

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשע"ח, 2018, מועד ב, שאלון: 35382
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



אלגברה

1. בחנות ספרים הכריזו על מבצע:

אם קונים שני ספרים, מקבלים 50% הנחה על הספר הזול מבין השניים.

א. אורית קנתה במבצע שני ספרים, שמחיריהם לפני המבצע היו 108 שקלים ו-72 שקלים.

(1) חשב כמה שקלים שילמה אורית עבור שני הספרים.

(2) חשב באחוזים מה הייתה ההנחה הכוללת שקיבלה אורית על שני הספרים יחד.

ב. זאב קנה באותו המבצע שני ספרים ושילם עבורם 165 שקלים סך הכול.

לפני המבצע מחיר הספר היקר מביניהם היה גדול ב-39 שקלים ממחירו של הספר הזול מביניהם.

(1) חשב מה היה המחיר לפני המבצע של כל אחד משני הספרים שקנה זאב.

(2) חשב באחוזים מה הייתה ההנחה הכוללת שקיבל זאב על שני הספרים יחד.

בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה.

$$108 + \frac{72}{2} = 144$$

1. 100% (1)

אלויה שילמה	144	שקלים
-------------	-----	-------

(2) מחירי שני הספרים לפני המבצע הכולל

$$108 + 72 = 180$$

אלויה שילמה זכר (100%) 144 שקלים, ולכן

ההנחה שקיבלה בקנייה של שני הספרים היא

$$180 - 144 = 36$$

אחוז ההנחה הוא: $\frac{36}{180} \cdot 100 = 20\%$

ההנחה היא	20%
-----------	-----



ג. (1) X - מחיר הספר הכולל לפני המבצע
 $X+39$ - מחיר הספר הכולל הכולל לפני המבצע

לאתר המבצע יטלם זכאב:

$\frac{X}{2}$ עקוב הספר הכולל

$X+39$ עקוב הספר הכולל

סה"כ יטלם עקוב סעי הספרים 165 טקוים
 זקב המטאלה היטל:

$$\frac{X}{2} + X + 39 = 165$$

$$1\frac{1}{2}X = 165 - 39$$

$$1\frac{1}{2}X = 126 \quad /: 1\frac{1}{2}$$

$$X = 84$$

מחיר הספר הכולל - $X = 84$

מחיר הספר הכולל הכולל - $X + 39 = 84 + 39 = 123$

מחיר	84	הכולל	הספר
מחיר	123	הכולל	הספר



(2) אחיו טני הספיק לפני ההנחה אפי סקיל 2 (1)

$$84 + 123 = 207$$

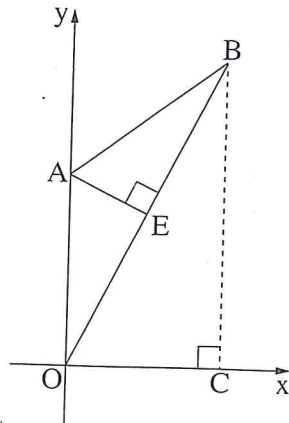
אחיו טני הספיק אלא ההנחה אפי הנתן
 הוא 165 שקלים.

ההנחה בטקלים הוא $207 - 165 = 42$

אחוז ההנחה $\frac{42}{207} \cdot 100 = 20.29$

אחוז ההנחה הוא 20.29%





2. $\angle AEB = 90^\circ$ הוא משולש ישר זווית ($\angle AEB = 90^\circ$).

הקודקוד A נמצא על ציר ה-y (ראה ציור).

משוואת הצלע AE היא $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

א. מצא את שיעורי הקודקוד A.

נתון: המשך הצלע BE עובר דרך ראשית הצירים, O.

ב. מצא את משוואת הישר OB.

ג. מצא את שיעורי הנקודה E.

נתון: שיעור ה-y של הקודקוד B הוא 8.

ד. הראה כי המשולש OAB הוא משולש שווה שוקיים.

ה. מן הנקודה B העבירו אנך לציר ה-x, החותך את ציר ה-x בנקודה C.

ה. חשב את היקף המרובע ABCO.

