פתרון הבחינה
במתמטיקה

קיץ תשע"ח, 2018, מועד ב, שאלון: 35481

מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

1. בשיעור אומנות קיבל תלמיד חוט ברזל שאורכו 52a ס"מ והכין ממנו שתי מסגרות לתמונות:

מסגרת אחת בצורת ריבוע ומסגרת אחת בצורת מלבן.

צלע אחת של המלבן שווה באורכה לצלע הריבוע והצלע האחרת של המלבן גדולה פי $\frac{4}{3}$ מצלע הריבוע.

החוט הספיק בדיוק להכנת שתי המסגרות.

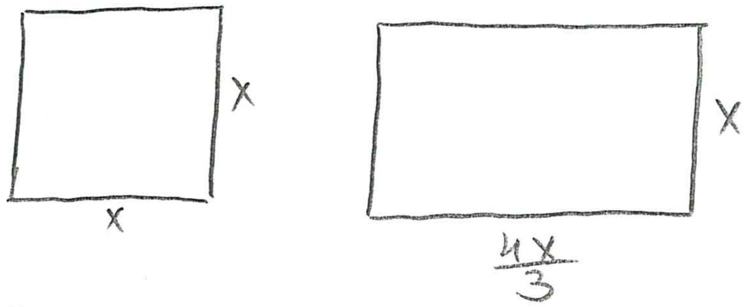
א. הבע באמצעות a את אורכי צלעות המלבן.

ב. מחוט ברזל נוסף (באורך אחר) הכין התלמיד עוד שתי מסגרות: מסגרת מלבנית זהה למסגרת המלבנית הראשונה, ומסגרת בצורת ריבוע שצלעו ארוכה ב- 65% מצלע הריבוע הראשון.

מצא בכמה אחוזים החוט הנוסף ארוך מן החוט הראשון.

ג. האורך של אלכסון המלבן הוא 45 ס"מ.

חשב את אורכי צלעות המלבן.



א

x = אורך צלע ריבוע.

אורך חוט הברזל = $P_{\text{ריבוע}} + P_{\text{מלבן}}$

$$52a = 4x + 2x + 2\cdot\frac{4x}{3}$$

$$52a = 6x + \frac{8x}{3} \quad |\cdot 3$$

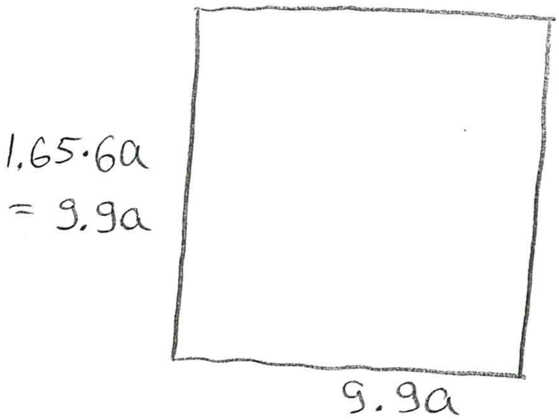
$$156a = 18x + 8x$$

$$156a = 26x$$

$$\boxed{6a = x}$$

אורכי צלעות המלבן הם: $\boxed{8a, 6a}$

ב)



את צלע הריבוע הגדילו ? 65%

לכן אורך צלע הריבוע הוא $1.65\cdot6a = 9.9a$

אורך החוט החדש $=$ P ריבוע חדש $+$ P מלבן $= 4\cdot9.9a+2\cdot6a+2\cdot8a$

אורך החוט החדש $= 67.6a$

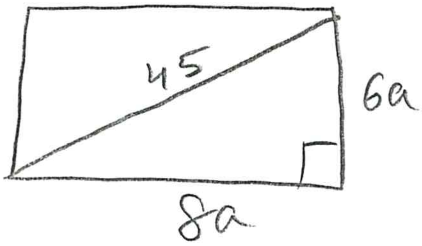
תזכורת: כדי להבין בכמה אחוזים A גדול מ B עלינו לבצע את החישוב הבא

$$\frac{A-B}{B}\cdot100$$

$$\frac{67.6a-52a}{52a}\cdot100=30\%$$

החוט הנוסף אורך ? $\boxed{30\%}$ מהחוט הראשון.

ג



נחשב ע"פ פיתגורס

$(6a)^2+(8a)^2=45^2$

$36a^2+64a^2=45^2$

$100a^2=45^2$

$a^2=\frac{45^2}{100} \quad /\sqrt{\ }$

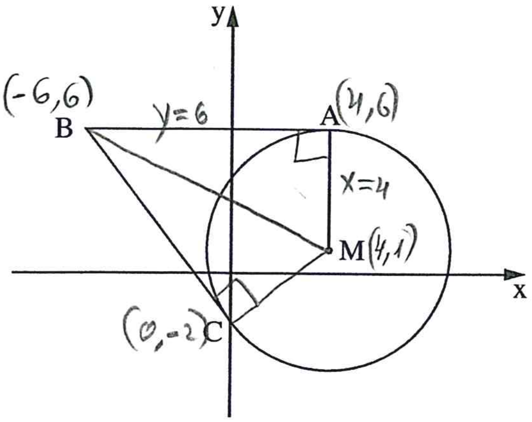
$\boxed{a=4.5}$ $\quad a=-4.5$ נפסל

צלעות המלבן הם $\boxed{36 \text{ ס"מ} - 27 \text{ ס"מ}}$

2. מעגל שמרכזו בנקודה $M(4,1)$ חותך את ציר ה־ y בנקודה C , כמתואר בציור.

