פתרון הבחינה

במתמטיקה

חורף תשע"ח, 2018, שאלונים: 35805, 315

מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

1. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית שכל איבריה חיוביים. האיבר השלישי בסדרה גדול פי 8 מן האיבר השישי בסדרה.

א. פי כמה גדול סכום כל איברי הסדרה מסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים?

ב. סכום האיברים הנמצאים במקומות ה<u>אי־זוגיים</u> הוא 2.

חשב את הערך של האיבר השלישי בסדרה הנתונה.

לפי הנתון: $a_3 = 8 \cdot a_6$

נפרק את a_3 ואת a_6

לפי נוסחה לאיבר כללי בסדרה הנדסית: $a_1 q^2 = 8 \cdot a_1 q^5$

בסדרה הנדסית a_1 ו-q חייבים להיות שונים מאפס

ולכן ניתן לצמצם את המשוואה ב-a_1 ו-q^2: $1 = 8 \cdot q^3 \ /:8$

$q^3 = \frac{1}{8} \ /\sqrt[3]{\ }$

$q = \frac{1}{2}$

א) נשתמש בנוסחה לסכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת: $S = \frac{a_1}{1-q}$

וב-$q = \frac{1}{2}$ שמצאנו ונביע את שני הסכומים המבוקשים:

$S_{\text{כל הסדרה}} = \frac{a_1}{1-\frac{1}{2}} \rightarrow S_{\text{כל הסדרה}} = \frac{a_1}{\frac{1}{2}} \rightarrow S_{\text{כל הסדרה}} = 2a_1$

$$S_{\text{איברים במקומות זוגיים}} = \frac{a_2}{1-q^2} \rightarrow S_{\text{איברים במקומות זוגיים}} = \frac{a_1 \cdot \frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} \rightarrow S_{\text{איברים במקומות זוגיים}} = \frac{\frac{1}{2}a_1}{\frac{3}{4}} \rightarrow$$

$$\rightarrow S_{\text{איברים במקומות זוגיים}} = \frac{2}{3}a_1$$

על-מנת למצוא פי כמה גדול סכום כל איברי הסדרה מסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים, נחלק בין הסכומים:

$$\frac{S_{\text{כל הסדרה}}}{S_{\text{איברים במקומות זוגיים}}} = \frac{2a_1}{\frac{2}{3}a_1} \rightarrow \boxed{\frac{S_{\text{כל הסדרה}}}{S_{\text{איברים במקומות זוגיים}}} = 3}$$

ב) לפי הנתון:

$$S_{\text{איברים במקומות אי-זוגיים}} = 2$$

נפרק את הסכום לפי הנוסחה לסכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

$$\frac{a_1}{1-q^2} = 2$$

נציב את $q=\frac{1}{2}$ שמצאנו:

$$\frac{a_1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

$$\frac{a_1}{1-\frac{1}{4}}=2$$

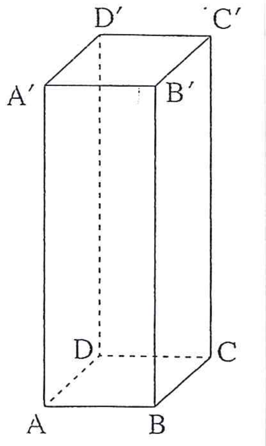
$$\frac{a_1}{\frac{3}{4}}=2$$

$$a_1=\frac{3}{2}$$

נשתמש בנוסחה לאיבר כללי של סדרה הנדסית

וב- $a_1=\frac{3}{2}$ ו- $q=\frac{1}{2}$ שמצאנו:

$$a_3=a_1q^2=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}=\boxed{\frac{3}{8}}$$



2. נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה, $ABCD$, הוא ריבוע (ראה ציור).

נתון: $AB = a$, $AA' = 3a$.

א. (1) הבע באמצעות a את AC ואת AD' .

(2) הסבר מדוע $AD' = CD'$.

ב. מצא את גודל הזווית $AD'C$.

ג. הבע באמצעות a את שטח המשולש $AD'C$.

$D'E$ הוא גובה במשולש $AD'C$.

