פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשע"ח, 2018, שאלון: 35481

מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

למידע על **פסיכומטרי** ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

1. המרחק בין עיר א ובין עיר ב הוא 126 ק"מ.

בשעה 8:00 יצאה מכונית מעיר א לעיר ב.

בשעה 8:30 יצא רוכב אופניים מעיר ב לעיר א.

המכונית ורוכב האופניים נפגשו בשעה 9:30 , והמשיכו בדרכם.

15 דקות לאחר הפגישה הגיעה המכונית לעיר ב.

המכונית ורוכב האופניים לא שינו את מהירויותיהם בזמן הנסיעה.

א. מצא את מהירות הנסיעה של המכונית ואת מהירות הנסיעה של רוכב האופניים.

יום לאחר מכן, יצאו המכונית ורוכב האופניים זה לקראת זה באותו הזמן.

המכונית יצאה מעיר ב לעיר א, ואילו רוכב האופניים יצא מעיר א לעיר ב.

המכונית נסעה במהירות קבועה הגדולה ב- a קמ"ש מן המהירות שבה נסעה ביום שלפני כן,

ואילו רוכב האופניים נסע במהירות קבועה הקטנה ב- a קמ"ש מן המהירות שבה נסע ביום שלפני כן.

המכונית ורוכב האופניים נפגשו לאחר t שעות.

ב. מצא את t .

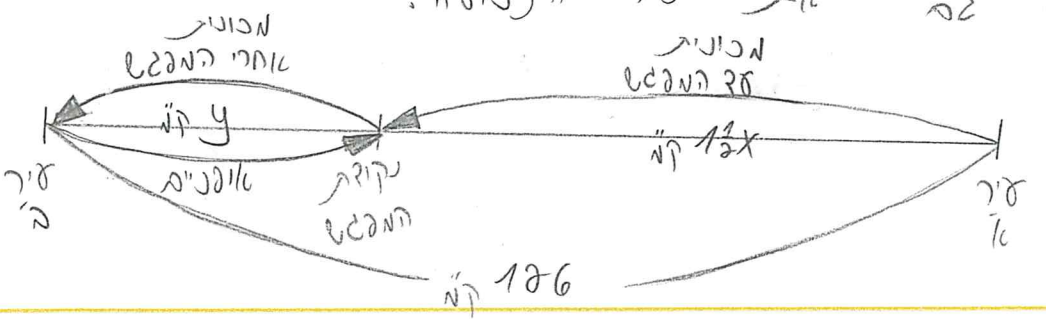
נכנס את התנאים לטבלה (הסברים בשאיר הפוסט):

	מהירות	זמן	קרקן
מכונית	x	$1\frac{1}{2}$	$x\,1\frac{1}{2}$
אופניים	y	1	y
מכונית	x	$\frac{1}{4}$	$x\,\frac{1}{4}$

לפי הפגישה

לאחרי הפגישה

נצייר את התנועה:



הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

הסברים למילוי הטבלה:

1. נסמן את מהירות המכונית ב-x ואת מהירות האופניים ב-y.
2. נתון כי המכונית יצאה בשעה 08:00 והאופניים ב־30, בשעה 08:30. נתון שהם נפגשו בשעה 09:30, לכן זמן הנסיעה של המכונית עד הפגישה היה $1\frac{1}{2}$ שעות וזמן הנסיעה של האופניים עד הפגישה היה שעה אחת.
3. נדרוש שמרחב המכונית עד הפגישה היה $1\frac{1}{2}x$ ונדרוש שמרחב האופניים עד הפגישה היה y.
4. לאחר הפגישה, נסעה המכונית 15 דקות ($\frac{1}{4}$ שעה) בהחזה מהירות והגיעה לעיר ב', ולכן הדרך שהיא עברה היא $\frac{1}{4}x$.

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

א. לפי הנתון, סכום המרחקים שעברו המכוניות ויחכב
ההופנ"מ עד הפגישה היו 126 ק"מ ולכן:

$$1\frac{1}{2}x + y = 126$$

לפי ציר הזמן, ניתן לראות כי המכונית שעברה
מנקודת הפגישה ועד שיר ה', y ק"מ ולכן:

$$\frac{1}{4}x = y$$

נפתור מערכת של שתי משוואות בשתי נעלמים:

$$\begin{cases} 1\frac{1}{2}x + y = 126 \\ \frac{1}{4}x = y \end{cases}$$

$$1\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 126$$

$$1\frac{3}{4}x = 126$$

$$x = 72$$

$$y = \frac{1}{4} \cdot 72$$

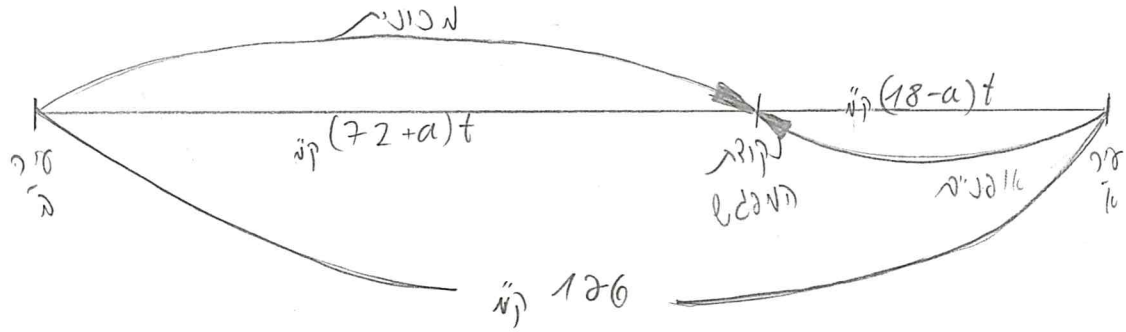
$$y = 18$$

מהירות הנסיעה של המכונית היו 72 ק"מ
מהירות הנסיעה של רכב הופנ"מ היו 18 ק"מ

נכניס את הנתונים החדשים לטבלת תנועה (הסברים בהמשך):

	מהירות	זמן	דרך
מכוניות	$72+a$	t	$(72+a)\cdot t$
אופנועים	$18-a$	t	$(18-a)\cdot t$

נצייר שוב את ציור התנועה:



הסברים למילוי הטבלה:

(1) מהירות המכוניות היתה 72 קמ"ש. מהירותה יותר לכאורה מכן ה"ט: $72+a$ קמ"ש.
מהירות תכב האופנועים היתה 18 קמ"ש. מהירותו יותר לכאורה מכן ה"ט: $18-a$ קמ"ש.