מן הנקודה B , הנמצאת ברביע השני, העבירו שני ישרים המשיקים למעגל בנקודות A ו־ C .

משוואת הישר AB היא $y=6$.



א. מהי משוואת המעגל?

ב. מצא את משוואת הישר BC .

ג. חשב את שטח המרובע $ABCM$.

ד. חשב את אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCM .
בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

א. משיק מאונך לרדיוס אל נקודת ההשקה.
מאחר והמשיק אופקי, נובע ש-AM ישר אנכי.
שיעורי הנקודה $A(4,6)$, המרחק בין A ל-M
הוא הפרש שיעורי ה-y. $d_{AM}=6-1=5$
AM הוא גם רדיוס המעגל ולכן משוואת
המעגל היא $\boxed{(x-4)^2+(y-1)^2=25}$

ב. נחשב את נקודה C. (חיתוך המעגל עם ציר y)

$(0-4)^2+(y-1)^2=25$

$16+(y-1)^2=25$

$(y-1)^2=9 \quad /\sqrt{\ }$

$y-1=3 \qquad y-1=-3$

(נפסל) $y=4 \qquad \boxed{y=-2}$

שיעורי הנקודה C הם $(0,-2)$.
כעת נחשב את השיפוע MC מאחר והשיפוע
של BC הופכי ונגדי לו. ($MC \perp BC$ מאחר ומדובר
במשיק ורדיוס לנקודת ההשקה).

$$m_{MC}=\frac{1-(-2)}{4-0}=\frac{3}{4}$$

$$\downarrow$$

$$m_{CB}=-\frac{4}{3}$$

משוואת הישר CB היא:

$$y-(-2)=-\frac{4}{3}(x-0)$$

$$\boxed{y=-\frac{4}{3}x-2}$$

ג. מנקודה B יוצאים שני משיקים למעגל.
ע"פ משפט גאומטרי משיקים אלה שווים זה לזה
ולכן נוצרים שני משולשים חופפים $\triangle BAM \cong \triangle BCM$.
נחשב את השטח של $\triangle BAM$ ונכפול פי 2.
אורך של AM הוא 5. כדי למצוא את האורך
של BA עלינו לחשב ראשית את נקודה B.

נמצא חיתוך בין הישרים AB ו CB

$-\frac{4}{3}x-2=6 \quad |\cdot 3$

$-4x-6=18$

$-4x=24$

$x=-6 \quad B(-6,6)$

$d_{AB}=X_A-X_B=4-(-6)=10$

$S_{\Delta ABM}=\frac{AM\cdot AB}{2}=\frac{5\cdot 10}{2}=25$ יח"ר

$\boxed{S_{ABCM}=50 \text{ יח"ר}}$

3 מאחר ומשולש BCM הוא משולש ישר זווית
BM הוא קוטר המעגל החוסם.
רדיוס המעגל החוסם הוא $\frac{d_{BM}}{2}$

$d_{BM}=\sqrt{(-6-4)^2+(6-1)^2}=\sqrt{100+25}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

$R_{\text{מעגל חוסם}}=5.59$

רדיוס המעגל החוסם הוא $\boxed{5.59}$ יחידות אורך

3. בבית ספר מסוים יש תלמידים שגרים בעיר ויש תלמידים שגרים מחוץ לעיר.

מספר הבנות הלומדות בבית הספר גדול פי 1.25 ממספר הבנים הלומדים בבית הספר.

75% מן הבנים גרים בעיר ו־ 40% מן הבנות גרות מחוץ לעיר.

בחרו באקראי תלמיד מבין תלמידי בית הספר (בן או בת).

א. מהי ההסתברות שבחרו בבן שגר בעיר?

ב. ידוע שהתלמיד שנבחר (בן או בת) גר בעיר. מהי ההסתברות שנבחרה בת?

ג. בבית הספר יש 900 תלמידים (בנים ובנות). כמה תלמידים (בנים ובנות) גרים בעיר?

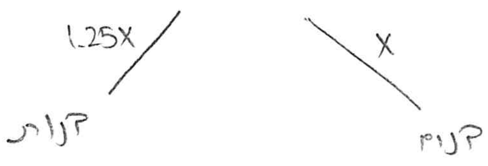
ד. בכל יום בוחרים באקראי תלמיד מבית הספר שיהיה תורן ניקיון (אותו התלמיד יכול להיבחר ברצף יום אחר יום).

מהי ההסתברות שבמשך 3 ימים רצופים נבחרו לפחות 2 תורנים שגרים מחוץ לעיר? (תורן יכול להיות בן או בת).