א. הקודקוד A נמצא על ציר ה-y ולכן $x=0$.
 מצא את משוואת הצלע AE ונקודה:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 5 = 5$$

$$A(0, 5)$$

ב. AE מאונק ל-BO ולכן אנכית שינועיהם
 שווה ל-1, כלומר השינוע של AE הוא הופכי
 לשינוע של BO.

$$m_{AE} = -\frac{1}{2}$$



אזכרתי הטיעון של OB הוא:

$$-\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{הוכיח}} -\frac{2}{1} \xrightarrow{\text{לג}} +2$$

אם קצת יותר הנחיה:

$$m_{AE} \cdot m_{OB} = -1$$

$$-\frac{1}{2} \cdot m_{OB} = -1$$

$$m_{OB} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

נמצא את משוואת הטיעון OB זה:

הנקודה $(0, 0)$ והטיעון 2 .

$$y - 0 = 2(x - 0)$$

$$\boxed{y = 2x}$$

ג. הנקודה E היא נקודת חיתוך בין הטיעונים AE ו- OB , אז נציב את משוואת OB ונפתור את המערכת:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 5 \\ y = 2x \end{cases}$$



$$-\frac{1}{2}x + 5 = 2x$$

$$-\frac{1}{2}x - 2x = -5$$

$$-2\frac{1}{2}x = -5 \quad /: -2\frac{1}{2}$$

$$x = 2$$

$$y = 2x$$

$$y = 2 \cdot 2 = 4$$

$$E(2, 4)$$

3. (מצא) את מידות הנקודה B

ע"פ הננין $y(B) = 8$ $y = 8$ ב B
 קתעולת הננין BO מוקדן:

$$8 = 2x \quad /: 2$$

$$x = 4$$

$$E(4, 8)$$

ע"פ נכחא ממשולש OAB הוא מואה טלקום:

$$A(0, 5) \quad d_{AB} = \sqrt{(0-4)^2 + (5-8)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$B(4, 8)$$



$$d_{AO} = 5$$

$$AO = AB = 5$$

ולכן המעולה AOB הוא שווה שוקיים.

הערה: ניתן לראות גם בצדדים אחרים.

הי. היקף המולקא הוא:

$$AB + BC + CO + AO$$

(מצא את אלוכם ונתקדם!)

AB = 5 עדי סגילי

$$BC = \gamma(B) = 8$$

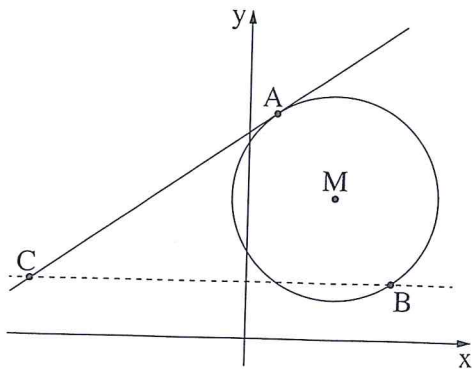
$$OC = X_{(C)} = X_{(B)} = 4$$

AO = 5 עדי סגילי

$$\text{היקף המולקא} = 5 + 8 + 4 + 5 = 22$$

היקף מולקא ABCO הוא 22 יחידות





3. נתון מעגל שמרכזו בנקודה $M(3, 5)$ ורדיוסו R .
העבירו משיק למעגל בנקודה $A(1, 8)$, כמתואר בציור.

א. (1) חשב את רדיוס המעגל, R .

(2) כתוב את משוואת המעגל.

ב. (1) מצא את השיפוע של הישר AM .

(2) מצא את משוואת המשיק.

נתון: AB הוא קוטר במעגל.

ג. מצא את שיעורי הנקודה B .

דרך הנקודה B העבירו ישר המקביל לציר ה- x (הישר המקוקו בציור).

הישר חותך את המשיק בנקודה C .

ד. חשב את שטח המשולש ABC .

$$R = d_{(A,M)} = \sqrt{(1-3)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{13} \quad (1) \quad \text{א.} \quad \text{א.} \quad \text{א.}$$

$$A(1, 8)$$

$$M(3, 5)$$

$$R = \sqrt{13} = 3.606$$

(2) איננו יודעים עדין הנתון הוא $(3, 5)$

רדיוס הוא $\sqrt{13}$ או 3.606 , אכן

משוואת המעגל היא:

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = (\sqrt{13})^2$$

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 13$$



(1) $m_{AM} = \frac{5-8}{3-1} = \frac{-3}{2} = -1\frac{1}{2}$

(3,5)
(1,8)

$m_{AM} = -1\frac{1}{2}$

(2) המשיך מאורך (כ/צ)ם בקושרת ההטקה
 וכן הטיבד ט המטין הוט הוטני ונדי
 מטיבד הכיוס AM, א מכלית טיבדיה
 מוט -1

$m_{AM} = -1\frac{1}{2}$

$-1\frac{1}{2} = \frac{-3}{2} \xrightarrow{\text{הכנס}} -\frac{2}{3} \xrightarrow{\text{הפך}} \frac{2}{3}$