(2) זמן הנסיעה של המכוניות ושל רכב האופנועים שווה ונסמנו ב- t.

(3) הדרך שעברה המכוניות עד הפגישה ה"ט: $(72+a)t$ ק"מ.
הדרך שעבר רכב האופנועים עד הפגישה ה"ט: $(18-a)t$ ק"מ.

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

כמידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

ג. לפי הנתון, סכום המרחקים שנסעו רוכבת האופניים והמכונית הוא 126 ק"מ ולכן:

$$(72+a)t + (18-a)t = 126$$

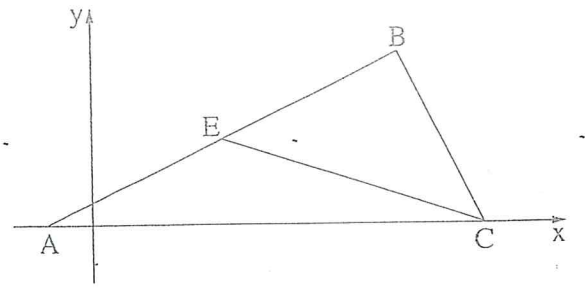
$$72t + at + 18t - at = 126$$

$$90t = 126$$

$$\boxed{t = 1.4 \text{ שעות}}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←



2. CE הוא תיכון במשולש ABC.

נתון: $A(-1,0)$, $B(7,4)$,

הקודקוד C נמצא על ציר ה־ x (ראה ציור).

א. מצא את שיעורי הנקודה E.

נתון: $EB = BC$,

שיעור ה־ x של הקודקוד C גדול משיעור ה־ x של הקודקוד B.

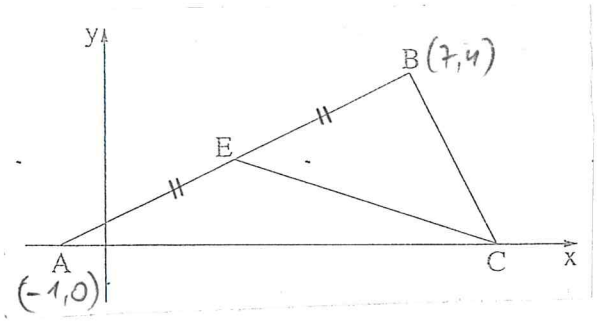
ב. מצא את שיעורי הקודקוד C.

מן הנקודה B הורידו אנך לציר ה־ x.

האנך שהורידו חותך את הקטע CE בנקודה K ואת ציר ה־ x בנקודה F.

ג. (1) מצא את שיעורי הנקודה K ואת אורך הקטע KF.

(2) חשב את שטח המשולש EKF.



נוסיף את הנתונים לשרטוט:

א. נתון ש- CE תיכון ל- AB.

על-מנת למצוא את הנקודה E שתמש בנוסחה למציאת נקודת אמצע:

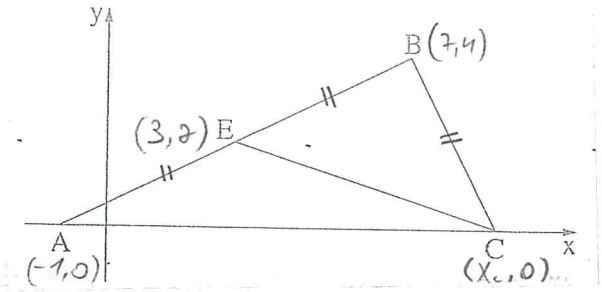
$$x_E = \frac{7+(-1)}{2} \qquad y_E = \frac{0+4}{2}$$

$$x_E = 3 \qquad y_E = 2$$

$$\boxed{E(3,2)}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←



נתון גם את הנקודה $E(3,2)$ ואת הנתון ש: $EB = BC$ לשרטוט.
נדרוש את הנקודה C כי: $(X_c, 0)$.

ג. נמצא את אורך EB באמצעות נוסחת המרחק:

$$d_{EB} = \sqrt{(3-7)^2 + (2-4)^2}$$

$$d_{EB} = 2\sqrt{5}$$

נבדוק את אורך BC באמצעות X_c, באמצעות נוסחת המרחק:

$$d_{BC} = \sqrt{(X_c - 7)^2 + (0-4)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{X_c^2 - 14X_c + 49 + 16}$$

$$d_{BC} = \sqrt{X_c^2 - 14X_c + 65}$$

כיוון שמדובר בין שני האורכים שמצאנו:

$$\sqrt{X_c^2 - 14X_c + 65} = 2\sqrt{5}$$

$$X_c^2 - 14X_c + 65 = 20$$

$$X_c^2 - 14X_c + 45 = 0$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

נפתור משוואת נקודת השיא:

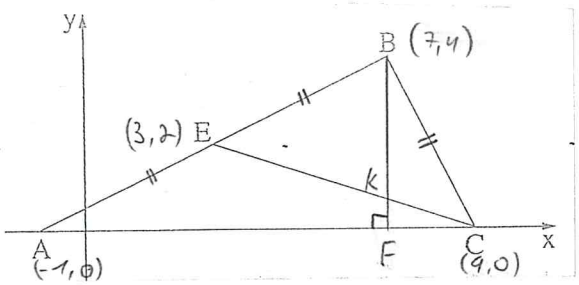
$$x_{c_{1,2}} = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 45}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{c_1} = 9 \qquad x_{c_2} = 5$$

לפי הנתון, שרטט ה-x של C נמצא מימין ה-x של B

ולכן הנקודה היא $x_c = 9$.

$$\boxed{C(9,0)}$$



נסמן את הנקודה $C(9,0)$ ואת ואת

השטח מ-B נביא את ה-x לשרטוט:

ב. (1) הנקודות k ו- F נמצאות על ישר המאונך לציר x

ומהמה קרק הנקודה $B(7,4)$ ולכן: $x_k = 7$ וגם $x_F = 7$.

