פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשע"ח, 2018, שאלון: 35481

מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

1. המרחק בין עיר א ובין עיר ב הוא 126 ק"מ.

בשעה 8:00 יצאה מכונית מעיר א לעיר ב.

בשעה 8:30 יצא רוכב אופניים מעיר ב לעיר א.

המכונית ורוכב האופניים נפגשו בשעה 9:30, והמשיכו בדרכם.

15 דקות לאחר הפגישה הגיעה המכונית לעיר ב.

המכונית ורוכב האופניים לא שינו את מהירויותיהם בזמן הנסיעה.

א. מצא את מהירות הנסיעה של המכונית ואת מהירות הנסיעה של רוכב האופניים.

יום לאחר מכן, יצאו המכונית ורוכב האופניים זה לקראת זה באותו הזמן.

המכונית יצאה מעיר ב לעיר א, ואילו רוכב האופניים יצא מעיר א לעיר ב.

המכונית נסעה במהירות קבועה הגדולה ב־ a קמ"ש מן המהירות שבה נסעה ביום שלפני כן,

ואילו רוכב האופניים נסע במהירות קבועה הקטנה ב־ a קמ"ש מן המהירות שבה נסע ביום שלפני כן.

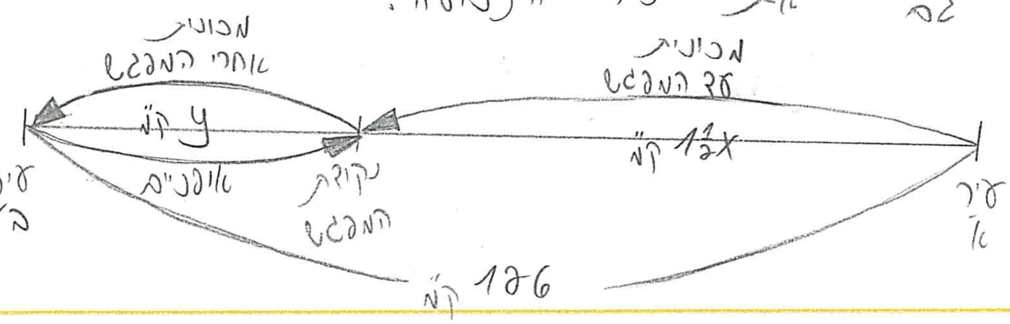
המכונית ורוכב האופניים נפגשו לאחר t שעות.

ב. מצא את t.

נכניס את הנתונים לטבלת תנועה (הסברים בעמוד הבא):

		מהירות	זמן	דרך
עד הפגישה	מכונית	x	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}x$
	אופניים	y	1	y
אחרי הפגישה	מכונית	x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}x$

נצייר גם את ציור התנועה:



הסברים למילוי הטבלה:

1) נסמן את מהירות המכונית ב-x ואת מהירות האופניים ב-y.

2) נתון כי המכונית יצאה בשעה 08:00 והאופניים יצאו בשעה 08:30. נתון גם שהם נפגשו בשעה 09:30, לכן זמן הנסיעה של המכונית עד הפגישה היה $1\frac{1}{2}$ שעות וזמן הנסיעה של האופניים עד הפגישה היה שעה אחת.

3) הדרך שעברה המכונית עד הפגישה היא $1\frac{1}{2}x$ והדרך שעבר רוכב האופניים עד הפגישה היא y.

4) לאחר הפגישה, נסעה המכונית 15 דקות ($\frac{1}{4}$ שעה) באותה מהירות והגיעה לעיר ב', ולכן הדרך שהיא עברה היא $\frac{1}{4}x$.

א. לפי הנתון, סכום המרחקים שעברו המכונית ורוכב האופנ"ים עד הפגישה הוא 126 קמ" ולכן:

$$1\frac{1}{2}x + y = 126.$$

לפי ציר התנועה, ניתן לראות כי המכונית עברה, מנקודת הפגישה ועד עיר ב', y קמ" ולכן:

$$\frac{1}{4}x = y$$

נפתור מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים:

$$\begin{cases} 1\frac{1}{2}x + y = 126 \\ \frac{1}{4}x = y \end{cases}$$

$$1\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 126$$

$$1\frac{3}{4}x = 126$$

$$x = 72$$

$$y = \frac{1}{4} \cdot 72$$

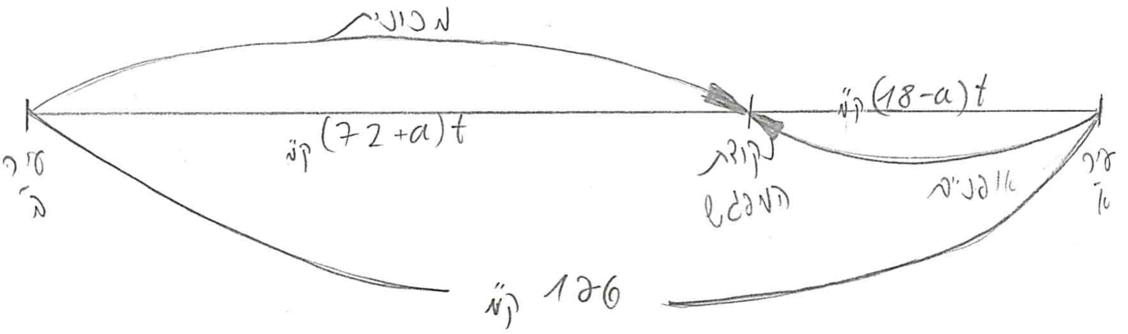
$$y = 18$$

מהירות הנסיעה של המכונית היא 72 קמ"ש
מהירות הנסיעה של רוכב האופנ"ים היא 18 קמ"ש

נכניס את הנתונים החדשים לטבלת תנועה (הסברים בהמשך):

	מהירות	זמן	דרך
מכונית	$72+a$	t	$(72+a)\cdot t$
אופניים	$18-a$	t	$(18-a)\cdot t$

נצייר גם את ציור התנועה:



הסברים למילוי הטבלה:

① מהירות המכונית הייתה 72 קמ"ש. מהירותה יום לאחר מכן הי': $72+a$ קמ"ש.
מהירות רוכב האופניים הייתה 18 קמ"ש. מהירותו יום לאחר מכן הי': $18-a$ קמ"ש.

② זמן הנסיעה של המכונית ושל רוכב האופניים זהה ושווה ל- t.