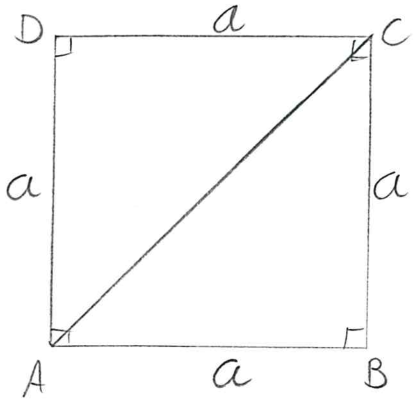
ד. מצא את גודל הזווית שבין $D'E$ לבין בסיס התיבה $ABCD$.

נתונים: $ABCDA'B'C'D'$ תיבה , $AB=a$

$ABCD$ ריבוע , $AA'=3a$

א) 1)

על מנת להביע את AC נתבונן בריבוע $ABCD$:



בריבוע כל הצלעות שוות ולכן:

$AB=BC=CD=AD=a$

בריבוע כל הזוויות שוות ל-$90°$ ולכן:

$\measuredangle A=\measuredangle B=\measuredangle C=\measuredangle D=90°$

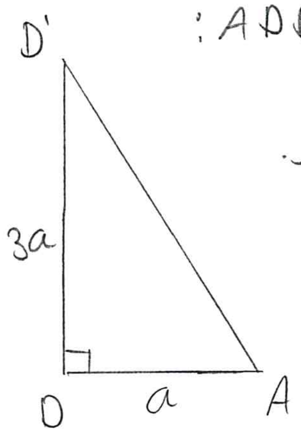
AC הוא אלכסון בריבוע הנתון.

נוכל לחשב אותו באמצעות משפט פיתגורס ב- ΔABC:

$AC^2=a^2+a^2$

$AC^2=2a^2 \quad /\sqrt{\ }$

$\boxed{AC=a\sqrt{2}}$



על-מנת להביע את AD', נתבונן במשולש ADD':

DD' הוא גובה בתיבה ולכן המשולש הוא ישר-זווית.

בתיבה כל המקצועות הצדדיים שווים ולכן:

$AA'=BB'=CC'=DD'=3a$

נמצא את AD' באמצעות משפט פיתגורס:

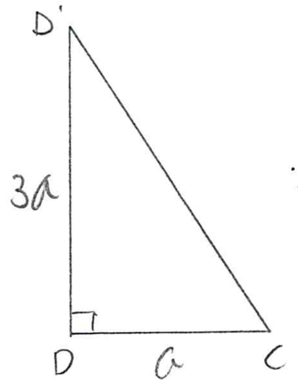
$AD'^2=a^2+(3a)^2$

$AD'^2=a^2+9a^2$

$AD'^2=10a^2 \quad /\sqrt{\ }$

$\boxed{AD'=a\sqrt{10}}$

11 ב כדי להראות ש: $AD'=CD'$ נמצא גם את CD'.



נתבונן במשולש CDD':

DD' הוא גובה בתיבה ולכן המשולש הוא ישר-זווית.

נמצא את CD' באמצעות משפט פיתגורס:

$CD'^2=a^2+(3a)^2$

$CD'^2=a^2+9a^2$

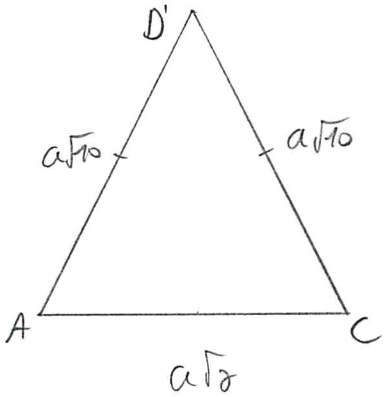
$CD'^2=10a^2 \quad /\sqrt{\ }$

$CD'=a\sqrt{10}$

לפי כלל המעבר: $\boxed{AD' = CD' = a\sqrt{10}}$

(*) ניתן היה להוכיח את סעיף זה גם באמצעות חפיפת המשולשים ADD' ו- CDD' לפי משפט חפיפה צלע-זווית-צלע.

(ב) על-מנת לחשב את הזווית $AD'C$, נתבונן במשולש $AD'C$:



לפי הסעיפים הקודמים, המשולש הוא שווה שוקיים
כך ש: $AD' = CD' = a\sqrt{10}$
ובנוסף, $AC = a\sqrt{2}$.