נמצא את שיפוע EC המאונך הנסחה

לשיפוע והנקודות $E(3,2)$ ו- $C(9,0)$:

$$m_{EC} = \frac{2-0}{3-9}$$

$$m_{EC} = -\frac{1}{3}$$

נמצא את משוואת EC המאונך הנסחה למשוואת

ישר, הנקודה $C(9,0)$ והשיפוע $m_{EC} = -\frac{1}{3}$:

$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x-9)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 3$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

נמצא את הנקודה k על-ידי הצבת $X_k = 7$ במשוואת EC:

$$y = -\frac{1}{3} \cdot 7 + 3$$

$$y = \frac{2}{3}$$

ולכן הנקודה k היא: $\boxed{k\left(7, \frac{2}{3}\right)}$

הנקודה f נמצאת על ציר ה-x ולכן היא: $F(7,0)$.

הקטע kF מאונך לציר ה-x ולכן אורכו הוא ההפרש:

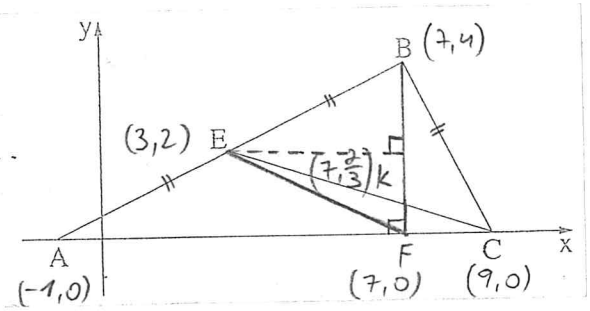
$$kF = X_k - X_F$$

$$kF = \frac{2}{3} - 0$$

$$\boxed{kF = \frac{2}{3}}$$

ב.(2)

נוסיף את הנקודות שמצאנו ואת המשולש EkF לשרטוט:



הקטע kF מאונך לציר x.

נרצה את השטח המבוקש במשולש EkF מהנקודה E להמשיך הקטע kF. השטח מאונך לציר ה-y ולכן ניתן לחשב את אורכו על-ידי חיסור ערך ה-x של הישר BF מערך ה-x של הנקודה E:

$$h = 7 - 3 \Rightarrow 4$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

נחשב את שטח המשולש EKF מהאיור שבו $h=7$ והבסיס $KF=\frac{2}{3}$ שהצאנו בסעיף ב. (1):

$$S_{EKF}=\frac{4\cdot\frac{2}{3}}{2}$$

$$\boxed{S_{EKF}=\frac{4}{3}\text{ יח"ר}}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

3. בסל יש 2 תפוחים ומספר מסוים של אפרסקים.

טל הוציאה באקראי מן הסל שני פירות זה אחר זה ללא החזרה.

ההסתברות שהיא הוציאה שני תפוחים היא $\frac{1}{36}$.

א. מצא כמה אפרסקים היו בסל לפני שטל הוציאה ממנו פירות.

ב. מהי ההסתברות שהפרי השני שהוציאה טל היה תפוח?

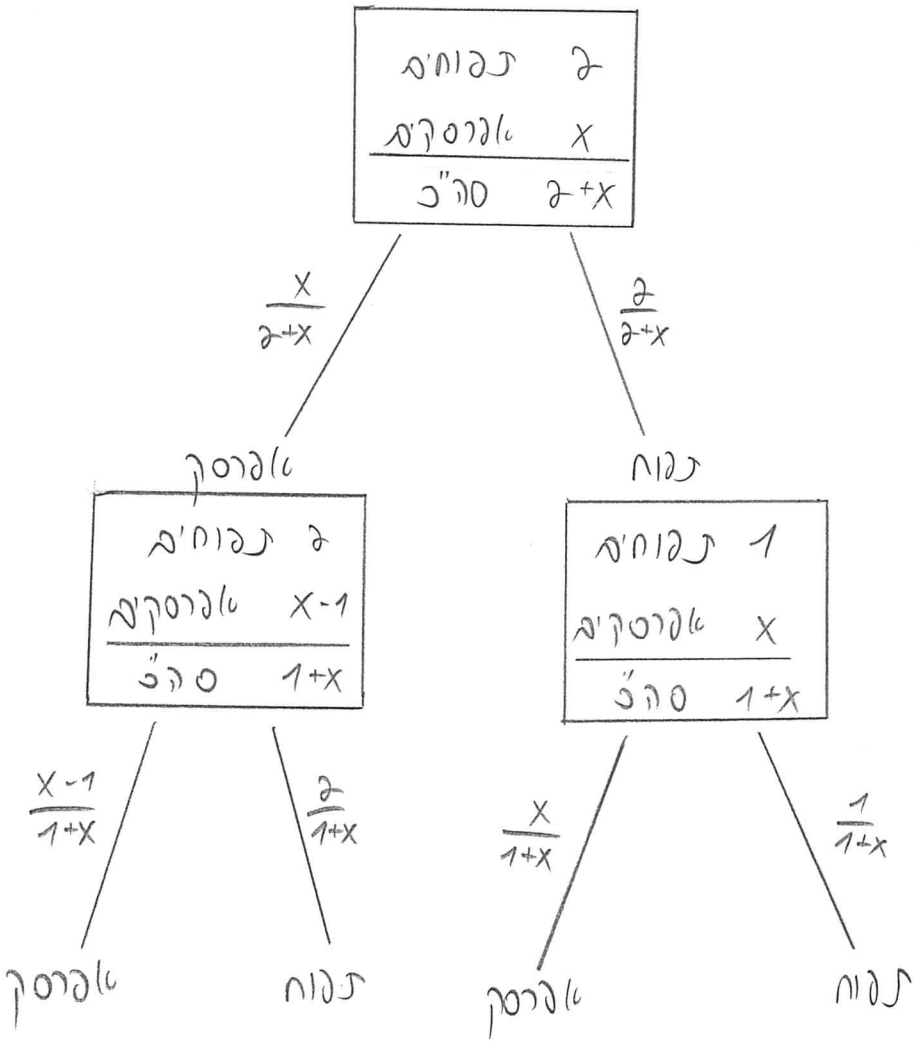
ג. (1) חשב את ההסתברות שטל הוציאה מן הסל שני פירות מאותו הסוג.

(2) ידוע שטל הוציאה מן הסל שני פירות מאותו הסוג. מהי ההסתברות שהיא הוציאה שני אפרסקים?