③ הדרך שעברה המכונית עד הפגישה הי': $(72+a)t$ ק"מ.
הדרך שעבר רוכב האופניים עד הפגישה הי': $(18-a)t$ ק"מ.

ה. לפי הנתון, סכום המרחקים שנסעו רוכב האופנ"ים והמכונית הוא 126 ק"מ ולכן:

$$(72+a)t+(18-a)t=126$$

$$72t+at+18t-at=126$$

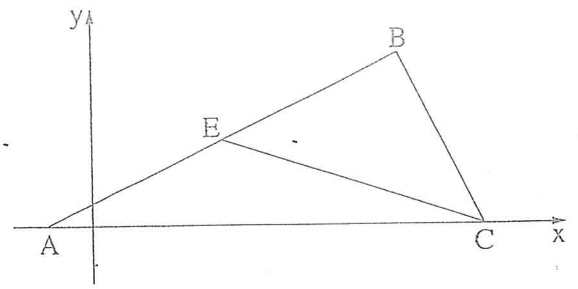
$$90t=126$$

$$\boxed{t=1.4 \text{ שעות}}$$

2. CE הוא תיכון במשולש ABC.

נתון: $A(-1,0)$, $B(7,4)$,

הקודקוד C נמצא על ציר ה־ x (ראה ציור).



א. מצא את שיעורי הנקודה E.

נתון: $EB = BC$,

שיעור ה־ x של הקודקוד C גדול משיעור ה־ x של הקודקוד B.

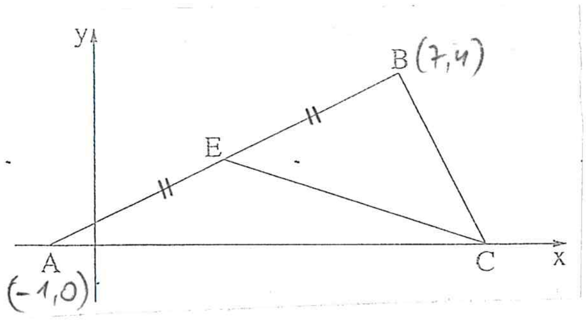
ב. מצא את שיעורי הקודקוד C.

מן הנקודה B הורידו אנך לציר ה־ x.

האנך שהורידו חותך את הקטע CE בנקודה K ואת ציר ה־ x בנקודה F.

ג. (1) מצא את שיעורי הנקודה K ואת אורך הקטע KF.

(2) חשב את שטח המשולש EKF.



נוסיף את הנתונים לשרטוט:

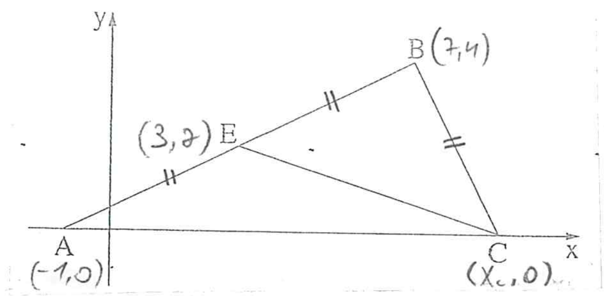
א. נתון ש-CE תיכון ל-AB.

על-מנת למצוא את הנקודה E נשתמש בנוסחה לאמצע קטע:

$$X_E = \frac{7+(-1)}{2} \qquad y_E = \frac{0+4}{2}$$

$$X_E = 3 \qquad y_E = 2$$

$$\boxed{E(3,2)}$$



נוסיף את הנקודה $E(3,2)$ ואת הנתון ש: $EB = BC$ לשרטוט.
נגדיר את הנקודה C כ: $(X_c, 0)$.

ב. נמצא את אורך EB באמצעות נוסחת המרחק:

$$d_{EB} = \sqrt{(3-7)^2+(2-4)^2}$$

$$d_{EB} = 2\sqrt{5}$$

נמצא את אורך BC באמצעות X_c, באמצעות נוסחת המרחק:

$$d_{BC} = \sqrt{(X_c-7)^2+(0-4)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{X_c^2-14X_c+49+16}$$

$$d_{BC} = \sqrt{X_c^2-14X_c+65}$$

כעת נשווה בין שני האורכים שמצאנו:

$$\sqrt{X_c^2-14X_c+65} = 2\sqrt{5}$$

$$X_c^2-14X_c+65 = 20$$

$$X_c^2-14X_c+45 = 0$$

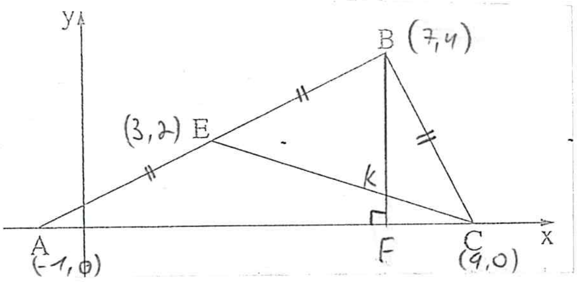
נפתור באמצעות נוסחת השורשים:

$$X_{c_{1,2}} = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4\cdot 1\cdot 45}}{2\cdot 1}$$

$X_{c_1} = 9$ $\qquad$ $X_{c_2} = 5$

לפי הנתון, ערך ה-X של C גדול מערך ה-X של B

ולכן התשובה היא $X_c = 9$. $\qquad \boxed{C(9,0)}$



נוסיף את הנקודה $C(9,0)$ ואת ואת האנך מ-B לציר ה-X לשרטוט:

ג. (1) הנקודות k ו- F נמצאות על ישר המאונך לציר X ועובר דרך הנקודה $B(7,4)$ ולכן: $X_k = 7$ וגם $X_F = 7$.

נמצא את שיפוע EC באמצעות הנוסחה לשיפוע והנקודות $E(3,2)$ ו- $C(9,0)$:

$$m_{EC} = \frac{2-0}{3-9}$$

$$m_{EC} = -\frac{1}{3}$$

נמצא את משוואת EC באמצעות הנוסחה למשוואת ישר, הנקודה $C(9,0)$ והשיפוע $m_{EC} = -\frac{1}{3}$:

$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x-9)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 3$$

נמצא את הנקודה K על-ידי הצבת $X_k = 7$ במשוואת EC:

$$y = -\frac{1}{3}\cdot 7 + 3$$

$$y = \frac{2}{3}$$

ולכן הנקודה K היא: $\boxed{K\left(7, \frac{2}{3}\right)}$

הנקודה F נמצאת על ציר ה-X ולכן היא: $F(7,0)$.