א. סימון:

בנים - x

בנות - 1.25x



סכום ההסתברויות של הבנים והבנות הוא 1 ולכן:

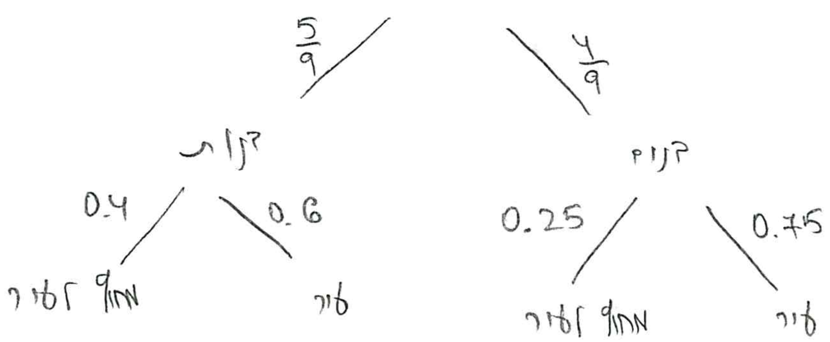
$1.25x + x = 1$

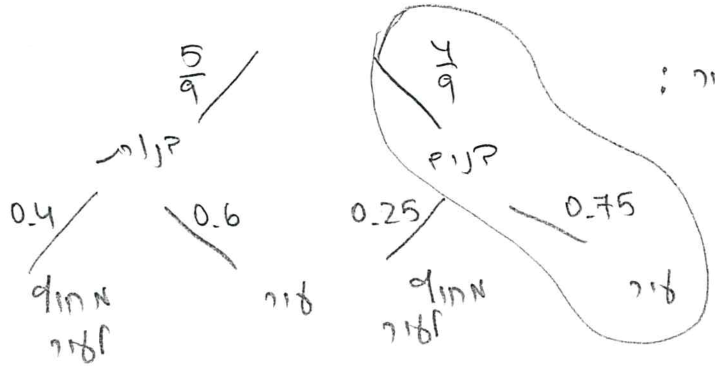
$2.25x = 1 \quad /:2.25$

$\boxed{x = \frac{4}{9}}$

לכן, ההסתברות לבחור בן היא: $\frac{4}{9}$

ההסתברות לבחור בת היא: $1.25 \cdot \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$



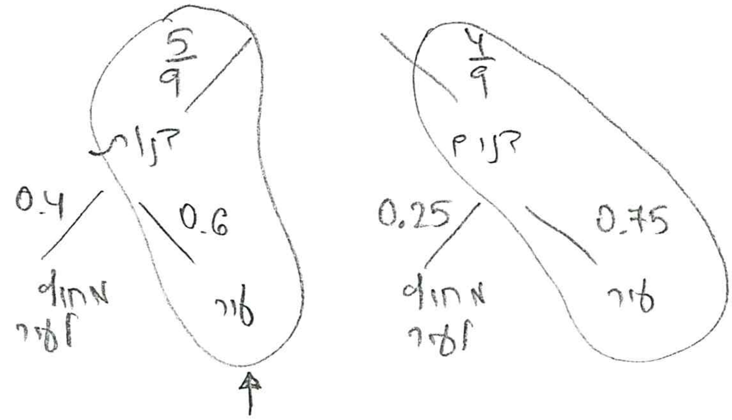


א. ההסתברות לבחור בן שגר בעיר:

$P(\text{בן שגר בעיר}) = \frac{4}{9}\cdot 0.75 = \boxed{\frac{1}{3}}$

ב. ידוע שנבחר תלמיד שגר בעיר, זו הסתברות מותנית ולכן נסמן את המסלולים המסתיימים ב"עיר":

מכיוון שאנו מתבקשים לחשב את ההסתברות שנבחרה בת, כלומר - המסלול השמאלי בעץ.



$P(\text{נבחרה בת} / \text{גר בעיר}) = \frac{P(\text{בת שגרה בעיר})}{P(\text{מגורים בעיר})} = \frac{\frac{5}{9}\cdot 0.6}{\frac{5}{9}\cdot 0.6 + \frac{4}{9}\cdot 0.75}$

$\boxed{P(\text{נבחרה בת} / \text{גר בעיר}) = \frac{1}{2}}$

ג. ההסתברות לגור בעיר היא: $\frac{5}{9}\cdot 0.6 + \frac{4}{9}\cdot 0.75 = \frac{2}{3}$

בבית הספר 900 תלמידים. $\frac{2}{3}$ מתוכם גרים בעיר.

$\boxed{\text{לכן מספר התלמידים שגרים בעיר הוא: } \frac{2}{3}\cdot 900 = 600 \text{ תלמידים}}$

ד. נגדיר "הצלחה" כתלמיד שגר מחוץ לעיר.

P - הסיכוי לגור מחוץ לעיר: מסעיף ג' ידוע כי ההסתברות לגור בעיר היא $\frac{2}{3}$.
לכן, ההסתברות לגור מחוץ לעיר היא $\frac{1}{3}$.

n - מספר הפעמים שבוחרים תלמיד: $n=3$.

k - מספר "ההצלחות", כלומר מספר הפעמים לבחור תלמיד שגר מחוץ לעיר:
לפחות פעמיים $\Leftarrow k=2, k=3$.

$$\underline{k=2}: \binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

$$\underline{k=3}: \binom{3}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$$

$P($בחירת 2 תשכנים לפחות הגרים מחוץ לעיר$) = \frac{2}{9}+\frac{1}{27}$

$$\boxed{P = \frac{7}{27}}$$

.4 המשולש AEB חסום במעגל.

הקטע GF משיק למעגל בנקודה E.

הנקודות C ו־ D נמצאות על הצלעות BE ו־ AE בהתאמה,

כך שהקטע CD מקביל למשיק.

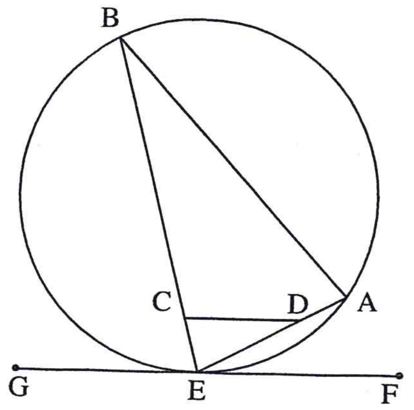
א. הוכח: $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CDE$.