נסמן את כמות האפרסקים שהיו בסל כ- x.

כמות הפירות הכוללת שיש בסל היו $2+x$.

שרטוט ניתוח על ידי עץ ההסתברות:



הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

14. נמצא את ההסתברות להיבחן שני תבונים במשתנה X:

$$P(\text{שני תבונים}) = \frac{2}{2+X} \cdot \frac{1}{1+X}$$

$$P(\text{שני תבונים}) = \frac{2}{(2+X)(1+X)}$$

לפי הנתון, $P(\text{שני תבונים}) = \frac{1}{36}$ ולכן:

$$\frac{2}{(2+X)(1+X)} = \frac{1}{36}$$

$$72 = (2+X)(1+X)$$

$$72 = 2 + 2X + X + X^2$$

$$X^2 + 3X - 70 = 0$$

נציב בנוסחת השורשים:

$$X_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-70)}}{2 \cdot 1}$$

$$X_1 = 7 \qquad X_2 = -10$$

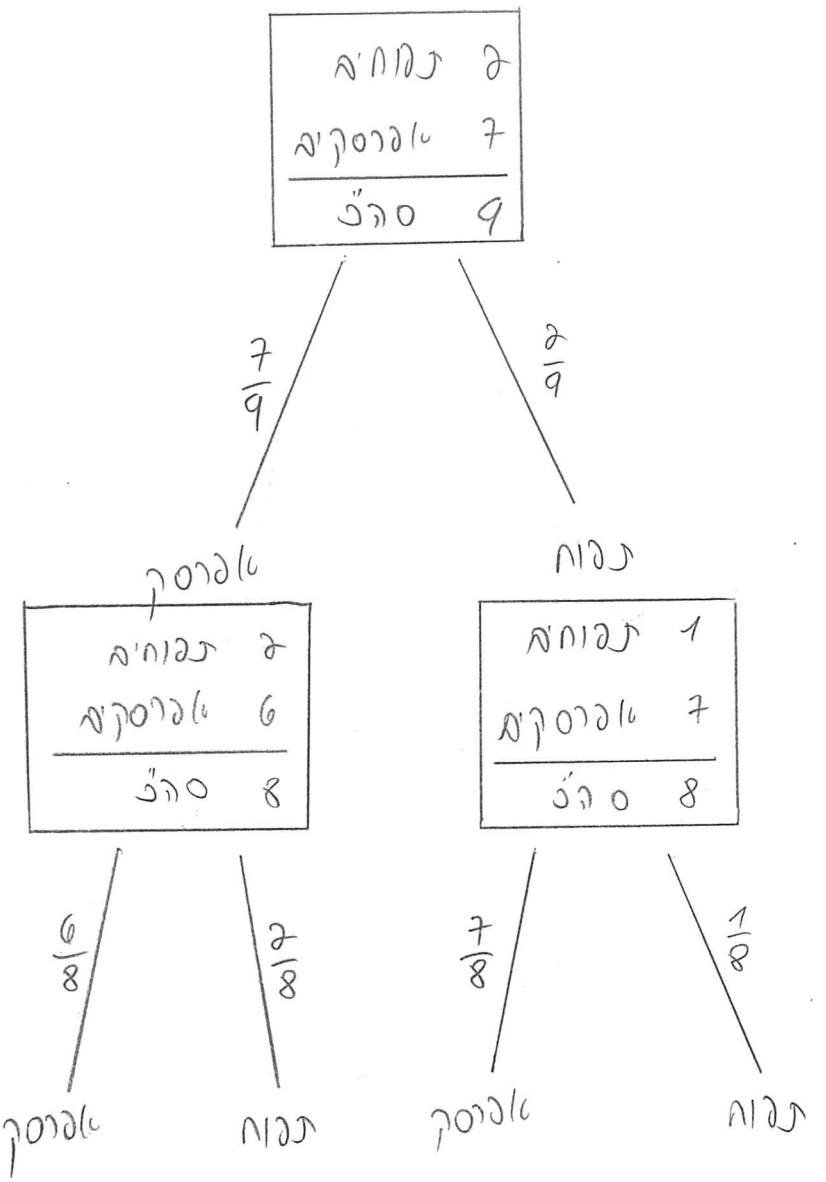
מספר התלמידים אינו יכול להיות שלילי ולכן

כמות התלמידים שהיו בכפר לפני שגל הודיעה
ממנו פרות הוא 7.

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

נשרטט שוב את העץ ונרשום על הענפים את ה-x שמצאנו:



ב. ההסתברות שהפרי השני שנלקח היה תמונה:

$$P(\text{פרי שני הוא תמונה}) = P(\text{תמונה תמונה}) + P(\text{אדומים תמונה}) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{7}{9}\cdot\frac{2}{8} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

ג. (1) ההסתברות שלפחות אחד הפירות שנלקחו הוא תמונה:

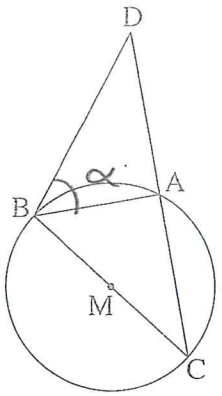
$$P(\text{שני פירות מאותו הסוג}) = P(\text{תמונה תמונה}) + P(\text{אדומים אדומים}) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8} = \boxed{\frac{11}{18}}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

ב.(2) ההסתברות שלפי הנוסחה שני אפרסקים, אלא יקוח
שהיו הנבחרה שני פירות מאותו הסוג:

$$P(\text{שני פירות מאותו סוג} \mid \text{שני אפרסקים}) = \frac{P(\text{אפרסק אפרסק})}{P(\text{שני פירות מאותו הסוג})} = \frac{\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}}{\frac{11}{18}} = \boxed{\frac{21}{22}}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←



4. בציור שלפניך מתואר מעגל שמרכזו M ורדיוסו R.
BC הוא קוטר במעגל. הנקודה D נמצאת מחוץ למעגל.
הקטע DC חותך את המעגל בנקודה A.
נתון: $\sphericalangle ABD = \frac{1}{2}\sphericalangle AMC$.

א. הוכח ש־BA הוא חוצה זווית במשולש DBC.

ב. הוכח: $\Delta CBD \sim \Delta CMA$.