הקטע KF מאונך לציר ה-X ולכן אורכו הוא ההפרש:

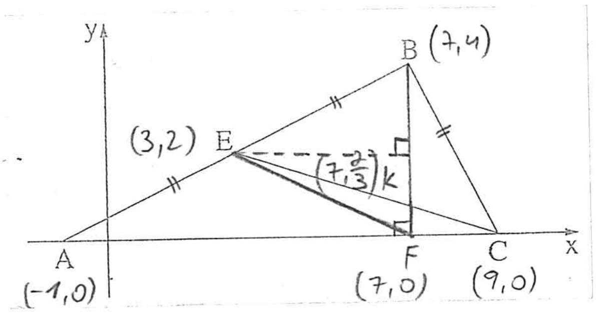
$$KF = X_k - X_F$$

$$KF = \frac{2}{3} - 0$$

$$\boxed{KF = \frac{2}{3}}$$

ג. (2)

נוסיף את הנקודות שמצאנו ואת המשולש EKF לשרטוט:



הקטע KF מאונך לציר X.
נצריך את הגובה החיצוני במשולש EKF מהנקודה E להמשך הקטע KF. הגובה מאונך לציר ה-y ולכן ניתן לחשב את אורכו על-ידי חיסור ערך ה-X של הישר BF מערך ה-X של הנקודה E:

$$h = 7 - 3 => 4$$

נחשב את שטח המשולש EKF באמצעות הגובה $h=4$
והקטע $KF=\frac{2}{3}$ שמצאנו בסעיף ג. (1):

$$S_{EKF}=\frac{4\cdot\frac{2}{3}}{2}$$

$$\boxed{S_{EKF}=\frac{4}{3}\text{ יח"ר}}$$

3. בסל יש 2 תפוחים ומספר מסוים של אפרסקים.

טל הוציאה באקראי מן הסל שני פירות זה אחר זה ללא החזרה.

ההסתברות שהיא הוציאה שני תפוחים היא $\frac{1}{36}$.

א. מצא כמה אפרסקים היו בסל לפני שטל הוציאה ממנו פירות.

ב. מהי ההסתברות שהפרי השני שהוציאה טל היה תפוח?

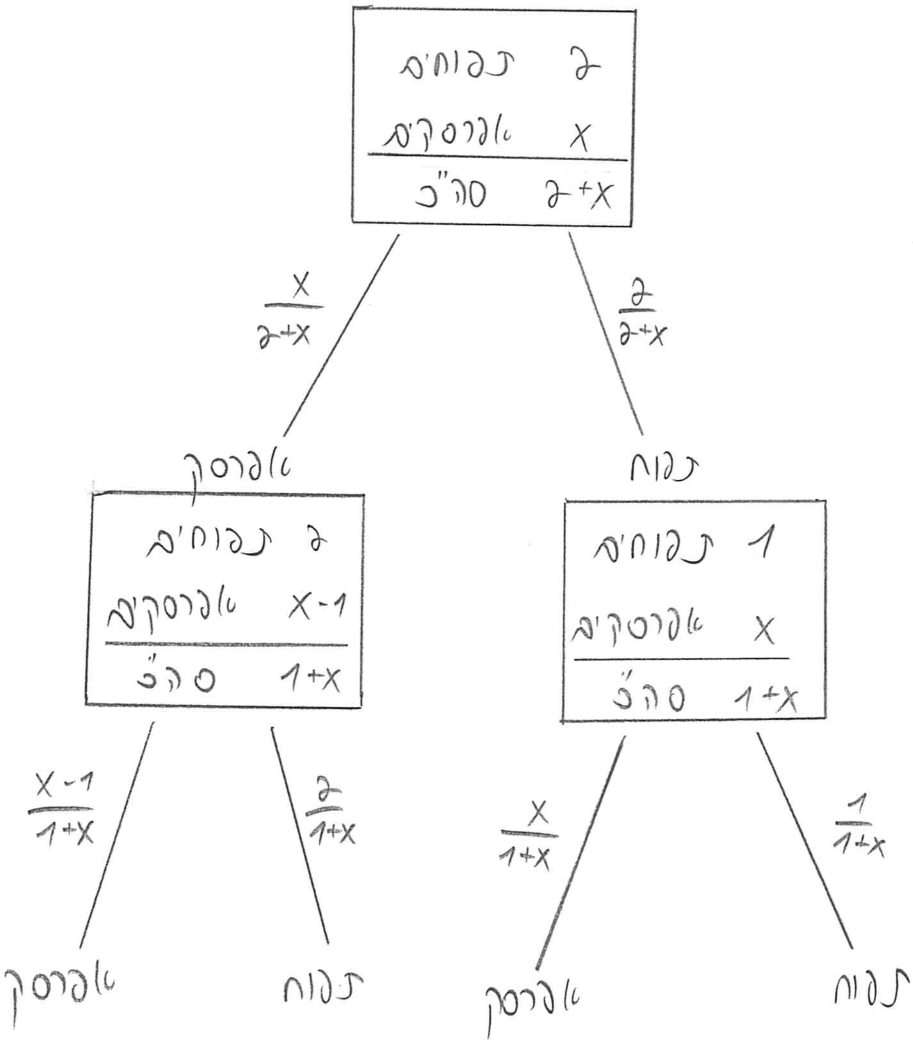
ג. (1) חשב את ההסתברות שטל הוציאה מן הסל שני פירות מאותו הסוג.

(2) ידוע שטל הוציאה מן הסל שני פירות מאותו הסוג. מהי ההסתברות שהיא הוציאה שני אפרסקים?

נסמן את כמות האפרסקים שבסל כ- x.

כמות הפירות הכוללת שיש בסל היא x+2.