ב. הוכח: $\Delta CDE \sim \Delta ABE$.

ג. הוכח כי אפשר לחסום את המרובע ABCD בְּמעגל.

ד. נתון: CD = 4 ס"מ , BE = 12 ס"מ , $ED = \frac{1}{3}AB$.

חשב את אורך הקטע ED .



א)

	טענה	נימוק
.1	$CD \parallel GF$	נתון
.2	$\sphericalangle CDE = \sphericalangle DEF$	זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות.
.3	GF משיק למעגל בנקודה E	נתון
.4	$\sphericalangle ABE = \sphericalangle AEF$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני.
.5	$\boxed{\sphericalangle ABE = \sphericalangle CDE}$	כלל המעבר + שורות 2, 4.

מ.ש.ל א'

ב)

	טענה	נימוק
.6	$\sphericalangle CED = \sphericalangle AEB$	זווית משותפת ל- ΔBEA ו- ΔDEC.
.7	$\boxed{\Delta CDE \sim \Delta ABE}$	לפי משפט דמיון זווית-זווית + שורות 6,5

מ.ש.ל ב'

טענה	נימוק
ד)	
8. $\measuredangle CDE = \measuredangle ABE = \alpha$	סימון + שורה 5.
9. $\measuredangle CDA = 180^\circ - \measuredangle CDE$	סכום זוויות צמודות הוא 180°.
10. $\measuredangle CDA = 180^\circ - \alpha$	הצבה + שורה 8.
11. $\measuredangle ABE + \measuredangle CDA = \alpha + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$	חיבור זוויות.
12. $\boxed{ABCD \text{ הוא בר-חסימה במעגל}}$	מרובע שבו זוג אחד של זוויות נגדיות משלימות ל-180° הוא בר-חסימה במעגל.
מ.ש.ל ג	
ה)	
13. $CD=4,\ BE=12,\ ED=\frac{1}{3}AB$	נתון
14. $ED = x$	סימון
15. $AB = 3x$	הצבה + שורה 13.
16. $\frac{DE}{BE} = \frac{DC}{BA}$	במשולשים דומים, היחסים בין הצלעות המתאימות שווים + שורה 7.
17. $\frac{x}{12} = \frac{4}{3x}$	הצבה + שורות 13, 14, 15, 16.
18. $3x^2 = 48$	חישוב

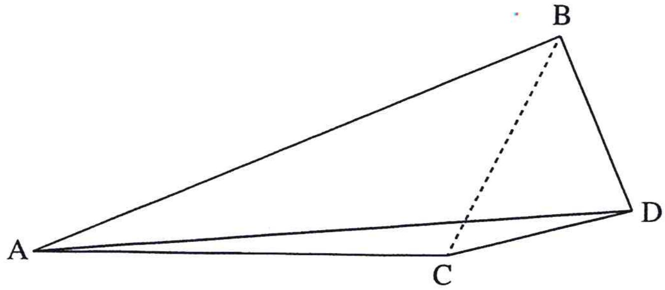
	טענה	נימוק
19.	$X^2 = 16$	חישוב
20.	$X = 4$	חישוב
21	$\boxed{ED = 4}$ ס"מ	הצבה + שורה 14.

מ.ש.ל ב'

.5 ABD הוא משולש ישר־זווית $(\sphericalangle ABD = 90^\circ)$.

נסמן: $BD = a$. נתון: $AB = 3a$.

א. חשב את גודל הזווית ADB .



C היא נקודה מחוץ למשולש.

נתון: $\sphericalangle ADC = 10^\circ$, $CD = BD$.

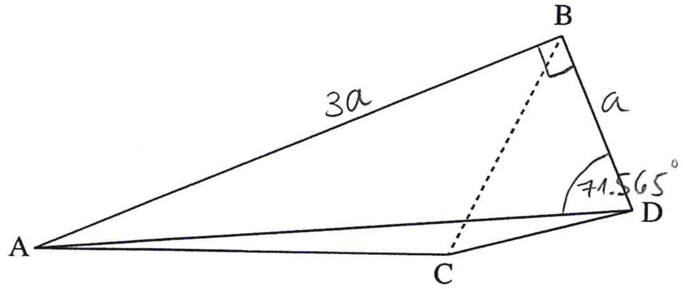
ב. הבע באמצעות a את אורך הקטע BC .

ג. הבע באמצעות a את אורך הקטע AC .

ד. נתון: שטח המשולש BDC הוא 30 סמ"ר.

חשב את שטח המרובע ABDC .

א) נתבונן ב- ΔABD שהוא ישר-זווית:



$$\tan\sphericalangle ADB = \frac{3a}{a}$$

$$\tan\sphericalangle ADB = 3$$

$$\boxed{\sphericalangle ADB = 71.565^\circ}$$

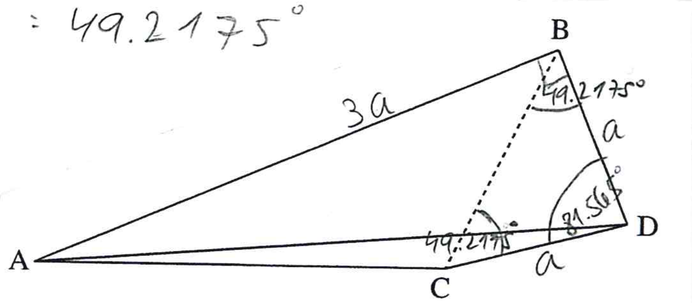
ב) נתבונן ב- ΔBDC שלפי הנתון $CD = BD = a$, הוא שווה-שוקיים.

