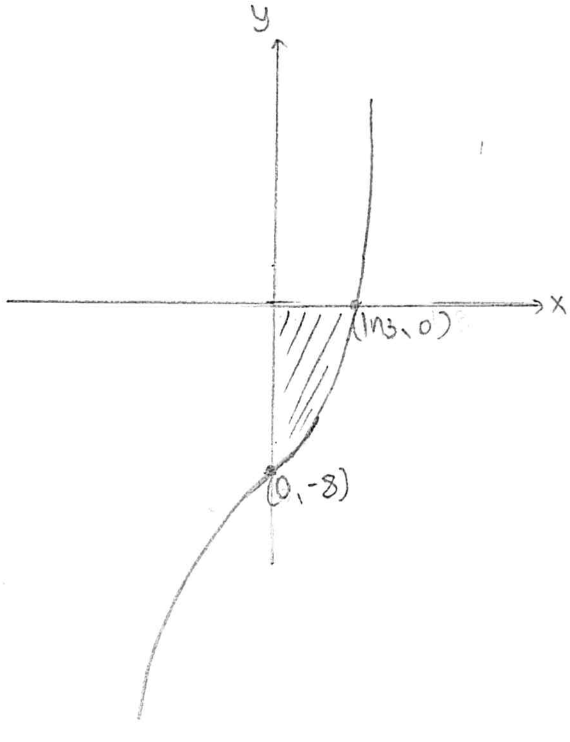
$f'(0) = e^0 + 9 \cdot e^{-0} = 10$

$\boxed{\text{הפונקציה עולה לכל ערך של } x}$

(3) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$:



3. השטח המבוקש וחישוב על פי האינטגרל המסוים:



$$S=\int_0^{\ln 3}\left[0-(e^x-9e^{-x})\right]dx=$$

$$\int_0^{\ln 3}(-e^x+9e^{-x})\,dx=$$

$$\left[-e^x+\frac{9e^{-x}}{-1}\right]_0^{\ln 3}=$$

$$\left[-e^x-9e^{-x}\right]_0^{\ln 3}=(-e^{\ln 3}-9e^{-\ln 3})-(-e^0-9e^{-0})=$$

$$\boxed{S=4\ \text{יח"ר}}$$

5. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{2x}{\ln(x)-2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) האם גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את הצירים? אם כן, מצא את נקודות החיתוך. אם לא, נמק.

(2) לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית אחת. מצא את משוואתה.

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

(4) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$?

(5) חשב את $f(0.1)$ וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g'(x)=f(x)$.

ג. מהו תחום העלייה של הפונקציה $g(x)$?

א. נגדיר תחום הגדרה: לפנינו שילוב של פונקציה לוגריתמית עם מכנה.
נבנה מערכת וגם

פונקציה לוגריתמית $\downarrow$ $x>0$ וגם מכנה $\ln(x)-2\neq0$

$\ln x\neq2$

$x\neq e^2$

$\boxed{\text{תחום ההגדרה: } x>0,\ x\neq e^2}$

הערה: ניתן לרשום את התחום גם באופן הבא

$0<x<e^2,\ e^2<x$

ב.(1) מכיוון שהתחום הינו $x>0$ אין חיתוך עם ציר y.

כאשר נציב $y=0$ נקבל $\dfrac{2x}{\ln x-2}=0 \leftarrow x=0$ נפסל לפי תחום ההגדרה.

לכן אין נקודות חיתוך עם הצירים.