נשרטט דיאגרמת עץ המתאימה לנתונים:



א. נביע את ההסתברות להוציא שני תפוחים באמצעות X:

$$P(\text{שני תפוחים}) = \frac{2}{2+x} \cdot \frac{1}{1+x}$$

$$P(\text{שני תפוחים}) = \frac{2}{(2+x)(1+x)}$$

לפי הנתון, $P(\text{שני תפוחים}) = \frac{1}{36}$ ולכן:

$$\frac{2}{(2+x)(1+x)} = \frac{1}{36}$$

$$72 = (2+x)(1+x)$$

$$72 = 2+2x+x+x^2$$

$$x^2+3x-70=0$$

נציב בנוסחת השורשים:

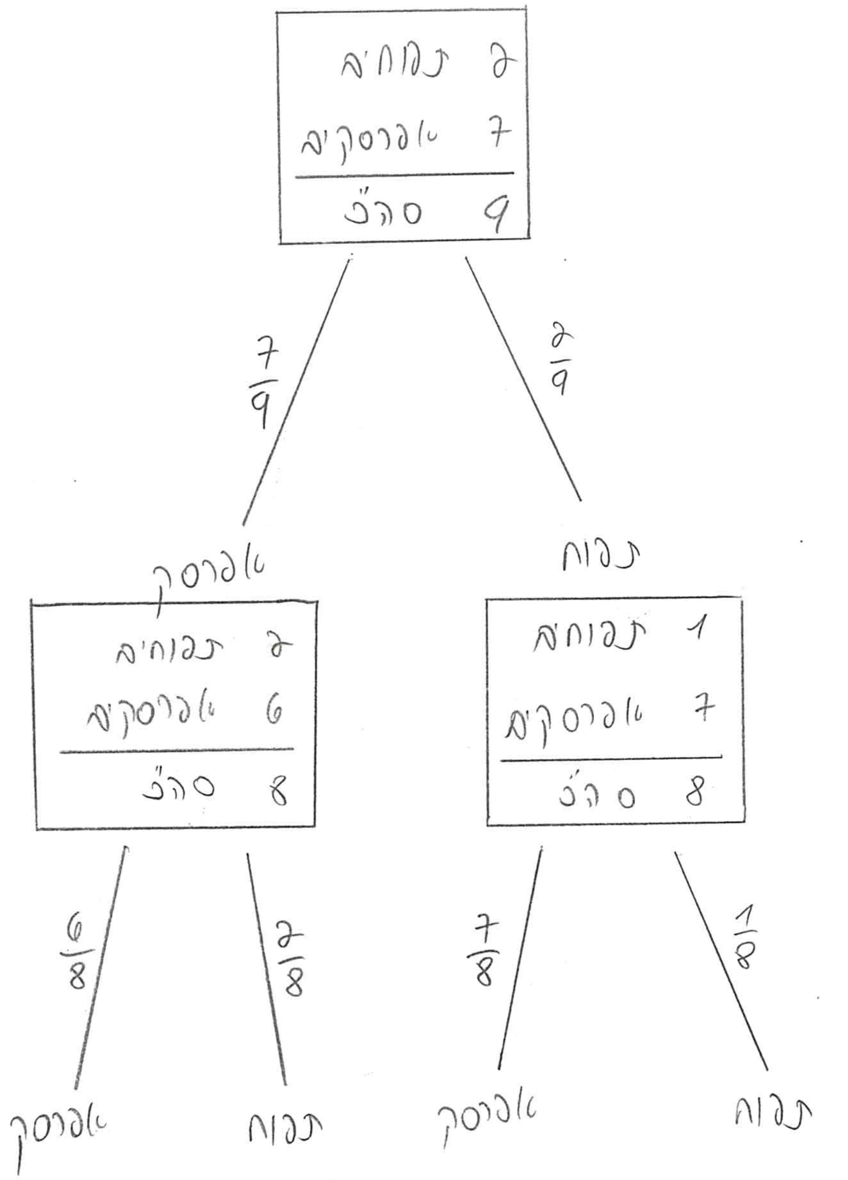
$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot(-70)}}{2\cdot 1}$$

$$x_1 = 7 \qquad x_2 = -10$$

מספר האפרסקים אינו יכול להיות שלילי ולכן

כמות האפרסקים שהיו בסל לפני שלב הוצאה ממנו פירות הוא 7.

נשרטט שוב את דיאגרמת העץ עם ה-X שמצאנו:



ב. ההסתברות שהפרי השני שטל הוציאה היה תפוח:

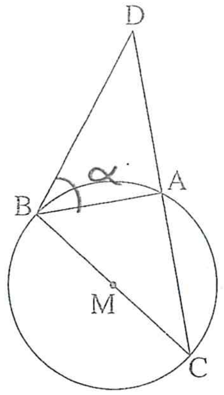
$$P\left(\begin{matrix}\text{פרי שני}\\\text{הוא תפוח}\end{matrix}\right) = P\left(\begin{matrix}\text{תפוח}\\\text{תפוח}\end{matrix}\right) + P\left(\begin{matrix}\text{אפרסק}\\\text{תפוח}\end{matrix}\right) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{7}{9}\cdot\frac{2}{8} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

ג. (1) ההסתברות שטל הוציאה שני פירות מאותו הסוג:

$$P\left(\begin{matrix}\text{שני פירות}\\\text{מאותו הסוג}\end{matrix}\right) = P\left(\begin{matrix}\text{תפוח}\\\text{תפוח}\end{matrix}\right) + P\left(\begin{matrix}\text{אפרסק}\\\text{אפרסק}\end{matrix}\right) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8} = \boxed{\frac{11}{18}}$$

ג.(2) ההסתברות שלא הוציאה שני אפרסקים, אם ידוע
שהיא הוציאה שני פירות מאותו הסוג:

$$P\left(\text{שני אפרסקים} \,/\, \text{שני פירות מאותו סוג}\right) = \frac{P\left(\text{אפרסק} \cap \text{אפרסק}\right)}{P\left(\text{שני פירות מאותו הסוג}\right)} = \frac{\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}}{\frac{11}{18}} = \boxed{\frac{21}{22}}$$



4. בציור שלפניך מתואר מעגל שמרכזו M ורדיוסו R.

BC הוא קוטר במעגל. הנקודה D נמצאת מחוץ למעגל.

הקטע DC חותך את המעגל בנקודה A.

נתון: $\sphericalangle ABD = \frac{1}{2}\sphericalangle AMC$.

א. הוכח ש־ BA הוא חוצה זווית במשולש DBC.

ב. הוכח: $\Delta CBD \sim \Delta CMA$.

ג. הוכח כי MA הוא קטע אמצעים במשולש DBC.

ד. נתון: המשולש ABM הוא משולש שווה צלעות.

הבע את שטח המשולש CBD באמצעות רדיוס המעגל.

א.