נחשב את זווית הראש במשולש, $\sphericalangle BDC$:

$$\sphericalangle BDC = 71.565^\circ + 10^\circ = 81.565^\circ$$

נחשב את זוויות הבסיס של המשולש:

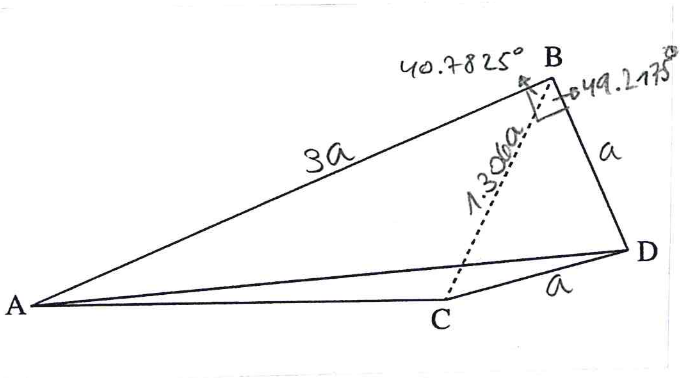
$$\sphericalangle DBC = \sphericalangle DCB = \frac{180^\circ - 81.565^\circ}{2} = 49.2175^\circ$$



נביע את BC באמצעות משפט הסינוסים:

$$\frac{BC}{\sin 81.565^\circ} = \frac{a}{\sin 49.2175^\circ}$$

$$\boxed{BC = 1.306a}$$



ג) נתבונן ב- ΔABC:

נחשב את זווית ABC:

$$\measuredangle ABC = 90^\circ - 49.2175^\circ$$

$$\measuredangle ABC = 40.7825^\circ$$

נביע את AC באמצעות משפט הקוסינוסים:

$$AC^2 = (3a)^2 + (1.306a)^2 - 2\cdot 3a \cdot 1.306a \cdot \cos 40.7825^\circ$$

$$AC^2 = 4.772a^2$$

$$\boxed{AC = 2.185a}$$

ד) נחשב את שטח המרובע ABCD על-ידי חיבור השטחים של שני המשולשים ABC ו- DBC.

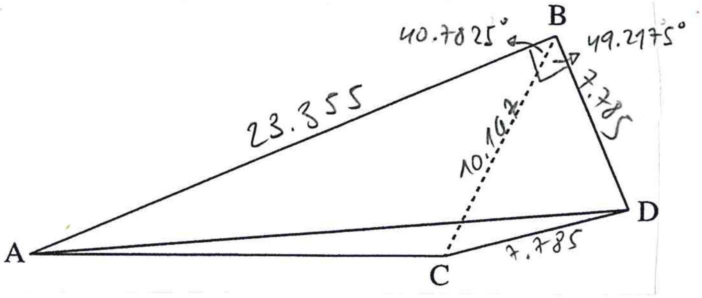
לפי הנתון: $S_{BDC} = 30$ סמ"ר.

נביע את שטח ΔBDC באמצעות a:

$$S_{BDC} = \frac{a \cdot a \cdot \sin 81.565^\circ}{2} = 0.495a^2$$

נשווה את השטח שהבענו לנתון:

$$0.495a^2 = 30$$
$$a^2 = 60.606$$
$$a = 7.785$$



אם כך: $AB = 23.355$

$BC = 10.167$

נחשב את שטח ΔABC:

$$S_{ABC} = \frac{23.355 \cdot 10.167 \cdot \sin 40.7825°}{2}$$

$$S_{ABC} = 77.55$$ סמ"ר

ולכן:

$$S_{ABCD} = 77.55 + 30$$

$$\boxed{S_{ABCD} = 107.55}$$ סמ"ר

6. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2(x-4)^2$, המוגדרת לכל x .

ענה על הסעיפים א-ג. פתח סוגריים אם יש צורך.

א. **(1)** מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(4) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה־ x .

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.

א. (1) מציאת שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים:

עם ציר x : $x^2(x-4)^2=0$

$x^2=0$ $(x-4)^2=0 \; /\sqrt{\ }$

$x=0$ $x-4=0$

$\boxed{(0,0)}$ $x=4$

$\boxed{(4,0)}$

עם ציר y : $f(0)=0^2(0-4)^2=0$

$\boxed{(0,0)}$

נק' החיתוך הן : $\boxed{(0,0),(4,0)}$

(2) מציאת שיעורי נק' הקיצון ע"י גזירה והשוואת הנגזרת לאפס:

$f'(x)=2x(x-4)^2+x^2\cdot 2(x-4)$

$f'(x)=2x(x-4)[x-4+x]$

$\boxed{f'(x)=2x(x-4)(2x-4)}$

$2x(x-4)(2x-4)=0$

$2x=0$ $x-4=0$ $2x-4=0$

$\boxed{x=0}$ $\boxed{x=4}$ $\boxed{x=2}$

מציאת שיעור ה-y של הנקודות החשודות לקיצון ע"י הצבה ב- $f(x)$:

$$f(0) = 0^2(0-4)^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$$
$$f(2) = 2^2(2-4)^2 = 16 \Rightarrow (2,16)$$
$$f(4) = 4^2(4-4)^2 = 0 \Rightarrow (4,0)$$