ג. הוכח כי MA הוא קטע אמצעים במשולש DBC.

ד. נתון: המשולש ABM הוא משולש שווה צלעות.
הבע את שטח המשולש CBD באמצעות רדיוס המעגל.

ל.

טענה	נימוק
① נמתח קו בין M ל־A	בנייה עזר
② $MB = MA = MC = R$	נתון + רדיוסים במעגל שווים זה לזה.
③ BC קוטר במעגל	נתון
④ $\sphericalangle BAC = 90°$	זווית היקפית במעגל הנשענת על קוטר שווה ל־$90°$.
⑤ $\sphericalangle ABD = \frac{1}{2}\sphericalangle AMC$	נתון
⑥ $\sphericalangle ABD = \alpha$	סימון
⑦ $\sphericalangle AMC = 2\alpha$	הזווית כשורה ⑥.
⑧ $\sphericalangle ABC = \alpha$	זווית היקפית במעגל שווה לקטן מהזוויות המרכזיות הנשענות על אותה הקשת + שורה ⑦.
⑨ $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABC$	כלל המעבר + שורות ⑥ ו־⑧.
⑩ BA חוצה זווית DBC	חוצה זווית מחלק את הזווית לשתי זוויות שוות.

מ.ש.ל

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

ה.

	טענה	נימוק
(11)	$\sphericalangle DBC = \sphericalangle DBA + \sphericalangle CBA$	חיבור זוויות
(12)	$\sphericalangle DBC = \alpha + \alpha$	הצבה + שורות 6 - 8.
(13)	$\sphericalangle DBC = 2\alpha$	חישוב
(14)	$\sphericalangle DBC = \sphericalangle AMC$	כלל המעבר + שורות 7 ו- 13.
(15)	$\sphericalangle BCD = \sphericalangle MCA$	זווית משותפת למשולשים AMC ו- CBD.
(16)	$\Delta CBD \sim \Delta CMA$	לפי משפט דמיון ז.ז. + שורות 14 ו- 15.

משל ה'

ו.

	טענה	נימוק
(17)	BA גובה ל-DC	גובה יוצר $90°$ + שורה 4.
(18)	ΔDBC הוא שווה-שוקיים	משולש שבו הגובה וחוצה-הזווית מתלכדים הוא משולש שווה שוקיים + שורות 10 ו- 17.
(19)	BA תיכון ל-DC ב ΔDBC	במשולש שווה שוקיים הגובה, חוצה-הזווית והתיכון מתלכדים.
(20)	$DA = CA$	תיכון מחלק את הצלע לשני חלקים שווים.
(21)	MA קטע אמצעים ב-ΔDBC	קטע במשולש היוצא מאמצע צלע ומגיע לאמצע צלע הוא קטע אמצעים + שורות 2 ו- 20.

משל ו'

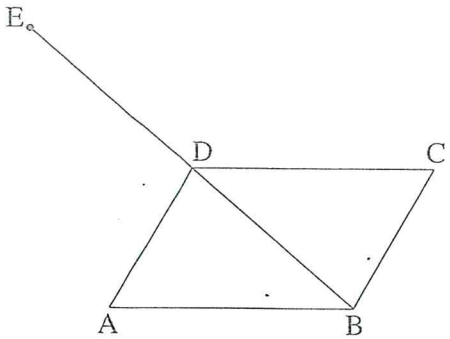
הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

ש.

	טענה	נימוק
22	ΔABM שווה-צלעות	נתון
23	$AB = AM = BM = R$	משולש שווה-צלעות הוא גם הצלעות שווה + שורה 2.
24	$BC = 2R$	קוטר במעגל שווה פי שניים מרדיוס.
25	$AB^2 + AC^2 = BC^2$	משפט פיתגורס ב- ΔABC.
26	$R^2 + AC^2 = (2R)^2$	הצבה + שורות 23 ו- 24.
27	$R^2 + AC^2 = 4R^2$	חישוב
28	$AC^2 = 3R^2$	חישוב
29	$AC = \sqrt{3}R$	חישוב
30	$DA = \sqrt{3}R$	כלל המעגל + שורות 28 ו- 29.
31	$CD = CA + DA$	סימון צלעות
32	$CD = \sqrt{3}R + \sqrt{3}R$	הצבה + שורות 29 ו- 30.
33	$CD = 2\sqrt{3}R$	חישוב
34	$S_{CBD} = \frac{BA \cdot DC}{2}$	נוסחה לשטח משולש.
	$S_{CBD} = \frac{R \cdot 2\sqrt{3}R}{2}$	הצבה + שורות 23 ו- 33.
	$S_{CBD} = \sqrt{3} \cdot R^2$	חישוב

משל"ב

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←



5. $ABCD$ היא מקבילית.

נתון: $AB = 15$, $BC = 10$.

נסמן: $\sphericalangle DAB = \alpha$ $(\alpha < 90^o)$.

א. הבע באמצעות α את שטח המשולש BAD .

נתון: שטח המקבילית הוא $75\sqrt{3}$.

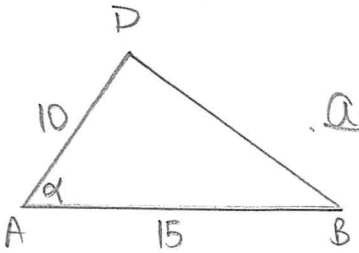
ב. חשב את גודל הזווית α .

ג. חשב את אורך האלכסון BD .

הנקודה E נמצאת על המשך האלכסון BD , כמתואר בציור, כך ש- $ED = DB$.

ד. (1) מצא את גודל הזווית ABE .

(2) מצא את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABE .



א. $AD = BC = 10$ (נתון כי $ABCD$ מקבילית)

חישוב שטח המשולש לפי הנוסחה: $\frac{a \cdot b \cdot \sin\alpha}{2}$

$$S_{\triangle BAD} = \frac{10 \cdot 15 \cdot \sin\alpha}{2}$$

$$\boxed{S_{\triangle BAD} = 75\sin\alpha}$$

ב. שטח המקבילית הוא פי 2 משטח המשולש BAD, ולכן:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot 75\sin\alpha = 150\sin\alpha$$

נתון כי שטח המקבילית הוא $75\sqrt{3}$ ולכן:

$$150\sin\alpha = 75\sqrt{3} \quad / : 150$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

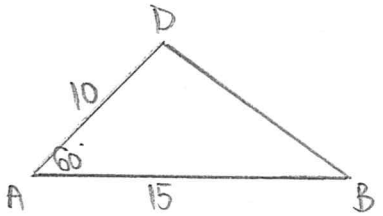
$$\boxed{\alpha = 60^\circ}$$

ג. חישוב אורך האלכסון BD באמצעות משפט הקוסינוסים ב- $\triangle BAD$:

$$BD^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos 60^\circ$$

$$BD^2 = 175 \quad / \sqrt{\ }$$

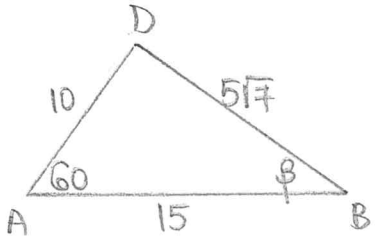
$$\boxed{BD = 5\sqrt{7} = 13.228}$$



הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

ג. (1) מציאת $\sphericalangle ABE$ ע"י משפט הסינוסים במשולש ABD:



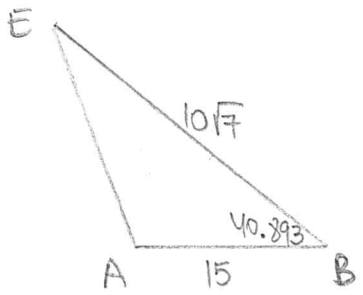
$$\frac{10}{\sin\beta} = \frac{5\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}$$

$$\sin\beta = 0.654$$

$$\beta = 40.893^\circ$$

$$\boxed{\sphericalangle ABD = 40.893^\circ}$$

(2) נתון כי $ED = DB$ ולפי נתון $ED = 5\sqrt{7}$.



$$EB = ED + DB = 10\sqrt{7}$$

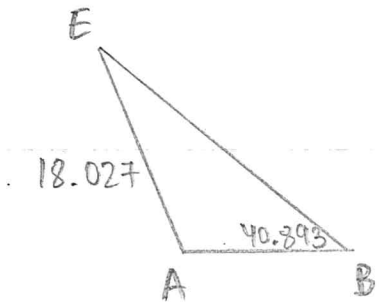
מציאת AE לפי משפט הקוסינוסים במשולש AEB:

$$AE^2 = 15^2 + (10\sqrt{7})^2 - 2\cdot 15\cdot 10\sqrt{7}\cdot\cos(40.893)$$

$$AE^2 = 324.996 \;/\sqrt{}$$

$$AE = 18.027$$

מציאת רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABE ע"י משפט הסינוסים במשולש ABE:



$$\frac{18.027}{\sin(40.893)} = 2R$$

$$\boxed{R = 13.768}$$

למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}+4$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=4$ ו־ $x=5$.

נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)-4$.

ג. מהו השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=4$ ו־ $x=5$? נמק.

א. (1) נבדוק מהיכן מגיעה ערכים של x המכנה מתאפס:

$$(x-3)^2=0$$

$$x-3=0$$

$$x=3$$

לכן תחום ההגדרה: $\boxed{x\neq 3}$

(2) אסימפטוטות מאונכות לצירים:

אסימפטוטה מאונכת לציר x ← לפי תחום הגדרה: $\boxed{x=3}$

אסימפטוטה מאונכת לציר y ← ניסתכל בגבול החזקה הגבוהה:

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}+4$$

4 ← מספר קבוע, $+$, $\frac{1}{(x-3)^2}$ ← חזקה גבוהה במכנה

4 ← $+$ ← 0

לכן האסימפטוטה $\boxed{y=4}$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

(3) נגזור את הפונקציה:

$$f'(x) = \frac{0\cdot(x-3)^2 - 1\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-2(x-3)}{(x-3)^4}$$

נירון לצמצם ב- $(x-3)$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-3)^3}$$

נגיד $f'(x)=0$

$$0 = \frac{-2}{(x-3)^3}$$

$0 = -2$

אין בינון ← אין נק' קיצון

נערכ בטבלה לצמצם תחומי עליה וירידה:

x	$x=0$	3	$x=4$
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	↗	∄	↘

$$f'(0) = \frac{-2}{(0-3)^3} = \frac{2}{27} > 0$$

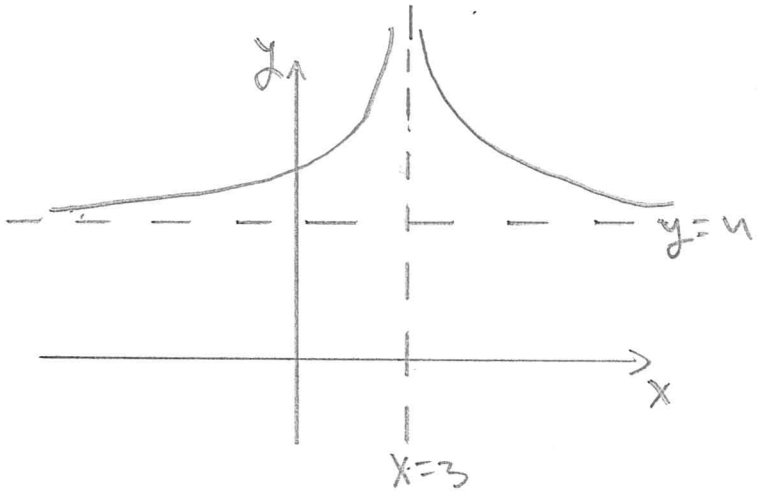
$$f'(4) = \frac{-2}{(4-3)^3} = -2 < 0$$

תחום עליה:	$x<3$
תחום ירידה:	$x>3$

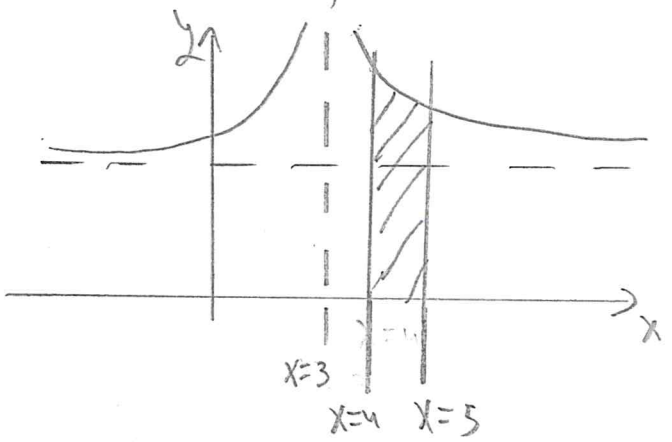
הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