$m_{AM} \cdot m_{\text{משיך}} = -1$

$-1\frac{1}{2} \cdot m_{\text{משיך}} = -1$

$m_{\text{משיך}} = \frac{-1}{-1\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

נמצא את משואת המטין ע"פ הטיבד $m = \frac{2}{3}$
 והנקודה A(1,8)



$$y - 8 = \frac{2}{3}(x - 1)$$

$$y - 8 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + 8$$

$$y = \frac{2}{3}x + 7\frac{1}{3}$$

AB הוא קוטר וזמן נקודת אמצע הנמצא
 הוא נקודת האמצע של הקוטר AB
 נמצא קוטר אמצע קוטר:

$$A(1, 8)$$

$$M(3, 5)$$

$$B(x, y)$$

$$3 = \frac{1 + x_B}{2} \quad / \cdot 2$$

$$6 = 1 + x_B$$

$$x_B = 5$$

$$5 = \frac{8 + y_B}{2} \quad / \cdot 2$$

$$10 = 8 + y_B$$

$$y_B = 2$$

$$B(5, 2)$$



3. נמצא את שיעורי הנקודה C.

$$y(C) = y(B) = 2$$

נציב $y=2$ במשוואת המשיק ונקבל את שיעור ה-x של הנקודה.

$$y = \frac{2}{3}x + 7\frac{1}{3}$$

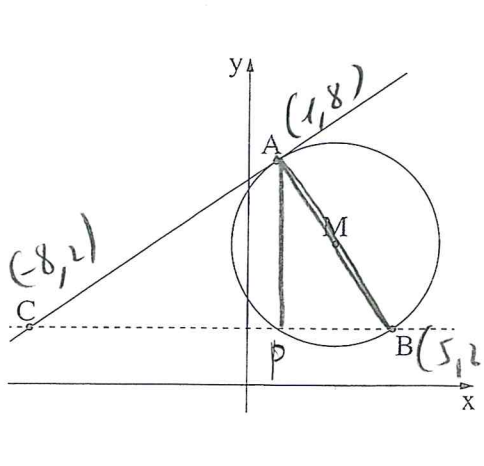
$$2 = \frac{2}{3}x + 7\frac{1}{3}$$

$$2 - 7\frac{1}{3} = \frac{2}{3}x$$

$$-5\frac{1}{3} = \frac{2}{3}x \quad /: \frac{2}{3}$$

$$x = -8$$

$$C(-8, 2)$$



$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AP}{2}$$

$$BC = 8 + 5 = 13$$

$$AP = 8 - 2 = 6$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{13 \cdot 6}{2} = 39$$

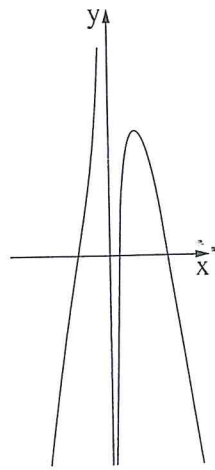
שטח המשווא ABC הוא 39 יח"ר



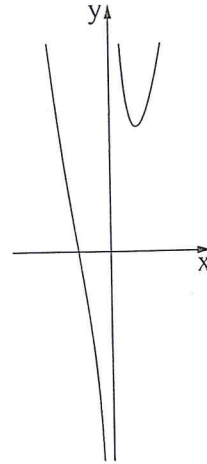
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

4. נתונה הפונקציה $f(x) = 0.5x^2 + \frac{8}{x}$.

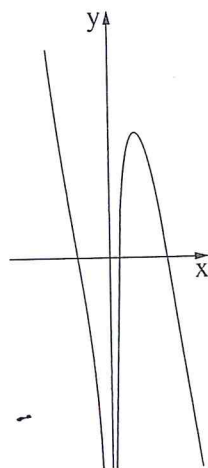
- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
- ב. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.
- ג. האם הפונקציה $f(x)$ עולה או יורדת בנקודה שבה $x = -1$? נמק.
- ד. לפניך ארבעה גרפים (I-IV). איזה מהם הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$? נמק.