מציאת סוג הקיצון בעזרת טבלת עליה-ירידה:

x	(-1)	0	(1)	2	(3)	4	(5)
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\downarrow$	0	$\uparrow$	16	$\downarrow$	0	$\uparrow$

הצבת ערכי דיגום בנגזרת:

$f'(-1) = -$

$f'(1) = +$

$f'(3) = -$

$f'(5) = +$

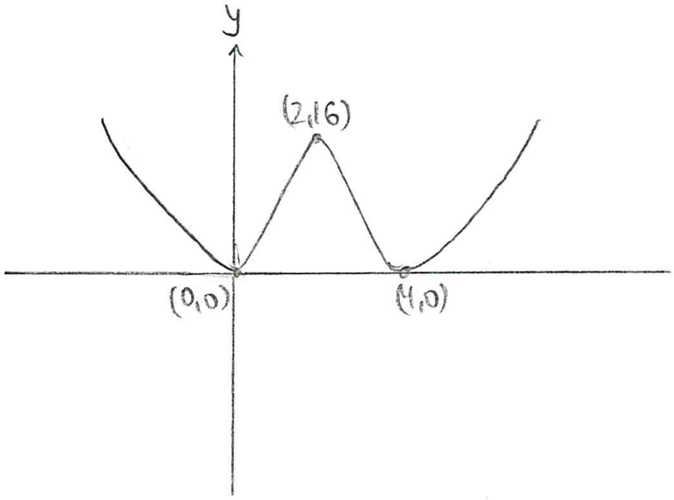
לסיכום, נקודות הקיצון הן:

$(0,0)$ מינימום

$(2,16)$ מקסימום

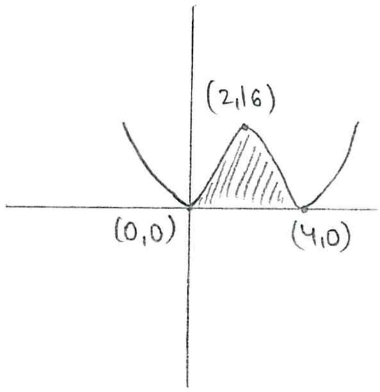
$(4,0)$ מינימום

(3) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$:



(4) תחומי העליות של הפונקציה $f(x)$: $4<x$, $0<x<4$, $4>x>0$, $x<0$.
תחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$: אין.

ב. חישוב השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה וציר ה- x:



על מנת לבצע אינטגרל על $f(x)$, תחילה נפתח סוגריים ונסדר את הביטוי:

$$f(x) = x^2(x-4)^2$$

$$f(x) = x^2(x^2-8x+16)$$

$$\boxed{f(x) = x^4-8x^3+16x^2}$$

$$S = \int_0^4 (x^4 - 8x^3 + 16x^2)\,dx = \left.\frac{x^5}{5} - \frac{8x^4}{4} + \frac{16x^3}{3}\right]_0^4$$

$$\underline{x=4}\ ;\quad \frac{4^5}{5} - \frac{8\cdot 4^4}{4} + \frac{16\cdot 4^3}{3} = \frac{512}{15}$$

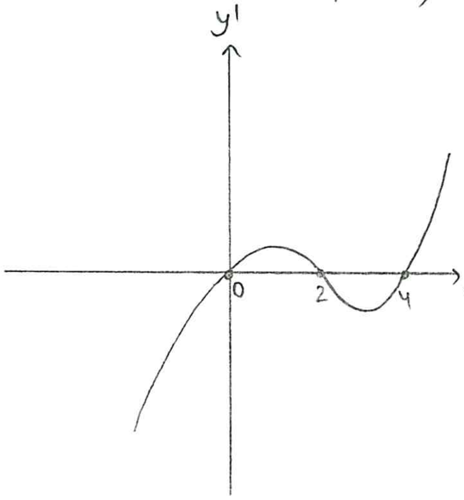
$$x=0\ ;\quad \frac{0^5}{5} - \frac{8\cdot 0^4}{4} + \frac{16\cdot 0^3}{3} = 0$$

$$\boxed{S = \frac{512}{15} - 0 = \frac{512}{15}\ \text{יח"ר} = 34.133\ \text{יח"ר}}$$

ג. סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$:

ניעזר בתחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ על מנת למצוא את תחומי החיוביות והשליליות של הנגזרת.

כמו כן, שיעורי ה-x של נק' הקיצון ב-$f(x)$ מהווים חיתוך עם ציר ה-x ב-$f'(x)$:



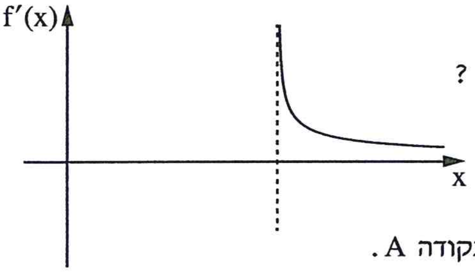
.7 נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{2x-13}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) הראה כי הפונקציה $f(x)$ עולה בכל תחום הגדרתה.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



לפניך גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$?

(2) מהי משוואת האסימפטוטה האנכית של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$?

הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$ חותכים זה את זה בנקודה A .

ג. חשב את שיעורי הנקודה A .

מן הנקודה A הורידו אנך לציר ה־ x .

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי האנך, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x=11$.