	טענה	נימוק
1	נמתח קו בין M ל- A	בניית עזר
2	$MB = MA = MC = R$	נתון + רדיוסים במעגל שווים זה לזה.
3	BC קוטר במעגל	נתון
4	$\sphericalangle BAC = 90^\circ$	זווית היקפית במעגל הנשענת על קוטר שווה ל- 90°.
5	$\sphericalangle ABD = \frac{1}{2}\sphericalangle AMC$	נתון
6	$\sphericalangle ABD = \alpha$	סימון
7	$\sphericalangle AMC = 2\alpha$	הצבה בשורה 6.
8	$\sphericalangle ABC = \alpha$	זווית היקפית במעגל שווה לחצי מהזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת + שורה 7.
9	$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABC$	כלל המעבר + שורות 6 ו- 8.
10	BA חוצה זווית DBC	חוצה זווית מחלק את הזווית לשתי זוויות שוות.

$\boxed{\text{מש"ל א}}$

ה.

	טענה	נימוק
11	$\measuredangle DBC = \measuredangle DBA + \measuredangle CBA$	חיבור זוויות
12	$\measuredangle DBC = \alpha + \alpha$	הצבה + שורות 6 - 8.
13	$\measuredangle DBC = 2\alpha$	חישוב
14	$\measuredangle DBC = \measuredangle AMC$	כלל המעבר + שורות 7 ו- 13.
15	$\measuredangle BCD = \measuredangle MCA$	זווית משותפת למשולשים AMC ו- CBD.
16	$\Delta CBD \sim \Delta CMA$	לפי משפט דמיון ז.ז. + שורות 14 ו- 15.

$\boxed{\text{מש"ל ה'}}$

ג.

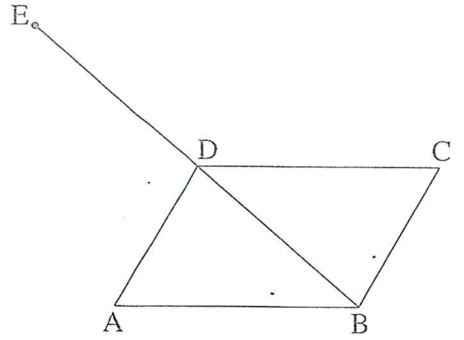
	טענה	נימוק
17	BA גובה ל- DC	גובה יוצר 90° + שורה 4.
18	ΔDBC הוא שווה-שוקיים	משולש שבו הגובה וחוצה-הזווית מתלכדים הוא משולש שווה שוקיים + שורות 10 ו- 17.
19	BA תיכון ל- DC ב ΔDBC	במשולש שווה שוקיים הגובה, חוצה-הזווית והתיכון מתלכדים.
20	$DA = CA$	תיכון מחלק את הצלע לשני חלקים שווים.
21	MA קטע אמצעים ב- ΔDBC	קטע במשולש היוצא מאמצע צלע ומגיע לאמצע צלע הוא קטע אמצעים + שורות 2 ו- 20.

$\boxed{\text{מש"ל ג'}}$

ד.

	טענה	נימוק
22	ΔABM שווה-צלעות	נתון
23	$AB = AM = BM = R$	במשולש שווה-צלעות כל הצלעות שוות + שורה 2.
24	$BC = 2R$	קוטר במעגל שווה באורכו לפעמיים הרדיוס.
25	$AB^2 + AC^2 = BC^2$	משפט פיתגורס ב-ΔABC.
26	$R^2 + AC^2 = (2R)^2$	הצבה + שורות 23 ו-24.
27	$R^2 + AC^2 = 4R^2$	חישוב
28	$AC^2 = 3R^2$	חישוב
29	$AC = \sqrt{3}R$	חישוב
30	$DA = \sqrt{3}R$	כלל המעבר + שורות 22 ו-29.
31	$CD = CA + DA$	חיבור צלעות
32	$CD = \sqrt{3}R + \sqrt{3}R$	הצבה + שורות 29 ו-30.
33	$CD = 2\sqrt{3}R$	חישוב
34	$S_{CBD} = \frac{BA \cdot DC}{2}$	נוסחה לשטח משולש.
	$S_{CBD} = \frac{R \cdot 2\sqrt{3}R}{2}$	הצבה + שורות 23 ו-33.
	$S_{CBD} = \sqrt{3} \cdot R^2$	חישוב

$\boxed{\text{מש"ל ד'}}$



5. ABCD היא מקבילית.

נתון: $AB = 15$, $BC = 10$.

נסמן: $\measuredangle DAB = \alpha$ $(\alpha < 90^0)$.

א. הבע באמצעות α את שטח המשולש BAD .

נתון: שטח המקבילית הוא $75\sqrt{3}$.

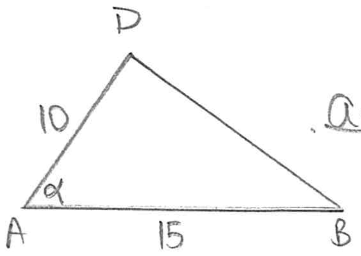
ב. חשב את גודל הזווית α .

ג. חשב את אורך האלכסון BD .

הנקודה E נמצאת על המשך האלכסון BD , כמתואר בציור, כך ש- $ED = DB$.

ד. (1) מצא את גודל הזווית ABE .

(2) מצא את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABE .



א. $AD = BC = 10$ (נתון כי ABCD מקבילית)

חישוב שטח המשולש ע"פ הנוסחה: $\frac{a\cdot b\cdot \sin\alpha}{2}$

$$S_{\Delta BAD} = \frac{10\cdot 15\cdot \sin\alpha}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta BAD} = 75\sin\alpha}$$

ב. שטח המקבילית הוא פעמיים שטח המשולש BAD, ולכן:

$$S_{ABCD} = 2\cdot 75\sin\alpha = 150\sin\alpha$$

נתון כי שטח המקבילית הוא $75\sqrt{3}$ ולכן:

$$150\sin\alpha = 75\sqrt{3} \quad /:150$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

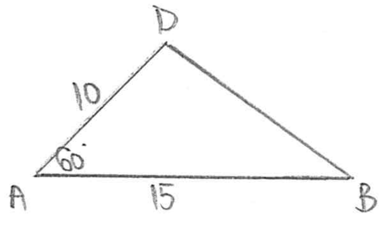
$$\boxed{\alpha = 60^\circ}$$

ג. חישוב אורך האלכסון BD באמצעות משפט הקוסינוסים ב- ΔBAD:

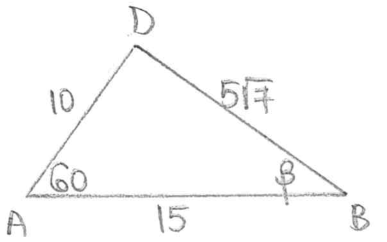
$$BD^2 = 10^2 + 15^2 - 2\cdot 10\cdot 15\cdot \cos 60^\circ$$

$$BD^2 = 175 \quad /\sqrt{\ }$$

$$\boxed{BD = 5\sqrt{7} = 13.228}$$



ג. (1) מציאת $\sphericalangle ABE$ ע"י משפט הסינוסים במשולש ABD:



$$\frac{10}{\sin\beta} = \frac{5\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}$$

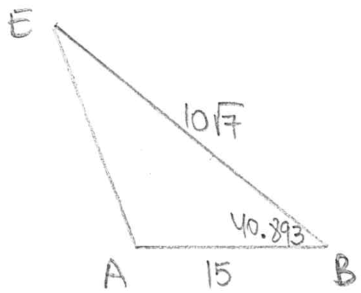
$$\sin\beta = 0.654$$

$$\beta = 40.893^\circ$$

$$\boxed{\sphericalangle ABD = 40.893^\circ}$$

(2) נתון כי $ED = DB$ ולכן $ED = 5\sqrt{7}$.

$$EB = ED + DB = 10\sqrt{7}$$



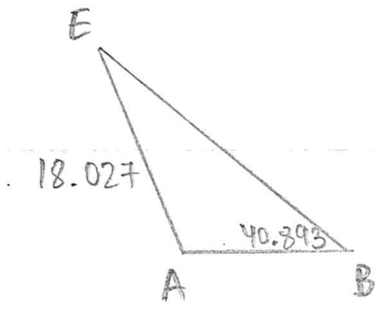
מציאת AE ע"פ משפט הקוסינוסים במשולש AEB:

$$AE^2 = 15^2 + (10\sqrt{7})^2 - 2\cdot 15\cdot 10\sqrt{7}\cdot\cos(40.893)$$

$$AE^2 = 324.996 \quad /\sqrt{\ }$$

$$AE = 18.027$$

מציאת רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABE ע"י משפט הסינוסים במשולש ABE:



$$\frac{18.027}{\sin(40.893)} = 2R$$

$$\boxed{R = 13.768}$$

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} + 4$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x = 4$ ו־ $x = 5$.

נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - 4$.

ג. מהו השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x = 4$ ו־ $x = 5$? נמק.

א. (1) נבדוק עבור איזה ערך של x המכנה מתאפס:

$$(x-3)^2=0$$

$$x-3=0$$

$$x=3$$

לכן תחום ההגדרה: $\boxed{x \neq 3}$

(2) אסימפטוטות מאונכות לצירים:

אסימפטוטה מאונכת לציר x ← לפי תחום הגדרה: $\boxed{x=3}$

אסימפטוטה מאונכת לציר y ← נעזר בכלל החזקה הגבוהה:

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{(x-3)^2}}_{\text{תזקה גבוהה במכנה}} + \underbrace{4}_{\text{מספר קבוע}}$$

$$0 + 4$$

לכן האסימפטוטה $\boxed{y=4}$

(3) נגזור את הפונקציה:

$$f'(x) = \frac{0\cdot(x-3)^2 - 1\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-2(x-3)}{(x-3)^4}$$

ניתן לצמצם ב- $(x-3)$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-3)^3}$$

נציב $f'(x)=0$

$$0 = \frac{-2}{(x-3)^3}$$

$$0 = -2$$

אין פתרון ← אין נק' קיצון

ניעזר בטבלה למציאת תחומי עליה וירידה:

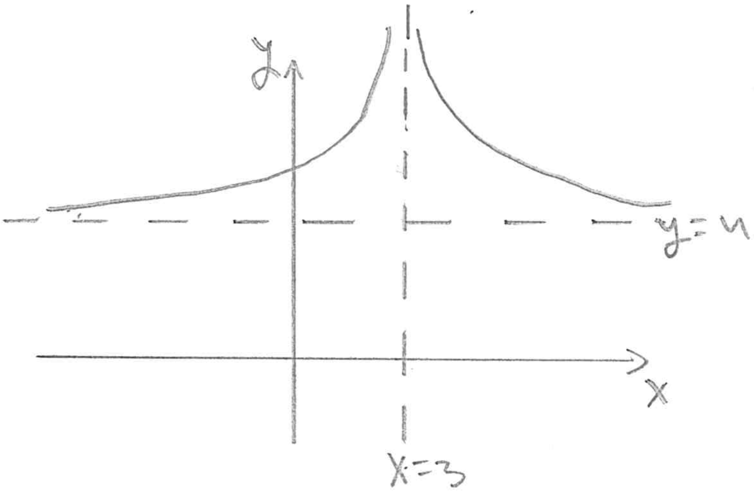
x	$x=0$	3	$x=4$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	↗		↘

$$f'(0) = \frac{-2}{(0-3)^3} = \frac{2}{27} > 0$$

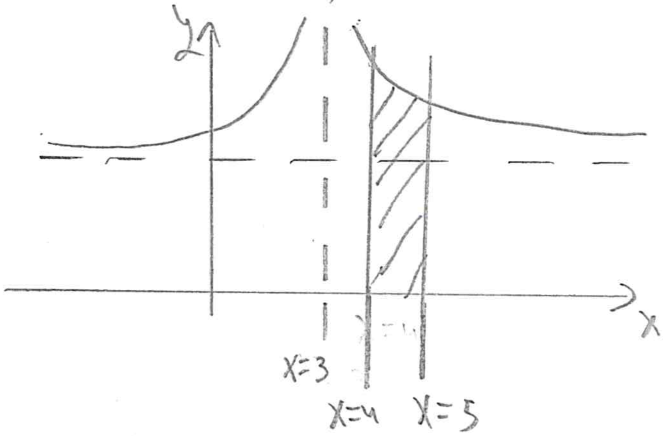
$$f'(4) = \frac{-2}{(4-3)^3} = -2 < 0$$

תחום עליה:	$x<3$
תחום ירידה:	$x>3$

(4) סרטוט:



ב. נוסיף את הישרים $x=4$, $x=5$ לסרטוט:



נחשב את השטח ע"י האינטגרל:

$$\int_4^5 \left[\frac{1}{(x-3)^2}+4\right]dx = \int_4^5 \left[(x-3)^{-2}+4\right]dx = \left[\frac{(x-3)^{-1}}{-1}+4x\right]_4^5$$

$$\left[\frac{-1}{x-3}+4x\right]_4^5$$

$$\left[\frac{-1}{5-3}+4\cdot 5\right]-\left[\frac{-1}{4-3}+4\cdot 4\right]$$

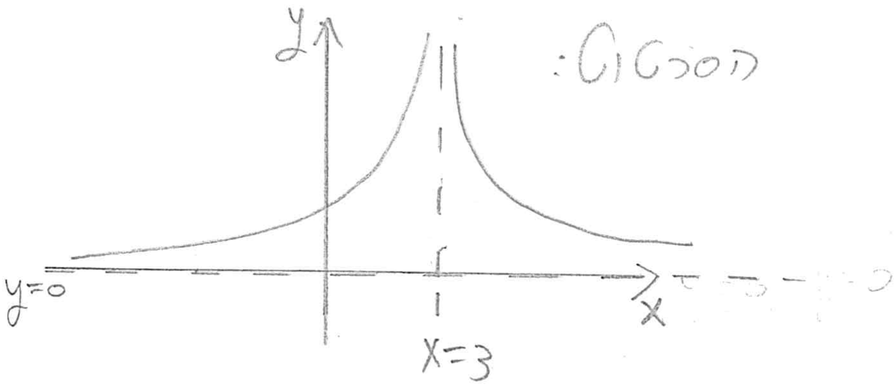
$$\boxed{S = 4.5}$$
יח"ר

ג. נתון כי $g(x)=f(x)-4$, כלומר $g(x)$ הינה הזזה של $f(x)$ ב- 4 יח' מטה, ומשוואתה $g(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$

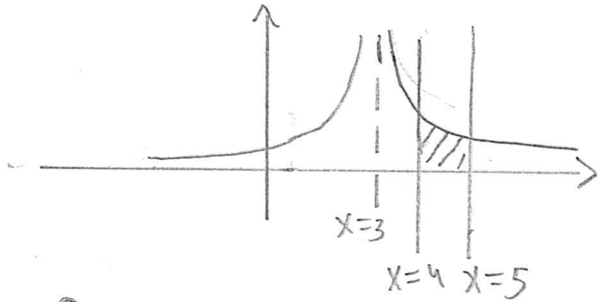
לכן האסימפטוטה המאונכת לציר y תהיה $y=0$

האסימפטוטה המאונכת לציר x ללא שינוי, כלומר $x=3$.

הסרטוט:



נוסיף את הישרים $x=4$, $x=5$ לסרטוט:



נחשב את השטח בעזרת האינטגרל:

$$\int_4^5 \frac{1}{(x-3)^2}dx=\int_4^5 (x-3)^{-2}dx=\left[\frac{(x-3)^{-1}}{-1}\right]_4^5=\left[\frac{-1}{x-3}\right]_4^5$$

$$\left(\frac{-1}{5-3}\right)-\left(\frac{-1}{4-3}\right)$$

$$\boxed{S=\frac{1}{2}}$$ יח"ר

7. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3\cdot\sqrt{x+a}$. a הוא פרמטר.

א. הבע באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

הנקודה $(2,24)$ נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את a .

הצב $a=7$ וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(4) מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$?

נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+c$. c הוא פרמטר.

ד. מהו הערך של c שעבורו גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה־ x ? נמק.

א. תחום הגדרה ← הביטוי תחת השורש גדול או שווה לאפס, ולכן:

$$x+a\geq 0$$

$$\boxed{x\geq -a}$$

ב. נציב את שיעורי הנק' $(2,24)$ בפונקציה ונקבל:

$$24=(2)^3\sqrt{2+a}$$

$$24=8\sqrt{2+a} \quad \backslash :8$$

$$3=\sqrt{2+a} \quad \backslash (\ )^2$$

$$9=2+a$$

$$\boxed{a=7}$$

נרשום את הפונק'ה ובה $a=7$: $f(x)=x^3\sqrt{x+7}$

ג. (1) נק' ח'ת עם הצירים:

ח'ת ציר y ← נציב $x=0$

$f(0)=0^3\sqrt{0+7}=0$

$(0,0)$

ח'ת ציר x ← נציב $y=0$:

$$0=x^3\sqrt{x+7}$$

$x^3=0$ $\qquad$ $\sqrt{x+7}=0 \ /(\ )^2$

$x=0$ $\qquad$ $x+7=0$

$x=-7$

$\boxed{\text{נק' הח'ת הן: } (-7,0) \quad (0,0)}$

(2) נגזור את הפונק'ה לפי נגזרת מכפלת פונקציות:

$$f'(x)=3x^2\sqrt{x+7}+x^3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+7}}$$

$$f'(x)=3x^2\sqrt{x+7}+\frac{x^3}{2\sqrt{x+7}}$$

לאחר מכנה משותף נקבל:

$$f'(x)=\frac{3x^2\sqrt{x+7}\cdot 2\sqrt{x+7}+x^2}{2\sqrt{x+7}}$$

$$f'(x)=\frac{6x^2(x+7)+x^2}{2\sqrt{x+7}}$$

$$f'(x)=\frac{7x^3+42x^2}{2\sqrt{x+7}}$$

נציב $f'(x)=0$ ונקבל

$$0=\frac{7x^3+42x^2}{2\sqrt{x+7}}$$

$$0=7x^3+42x^2$$

$$0=7x^2(x+6)$$

$7x^2=0$ $x+6=0$

$x=0$ $x=-6$

נמצא שיעורי y ע"י הצבה בפונקציה הנתונה:

$f(0)=0$ $f(-6)=-216$

$(0,0)$ $(-6,-216)$

נעזר בטבלה על מנת למצוא את סוג הקיצון:

x		-7	$x=-6.5$	-6	$x=-1$	0	$x=1$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$		0	$\searrow$	-216	$\nearrow$	0	$\nearrow$