(4) סרטוט:



ב. נסמן את השטח המבוקש בסרטוט: $x=4$, $x=5$



נחשב את השטח ע"י האינטגרל:

$$\int_4^5 \left[\frac{1}{(x-3)^2}+4\right]dx = \int_4^5 \left[(x-3)^{-2}+4\right]dx = \left[\frac{(x-3)^{-1}}{-1}+4x\right]_4^5$$

$$\left[\frac{-1}{x-3}+4x\right]_4^5$$

$$\left[\frac{-1}{5-3}+4\cdot 5\right]-\left[\frac{-1}{4-3}+4\cdot 4\right]$$

$$S = 4.5 \text{ יח"ר}$$

למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

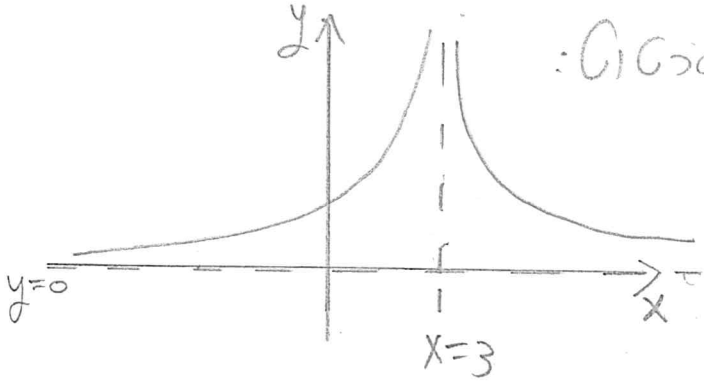
הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

ג. נתון כי $g(x)=f(x)-4$, כלומר $g(x)$ היא הפונקציה שבה $f(x)$ כבר יצא 4 יחי' מטה, ומשוואת $g(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$

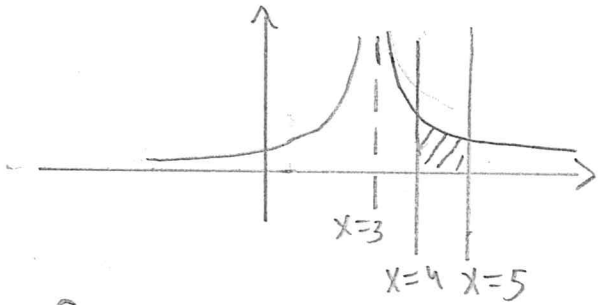
לכן האסימפטוטה המאונכת לציר y תהיה $y=0$

האסימפטוטה המאונכת לציר x נשאר כשהיה, כלומר $x=3$.

הסרטוט:



נוסיף את הישרים $x=4$, $x=5$ לסרטוט:



נחשב את השטח בעזרת האינטגרל:

$$\int_4^5 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \int_4^5 (x-3)^{-2}\,dx = \left[\frac{(x-3)^{-1}}{-1}\right]_4^5 = \left[\frac{-1}{x-3}\right]_4^5$$

$$\left(\frac{-1}{5-3}\right)-\left(\frac{-1}{4-3}\right)$$

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\ \text{יח"ר}}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

7. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3\cdot\sqrt{x+a}$. a הוא פרמטר.

א. הבע באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

הנקודה $(2,24)$ נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את a .

הצב $a=7$ וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(4) מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$?

נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+c$. c הוא פרמטר.

ד. מהו הערך של c שעבורו גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה־ x ? נמק.

א. תחום הגדרה ← הביטוי תחת השורש צריך או שווה לאפס, ולכן:

$$x+a\geq 0$$

$$\boxed{x\geq -a}$$

ב. נציב את שיעורי הנק' $(2,24)$ בפונקציה ונקבל:

$$24=(2)^3\sqrt{2+a}$$

$$24=8\sqrt{2+a} \quad /:8$$

$$3=\sqrt{2+a} \quad /(\ )^2$$

$$9=2+a$$

$$\boxed{a=7}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

נרשום את הפונקציה ובה $a=7$: $f(x)=x^3\sqrt{x+7}$

ג. (1) נקי חיתוך עם הצירים:

חיתוך ציר y ← נציב $x=0$ $\quad f(0)=0^3\sqrt{0+7}=0$

$(0,0)$

חיתוך ציר x ← נציב $y=0$:

$$0=x^3\sqrt{x+7}$$

$x^3=0$ $\qquad \sqrt{x+7}=0 \quad /()^2$

$x=0$ $\qquad x+7=0$

$x=-7$

נקי החיתוך הן: $(0,0)$ $\quad (-7,0)$ $\quad (0,0)$

(2) נגזור את הפונקציה לפי נגזרת של מכפלה כפונקציות:

$$f'(x)=3x^2\sqrt{x+7}+x^3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+7}}$$

$$f'(x)=3x^2\sqrt{x+7}+\frac{x^3}{2\sqrt{x+7}}$$

למטרה מנה נרשום ונקבל:

$$f'(x)=\frac{3x^2\sqrt{x+7}\cdot 2\sqrt{x+7}+x^2}{2\sqrt{x+7}}$$

$$f'(x)=\frac{6x^2(x+7)+x^2}{2\sqrt{x+7}}$$

$$f'(x)=\frac{7x^3+42x^2}{2\sqrt{x+7}}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

נגזור $f'(x)=0$ ונקבל

$$0=\frac{7x^3+42x^2}{2\sqrt{x+7}}$$

$$0=7x^3+42x^2$$

$$0=7x^2(x+6)$$

$7x^2=0$ $\quad$ $x+6=0$

$x=0$ $\quad$ $x=-6$

נמצא שיעורי y של הנגזרת בפונקציה הנתונה:

$f(0)=0$ $\quad$ $f(-6)=-216$

$(0,0)$ $\quad$ $(-6,-216)$

ניצור טבלה שתעזור למצוא את סוג הקיצון:

x		-7	$x=-6.5$	-6	$x=-1$	0	$x=1$
$f'(x)$	///		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	///	0	↘	-216	↗	0	↗

מכיוון שהמכנה תמיד, נציב למעלה את הנגזרת כדי

$f'(-6.5)=-147.875<0$

$f'(-1)=35>0$

$f'(1)=42>0$

* הערה: ניתן לראות כי באשר $x=0$ הנגזרת מתאפסת אך הנקודה איננה נקודת קיצון, כפי שהתקבל מהטבלה.