ב. (2) אסימפטוטה אנכית מתקבלת כאשר המכנה מתאפס.
נעזר בסעיף א' ונראה כי האסימפטוטה האנכית
מתקבלת עבור $\boxed{x=e^2}$

(3) נעזר על מנת למצוא נק' קיצון ← נגזרת של מנת פונקציות.

$$f'(x) = \frac{2[\ln(x)-2] - 2x\cdot\frac{1}{x}}{[\ln(x)-2]^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\ln(x) - 4 - 2}{[\ln(x)-2]^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\ln(x)-6}{[\ln(x)-2]^2}$$

נציב $f'(x)=0$

$$0 = \frac{2\ln(x)-6}{[\ln(x)-2]^2}$$

$$0 = 2\ln x - 6$$

$$2\ln x = 6$$

$$\ln x = 3$$

$$x = e^3$$

נציב בפונקציה הנתונה על מנת למצוא שיעור y:

$$f(e^3) = \frac{2\cdot e^3}{\ln(e^3)-2} = 40.17$$

$$(e^3, 40.17)$$

נעזר בטבלה על מנת למצוא את סוג נק' הקיצון.
נתחשב גם בתחום ההגדרה של הפונקציה.

x	0	$x=1$	e^2	$x=10$	e^3	$x=30$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	40.17	$\nearrow$

מכיוון שהמכנה חיובי, ניתן להציב במונה בלבד:

$f'(1) = -6 < 0$

$f'(10) = -1.39 < 0$

$f'(30) = 0.8 > 0$

$\boxed{\text{נקודת הקיצון היא } (e^3, 40.17) \text{ מינ'}}$

ד) נעזר בטבלה מסעיף ג) ונרשום תחומי עלייה וירידה:

$\boxed{\text{עלייה: } x > e^3 \qquad \text{ירידה: } 0 < x < e^2,\ e^2 < x < e^3}$

(5) נחשב את $f(0.1)$ ע"י הצבה בפונקציה הנתונה:

$$f(0.1) = \frac{2\cdot 0.1}{2\ln(0.1) - 2}$$

$$\boxed{f(0.1) = -0.046}$$

נעזר בסעיפים קודמים:

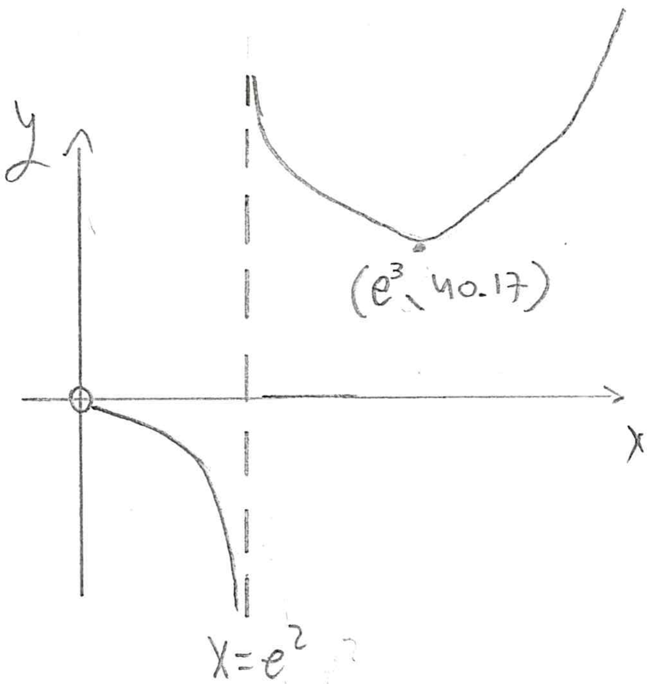
+ אין נק' חיתוך עם הצירים.

+ תחום ההגדרה הוא: $x \neq e^2$, $x > 0$

האס' אנכי $x = e^2$, ולכן "חור" עבור $x=0$

+ נק' מינימום עבור $(e^3, 40.17)$.

נסרטט:



ג. נתון כי $g'(x)=f(x)$, כלומר $f(x)$ היא הנגזרת של $g(x)$.

על מנת למצוא את תחום העלייה של $g(x)$
נמצא את התחום בו $g'(x)$, כלומר $f(x)$, חיובית.
ניעזר בגרף מסעיף ב (5):
$f(x)$ נמצאת מעל לציר x בתחום בו $x>e^2$,
לכן בתחום זה $f(x)$ חיובית.
כלומר, $\boxed{\text{תחום העלייה של } g(x) \text{ הינו } x>e^2}$