מכיוון שהמכנה חיובי, ניתן לבדוק ע"י הצבה במונה בלבד

$f'(-6.5)=-147.87<0$

$f'(-1)=35>0$

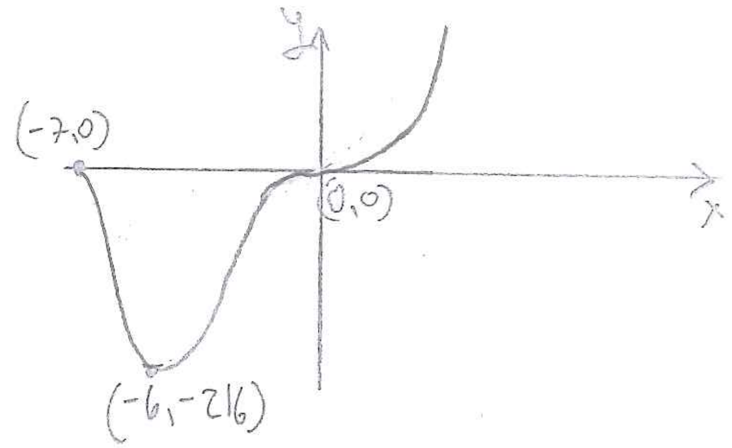
$f'(1)=49>0$

* הערה: ניתן לראות כי כאשר $x=0$ הנגזרת מתאפסת אך הנק' אינה נק' קיצון, כפי שהתקבל מההצבות בטבלה.

נקודות הקיצון:

$(-6,-216)$ מינימום.

$(-7,0)$ מקסימום קצה



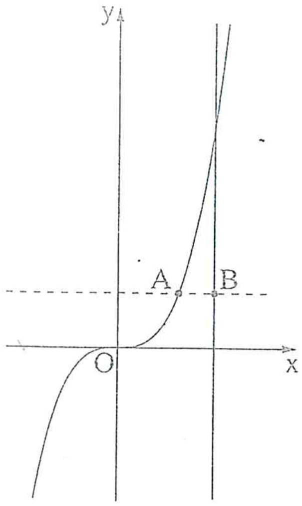
(3) נשרטט את הפונקציה:

(4) לפי הגרף ששרטטנו:

תחום החיוביות הוא $x>0$
תחום השליליות הוא $-7<x<0$

ד. הפונקציה $g(x)=f(x)+c$ הינה הזזה של הפונקציה $f(x)$ ב-c יחידות כלפי מטה (אם c שלילי) או מעלה (אם c חיובי).
על מנת שהגרף של $g(x)$ ישיק לציר x, בנק' שבהן שיפוע המשיק מתאפס, השיעור y צריך להתאפס גם הוא.
כיוון ש-$g(x)$ הינה הזזה של $f(x)$, לפונקציות שיפוע זהה עבור אותם ערכי x. לפי סעיף ג (2), שיפוע המשיק מתאפס עבור $x=0$, $x=-6$.
בנק' $x=0$ ← שיעור y הינו 0. ← לכן עבור $\boxed{c=0}$ גם הגרף של $g(x)$ ישיק לציר x.

בנק' $x=-6$ ← שיעור y הינו -216 ← לכן עבור $\boxed{c=216}$ הגרף של $g(x)$ ישיק לציר x.



8. בציור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)=x^3$ והישר $x=2$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $0<x_A<2$ (x_A הוא שיעור ה־ x של הנקודה A).

מהנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה־ x (הישר המקווקו בציור).

הישר שהעבירו חותך את הישר $x=2$ בנקודה B (ראה ציור) .

הנקודה O היא ראשית הצירים.

א. מה הם שיעורי הנקודה A שבעבורה שטח המשולש ABO הוא מקסימלי? נמק.

ב. חשב את שטח המשולש ABO בעבור הנקודה A שמצאת בסעיף א.

א. נביע ← שיעורי הנק' A ע"י הפונק' $f(x)=x^3$

נסמן: $x_A=t$ ← $A(t,t^3)$

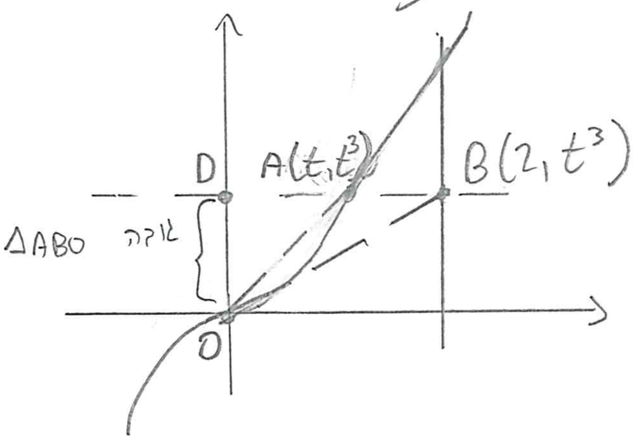
$f(t)=t^3$

הישר AB מקביל לציר x ולכן $y_B=y_A=t^3$

נק' B נמצאת על הישר $x=2$ ולכן $x_B=2$

שיעורי נק' B: $B(2,t^3)$

נמצא כעת ← שיעורי הקודקודים ← ונצ"ר ← משולש ABO:



פונקצ' ← המטרה: שטח ΔABO

$$\frac{AB\cdot OD}{2}$$

$$f(t)=\frac{(2-t)t^3}{2}$$

$$f(t)=\frac{2t^3-t^4}{2}$$

ע מנת למצוא נק' בה השטח מקסימלי, נגזור:

$$f'(t) = \frac{6t^2 - 4t^3}{2}$$

נציב $f'(t)=0$

$$0 = 6t^2 - 4t^3$$

$$0 = 2t^2(3-2t)$$

$2t^2=0$ | $3-2t=0$
$t=0$ | $t=1.5$

נפסל כי נתון ש $0<x_A<2$

נגזור פעם נוסף לקבוע סוג הקיצון

$$f''(t) = \frac{12t - 12t^2}{2}$$

נציב $t=1.5$

$$f''(1.5) = -4.5 < 0$$

ולכן עבור $t=1.5$ השטח מקסימלי.

$\boxed{\text{שיעורי נק' } A \text{ עבורה השטח מקסימלי: } A(1.5,\ 3.375)}$

ג. נציב $t=1.5$ בפונק' המבטאת את שטח משולש ABO, (פונק' המטרה) מסעיף א':

$$f(1.5) = \frac{2(1.5)^3 - (1.5)^4}{2} = \frac{27}{32} = 0.84375$$

$\boxed{\text{השטח המקסימלי של משולש } ABO \text{ הוא } \frac{27}{32} \text{ יח"ר או } 0.84375 \text{ יח"ר}}$