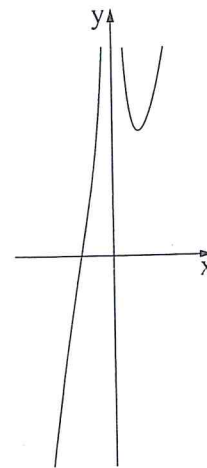
II



I



IV



III



$x \neq 0$ 4

$f'(x) = 0$ הנקודות הקיצון

$$f'(x) = x - \frac{8}{x^2}$$

$$x - \frac{8}{x^2} = 0 \quad / \cdot x^2$$

$$x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = 8$$

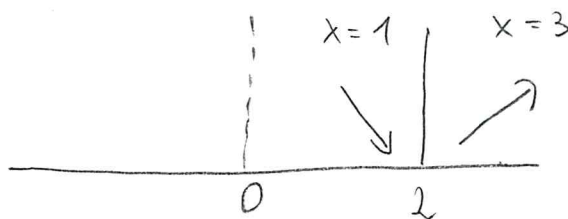
$$x = \sqrt[3]{8}$$

$$x = 2$$

$$f(2) = 0.5 \cdot 2^2 + \frac{8}{2} = 6$$

$$(2, 6)$$

למצוא הנקודה הקיצון
יש להציב את הנקודה הנקודה הקיצון



$$f'(x=1) = 1 - \frac{8}{1^2} = -7 \quad \text{הכונקציה יורדת}$$

$$f'(x=3) = 1 - \frac{8}{3^2} = +\frac{1}{9} \quad \text{הכונקציה עולה}$$

הכונקציה עולה או יורדת. מיווצה על ידי חלקן הנקלטים
היא נקלטה מינימלית.

$$\boxed{(2, 6) \text{ מינימלית}}$$

ג. נציב $x = -1$ במערכת הכונקציה.
אם היעוצה חיובית הכונקציה עולה, ואם הילוצה
שלילית הכונקציה יורדת.

$$f'(x) = x - \frac{8}{x^2}$$

$$f'(-1) = -1 - \frac{8}{(-1)^2} = -1 - \frac{8}{1} = -9$$

היעוצה שלילית חלקן הכונקציה יורדת

$$\boxed{x = -1 \text{ הכונקציה יורדת בקלציה}}$$



3. ארבעה יט נקודות מניחאם ק- (2,6) נחמו
 בריבוע הוואטון אכן גרף II וגרף IV לא
 מתאימים.

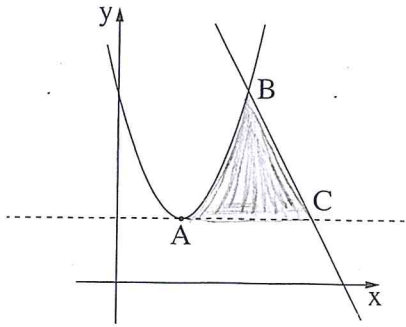
גרף סעיף ג' הוואטון יורגר ק $x = -1$
 גרף III הוואטון איה מטמאן $x = 0$ אכן
 גרף זה לא מתאים.

גרף המתאים הוא גרף I :

הוואטון אינה עומת ק $x = 0$, נקודת הקיבון
 היא בריבוע הוואטון, והיא יורגר בתוך השלול
 של ציר ה-x.

גרף I





5. בצירוף שלפניך מתוארים הגרפים

של הפונקציות $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $g(x) = -2x + 14$.

שני הגרפים נחתכים בנקודה $B(4, 6)$.

הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.

א. מצא את שיעורי הנקודה A .

הישר $y = 2$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A (הישר המקווקו בצירוף).

הישר המשיק חותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה C (ראה ציור).

ב. מצא את שיעורי הנקודה C .

ג. מצא את השטח האפור בצירוף, המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ ועל ידי הישר $y = 2$.

א. בקיזת המינימום $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$2x - 4 = 0$$

$$2x = 4 \quad /:2$$

$$x = 2$$

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 2$$

$A(2, 2)$

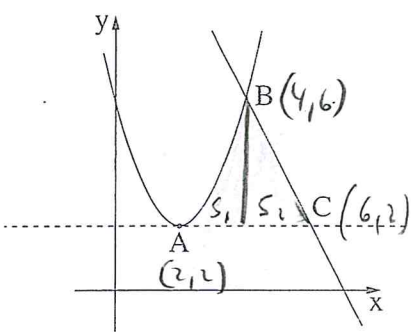
$$y_C = y_A = 2$$

הנקודה C נמצאת על הישר $g(x) = -2x + 14$ וכן נמצאת על הישר $y = 2$ (הישר המשיק בנקודה A)



נקודת :
 $2 = -2x + 14$
 $2x = 12 \quad / : 2$
 $x = 6$

$C(6, 2)$



ע. אר הטעם נמצא גטני חלקיז, כואסי פיוול הטעם הוא בקוונב B

חיטוב טעם

\int_2^4

ע גואל הטעם

הכנס הטועק/ול

$(x^2 - 4x + 6) - (2) = x^2 - 4x + 6 - 2 = x^2 - 4x + 4$

חיטוב הטעם!