א. (1) תחום ההגדרה - ביטוי מתחת לשורש חייב להיות גדול או שווה ל-0:

$2x-13\ge0$

$\boxed{x\ge6.5}$

(2) מציאת חיתוך הפונקציה $f(x)$ עם הצירים:

עם ציר x:

$\sqrt{2x-13}=0 \quad /(\ )^2$

$2x-13=0$

$x=6.5$

$\downarrow$

$\boxed{(6.5,0)}$

עם ציר y:

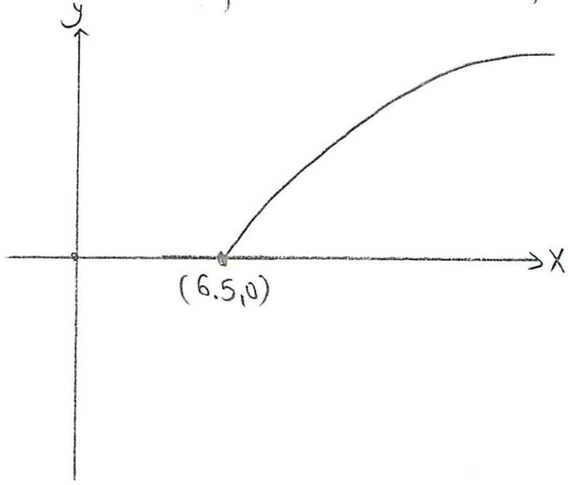
אין, כיוון שלפי תחום ההגדרה $x\ge6.5$.

(3) נראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה ע"י הוכחה כי הנגזרת חיובית עבור תחום הגדרה לה:

$$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x-13}}=\frac{1}{\sqrt{2x-13}}\quad \begin{matrix}\to + \\ \to +\end{matrix}$$

מנה של שני מספרים חיוביים הינה חיובית לכן $f'(x)>0$ בכל תחום ההגדרה ולכן ניתן לומר כי $f(x)$ עולה בכל תחום הגדרתה.

(ד) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$:



ב. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-13}}$

(1) תחום ההגדרה של $f'(x)$:

הביטוי שמתחת לשורש כעת צריך להיות גדול מ-0 ולא שווה לו, כיוון שנמצא במכנה.

$$2x-13>0$$
$$2x>13$$
$$\boxed{x>6.5}$$

(2) $\boxed{x=6.5}$

ג. מציאת נקודת חיתוך בין $f(x)$ ו-$f'(x)$ ע"י השוואה:

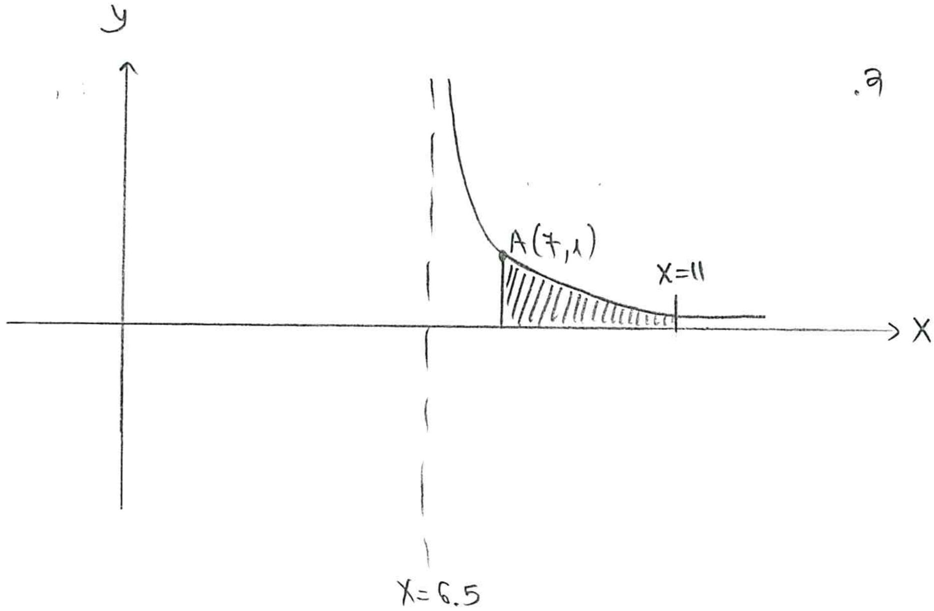
$$\sqrt{2x-13} = \frac{1}{\sqrt{2x-13}} \quad / \sqrt{2x-13}$$
$$2x-13=1$$
$$\boxed{x=7}$$

מציאת שיעור ה-y של נקודת חיתוך כו ע"י הצבה ב-$f(x)$:

$$f(7) = \sqrt{2\cdot7-13} = \boxed{1}$$

$\boxed{\text{כלומר: } A(7,1)}$

ג.



חישוב השטח המבוקש באמצעות אינטגרל לנגזרת.

נזכור כי: תוצאות פעולת האינטגרל של הנגזרת היא הפונקציה הקודמת לה.

$$S = \int_{7}^{11} f'(x)\,dx = f(x)\Big]_{7}^{11} = f(11) - f(7)$$

$$f(11) = \sqrt{2\cdot 11-13} = 3$$

$$f(7) = \sqrt{2\cdot 7-13} = 1$$

$$\boxed{S_{\text{מבוקש}} = 3-1 = 2 \text{ יח"ר}}$$

8. לפניך ציור של גרף הפונקציה $f(x) = \frac{4}{x-1} + 3$ ברביע הראשון.