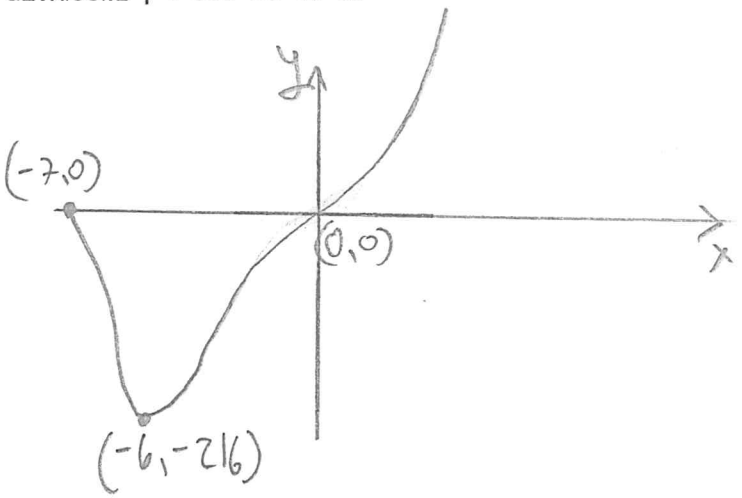
נקודות הקיצון:

$(-6,-216)$	$(0,-7)$
מינימום.	מקסימום קבה

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

(3) נסרטט את הפונקציה:



(4) לפי הגרף שסרטטנו:

תחום החיוביות הוא	$0<x$
תחום השליליות הוא	$-7<x<0$

5. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+c$

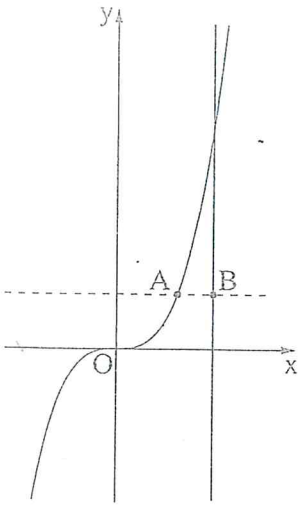
עם מינימום שגרף הפונקציה יושק לציר x, עלינו להציב את כך שהשיעור y בנקודת המינימום יהיה 0.

כלומר, עלינו להציב את הפונקציה $f(x)$ 216 יחידות כלפי מעלה. לכן $g(x)=f(x)+216$

כלומר $\boxed{c=216}$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←



8. בציור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)=x^3$ והישר $x=2$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $0<x_A<2$ (x_A הוא שיעור ה־ x של הנקודה A).

מהנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה־ x (הישר המקווקו בציור).

הישר שהעבירו חותך את הישר $x=2$ בנקודה B (ראה ציור).

הנקודה O היא ראשית הצירים.

א. מה הם שיעורי הנקודה A שבעבורה שטח המשולש ABO הוא מקסימלי? נמק.

ב. חשב את שטח המשולש ABO בעבור הנקודה A שמצאת בסעיף א.

א. נניח t — שיעורי הנק' A אז הפונקציה $f(x)=x^3$

נסמן: $x_A=t$ ← $A(t,t^3)$

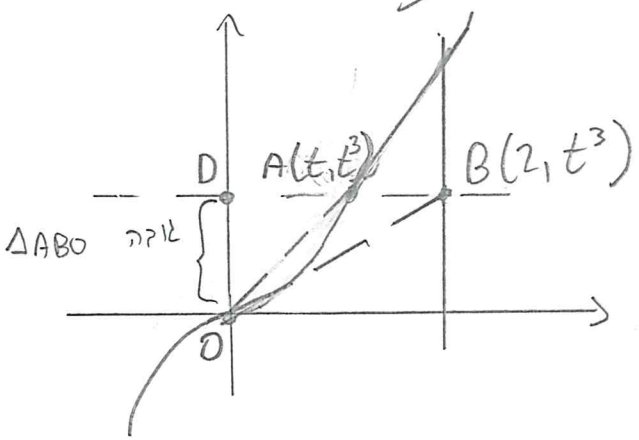
$f(t)=t^3$

הישר AB מקביל לציר x ולכן $y_B=y_A=t^3$

נק' B נמצאת על הישר $x=2$ ולכן $x_B=2$

שיעורי נק' B: $B(2,t^3)$

נעזר לסרטוט את שיעורי הנקודות ונניח t שלילי ABO:



פונקציה המתארת שטח ΔABO

$$\frac{AB\cdot OD}{2}$$

$$f(t)=\frac{(2-t)t^3}{2}$$

$$f(t)=\frac{2t^3-t^4}{2}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

א. נמצא נק' בה השטח מקסימלי, נגזור:

$$f'(t)=\frac{6t^2-4t^3}{2}$$

נגזור $f'(t)=0$

$$0=6t^2-4t^3$$

$$0=2t^2(3-2t)$$

$2t^2=0$ ↙ ↘ $3-2t=0$

$t=0$ $t=1.5$

נפסל כי נתון $0<X_A<2$

נגזור בפעם נוספת לקבלת קו"ג

$$f''(t)=\frac{12t-12t^2}{2}$$

נגזור $t=1.5$

$$f''(1.5)=-4.5<0$$

לכן עבור $t=1.5$ השטח מקסימלי.

שיעורי נק' A עבורה השטח מקסימלי: A (1.5, 3.375)

ב. נגזור $t=1.5$ בפונקציה המבטאת את שטח משולש ABO, פונקציה המתקבלת מנוסחת א':

$$f(1.5)=\frac{2(1.5)^3-(1.5)^4}{2}=\frac{27}{32}=0.84375$$

השטח המקסימלי של משולש ABO הוא $\frac{27}{32}$ יח"ר או 0.84375 יח"ר

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←