$\int_2^4 (x^2 - 4x + 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x \right]_2^4 =$

$\left(\frac{4^3}{3} - \frac{4 \cdot 4^2}{2} + 4 \cdot 4 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{4 \cdot 2^2}{2} + 4 \cdot 2 \right) =$

$5 \frac{1}{3} - 2 \frac{2}{3} = 2 \frac{2}{3}$



חיטוב הטח S_2

\int_4^6

בקואל האוינסגה

הפיט פונקציון

$$(-2x + 14) - 2 = -2x + 14 - 2 = -2x + 12$$

חיטוב הטח

$$\int_4^6 (-2x + 12) dx = \left[-\frac{2x^2}{2} + 12x \right]_4^6 =$$

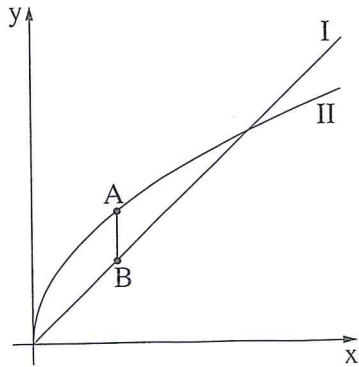
$$\left(\frac{-2 \cdot 6^2}{2} + 12 \cdot 6 \right) - \left(\frac{-2 \cdot 4^2}{2} + 12 \cdot 4 \right) =$$

$$36 - 32 = 4$$

$$S_1 + S_2 = 2\frac{2}{3} + 4 = 6\frac{2}{3}$$

הטח הוא $6\frac{2}{3}$!





6. בציור שלפניך מתוארים שני גרפים שמשוואותיהם הן:

I. $y = x$

II. $y = \sqrt{x}$

הנקודה A נמצאת על גרף II, והנקודה B נמצאת על גרף I

כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y.

הנקודות A ו-B נמצאות בין נקודות החיתוך של הגרפים, כמתואר בציור.

א. מצא את שיעור ה-x של הנקודה A שבעבורו אורך הקטע AB

הוא מקסימלי.

ב. חשב את האורך המקסימלי של הקטע AB.

א. נוסף ק-x אלא שיעור ה-x של הנקודה A

אנחנו שהנקודה A נמצאת על הנוקליד $y = \sqrt{x}$

ש-שיעור ה-y של הנקודה A הוא \sqrt{x}

א. נק: $A(x, \sqrt{x})$

שיעורי הנקודה B:

$$x_{(B)} = x_{(A)} = x$$

הנקודה B נמצאת על הישר $y=x$

א. נוסף ק-x

א. נק: $B(x, x)$



נניח קאמפונט x אה האורק AB

$$AB = \sqrt{x} - x = \frac{Y}{(A)} - \frac{Y}{(B)}$$

הפונקציה היא:

אורי AB

$$f(x) = \sqrt{x} - x$$

נמצא את נקודת הקיצון

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = 0 \quad / \cdot 2\sqrt{x}$$

$$1 - 2\sqrt{x} = 0$$

$$-2\sqrt{x} = -1 \quad / \cdot -2$$

$$\sqrt{x} = \frac{-1}{-2}$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

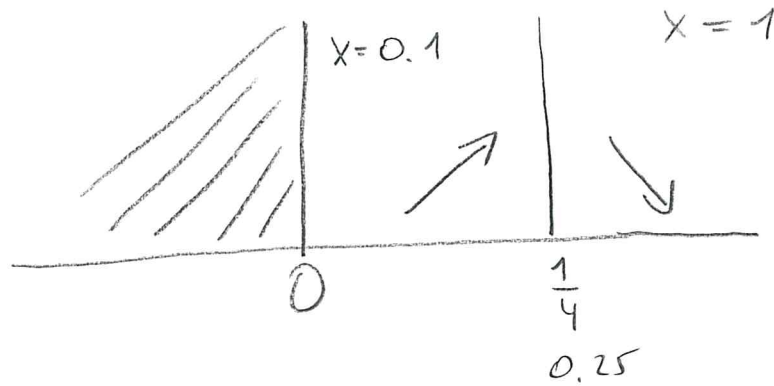
נעלה את x האגנוז בקוואד יתקבל:

$$(\sqrt{x})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x = \frac{1}{4}$$



נראה שהינקודה היא נקודת מקסימום קיצונית
אם כי ויודעה!



$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$$

$$f'(0.1) = \frac{1}{2\sqrt{0.1}} - 1 = \frac{1}{0.632} - 1 = 0.58$$

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$x_{(A)} = \frac{1}{4}$$

נראה כי נקודה $x = \frac{1}{4}$ היא נקודת מקסימום קיצונית
אם כי ויודעה!

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

הנאליק המקסימלי של AB הוא $\frac{1}{4}$ יחידות