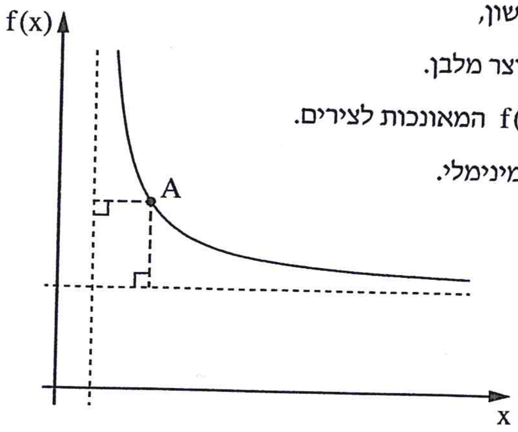
מנקודה A, הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון,

העבירו אנכים לאסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, כך שנוצר מלבן.

א. מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ב. מצא את שיעורי הנקודה A שבעבורה היקף המלבן מינימלי.

ג. חשב את שטח המלבן שהיקפו מינימלי.



א. מציאת האסימפטוטות המאונכות לצירים :

אסימפטוטה אנכית, עפ"י תחום ההגדרה : $\boxed{x=1}$

אסימפטוטה אופקית : $f(x) = \frac{4}{x-1} + 3$

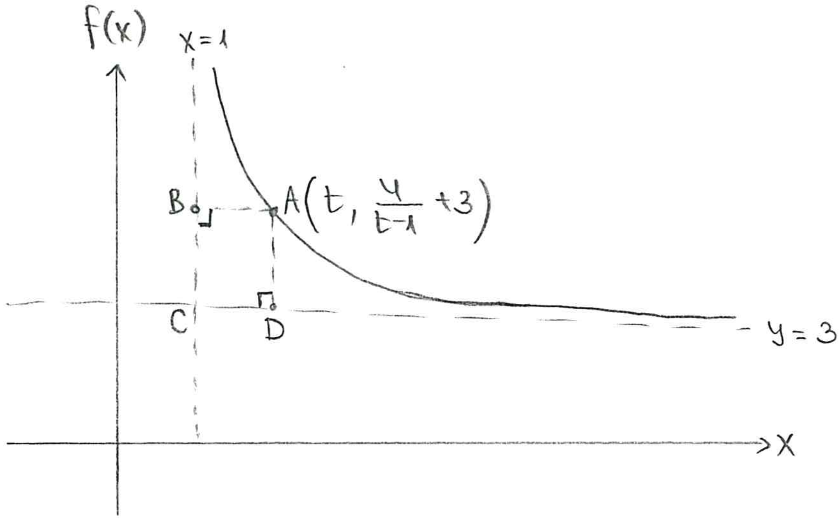
$f(x) = \frac{4+3(x-1)}{x-1}$

$f(x) = \frac{4+3x-3}{x-1}$

$f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$

החזקה הגבוהה ביותר שווה במונה ובמכנה ולכן האסימפטוטה האופקית שווה לחלוקת המקדמים של חזקה זו : $\boxed{y = \frac{3}{1} = 3}$

ב.



נסמן את שיעור ה-x של A ב-t,

ובהתאמה, שיעור ה-y של נקודה זו יהיה: $f(t) = \frac{4}{t-1} + 3$

על כן, A היא: $\left(t, \frac{4}{t-1}+3\right)$

פונקציית היקף המלבן ABCD:

$$g(t) = 2(AB+AD)$$

$$AB = X_A - X_B = t-1$$

$$AD = y_A - y_D = \frac{4}{t-1} + 3 - 3 = \frac{4}{t-1}$$

$$g(t) = 2\left(t-1 + \frac{4}{t-1}\right)$$

נגזור את $g(t)$ על מנת למצוא את ערך ה-t עבורו היקף המלבן מקסימאלי:

$$g'(t) = 2\left[1 + \left(\frac{0\cdot(t-1) - 4\cdot 1}{(t-1)^2}\right)\right]$$

$$g'(t) = 2\left[1 - \frac{4}{(t-1)^2}\right]$$

נשווה את $g'(t)$ ל-0:

$$2\left[1 - \frac{4}{(t-1)^2}\right] = 0$$

$$1-\frac{4}{(t-1)^2}=0.$$

$$1=\frac{4}{(t-1)^2}$$

$$(t-1)^2=4 \quad /\sqrt{\ }$$

$$t-1=2 \qquad\qquad t-1=-2$$

$$\boxed{t=3} \qquad\qquad \boxed{\cancel{t=-1}}$$

נתון כי הנקודה A נמצאת ברביע הראשון. לכן, שיעור ה-x שלה חיובי.
מסיבה זו נפסול את הפתרון $t=-1$.

נבדוק עבור $t=3$ אם אכן מתקבל היקף מינימלי באמצעות טבלת עליה וירידה:

t	(2)	3	(4)
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

$g'(2)=\ominus$

$g'(4)=\oplus$

ניתן לראות עפ"י הטבלה כי עבור $t=3$ היקף המלבן מינימלי.

שיעורי הנקודה A עבור $t=3$ הם:

$$\left(3,\ \frac{4}{3-1}+3\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A\,(3,5)}$$

ג. חישוב שטח המלבן שהיקפו מינימלי:

$$S_{\square} = AB \cdot AD$$

$$S_{\square} = \cancel{(t-1)} \cdot \frac{4}{\cancel{(t-1)}}$$

$$\boxed{S_{\square} = 4 \text{ יח"ר}}$$