על-מנת למצוא את הזווית $AD'C$ נשתמש במשפט הקוסינוסים:

$$(a\sqrt{2})^2 = (a\sqrt{10})^2 + (a\sqrt{10})^2 - 2 \cdot a\sqrt{10} \cdot a\sqrt{10} \cdot \cos\sphericalangle AD'C$$

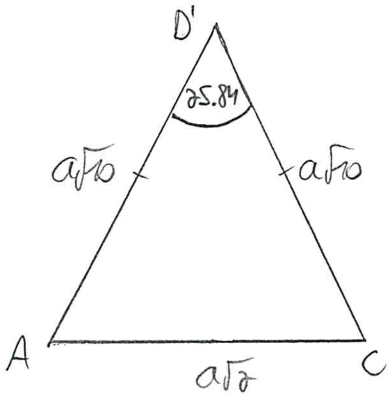
$$2a^2 = 10a^2 + 10a^2 - 20a^2 \cdot \cos\sphericalangle AD'C$$

$$-18a^2 = -20a^2 \cdot \cos\sphericalangle AD'C \quad /: -20a^2$$

$$\cos\sphericalangle AD'C = \frac{9}{10}$$

$$\boxed{\sphericalangle AD'C = 25.84°}$$

ג) נוסיף את הזוויות שמצאנו בסעיף הקודם למשולש AD'C:



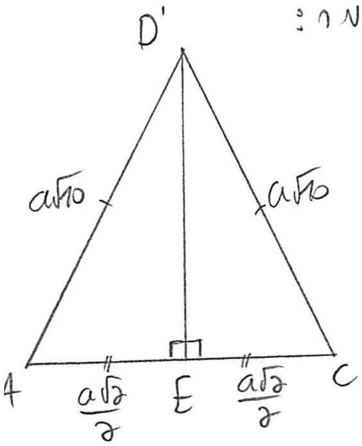
על מנת להביע את שטח המשולש באמצעות a, נשתמש בנוסחה לשטח משולש באמצעות שתי צלעות והזווית שביניהן:

$$S_{AD'C} = \frac{a\sqrt{10}\cdot a\sqrt{10}\cdot \sin 25.84}{2}$$

$$\boxed{S_{AD'C} = 2.18a^2}$$

ד) נתון כי D'E הוא גובה במשולש AD'C שהוא משולש שווה שוקיים ולכן הוא גם תיכון במשולש זה, כלומר:

$$AE = CE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



בבסיס התיבה, הריבוע ABCD האלכסונים חוצים זה את זה

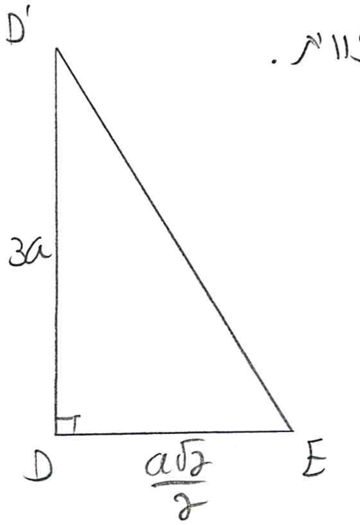
ולכן:

$$AE = CE = DE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

הזווית שבין הישר D'E לבין המישור ABCD היא $\measuredangle D'ED$.

על מנת לחשב את זווית זו, נגדיר את המשולש D'DE.

DD' הוא גובה בתיבה ולכן המשולש הוא ישר-זווית.



$$\tan\measuredangle D'ED = \frac{3a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

$$\tan\measuredangle D'ED = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\measuredangle D'ED = 76.74^\circ}$$

3. נתונה הפונקציה $f(x)=3\cdot\sin(x-\frac{\pi}{2})$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים בתחום הנתון.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הישר $x=\pi$ ועל ידי ציר ה־ x בתחום $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$.

א. (1) מציאת נק' חיתוך עם ציר y ← נציב $x=0$

$f(0)=3\sin(0-\frac{\pi}{2})$

$f(0)=-3$

$(0,-3)$

מציאת נק' חיתוך עם ציר x ← נציב $f(x)=0$

$0=3\sin(x-\frac{\pi}{2})$

$\sin(x-\frac{\pi}{2})=0$

נפתור פתרון כללי: $x-\frac{\pi}{2}=\pi k$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

הפתרונות בתחום הנתון: $x=\frac{\pi}{2}$ $x=-\frac{\pi}{2}$

ולכן נק' החיתוך של הפונקציה עם הצירים:

$$\boxed{(0,-3) \quad (-\frac{\pi}{2},0) \quad (\frac{\pi}{2},0)}$$

ג. (2) מציאת שיעורי נקודות הקיצון:

נמצא את נק' הקצה: נציב $x=-\pi$

$f(-\pi)=3\sin(-\pi-\frac{\pi}{2})$

$f(-\pi)=3$

$(-\pi,3)$

נציב $x=\pi$

$f(\pi)=3\sin(\pi-\frac{\pi}{2})$

$f(\pi)=3$

$(\pi,3)$

נמצא נק' קיצון פנימיות:

נגזור $f'(x)=3\cos(x-\frac{\pi}{2})$

נציב $f'(x)=0$

$0=3\cos(x-\frac{\pi}{2})$

$\cos(x-\frac{\pi}{2})=0$

נמצא פתרון כללי: $x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k$

$x=\pi+\pi k$

הפתרונות בתחום הנתון: $x=\pi$, $x=0$, $x=-\pi$

נציב בטבלה למציאת סוג הקיצון:

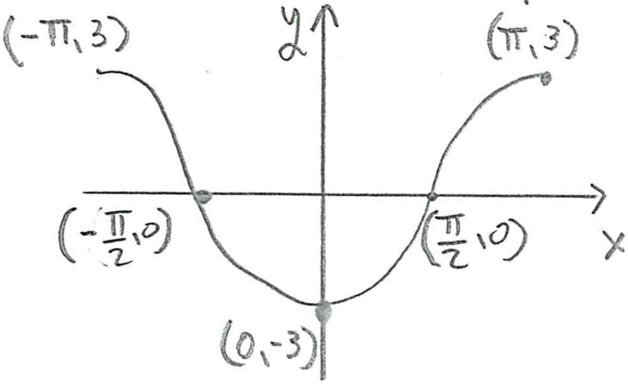
x	$-\pi$	$x=-\frac{\pi}{2}$	0	$x=\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	0	−	0	+	0
$f(x)$	3	↘	-3	↗	3

$F'(-\frac{\pi}{2})=3\cos(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})\rightarrow -3$

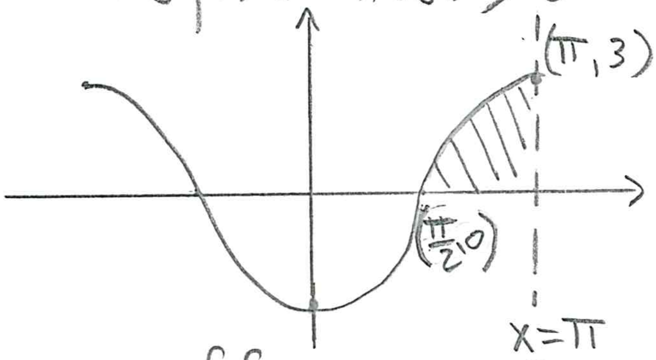
$F(\frac{\pi}{2})=3\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})\rightarrow 3$

$\boxed{\begin{array}{l} (0,-3) \text{ נק' מינימום} \\ (-\pi,3) \text{ נק' מקסימום קצה} \\ (\pi,3) \text{ נק' מקסימום קצה.} \end{array}}$

ב. נשרטט את הפונקציה בהתאם לסעיפים א (1),(2):



ג. נוסיף לשרטוט את השטח המבוקש:



נחשב שטח פשוט של הפונקציה מעל לציר x:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 3\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx =$$

$$\left[-3\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$\left[-3\cos\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left[-3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right] \to \boxed{S = 3 \text{ יח"ר}}$$

הערה: כיוון ש: $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$
ניתן היה לרשום את הפונקציה כ - $f(x)=-3\cos x$
ולחקור אותה לפי כלל הסעיפים.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = 4^{2x} - 4^{x} - 2$.

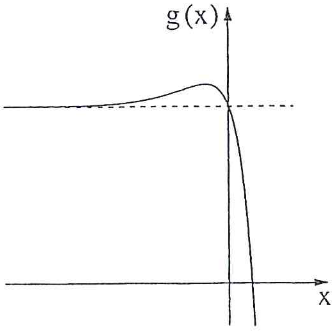
א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

בציור שלפניך סרטוט של גרף הפונקציה $g(x) = -2f(x)$.

לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה שמשוואתה $y = 4$.



ב. (1) מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$?

(2) מהי משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$? נמק.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

א. (1) תחום הגדרה: $\boxed{\text{כל } x}$

(2) נק' חיתוך עם הצירים:

נק' חיתוך עם ציר y ← נציב $x=0$.

$F(0)=4^{2\cdot 0}-4^{0}-2$.

$F(0)=-2$

$(0,-2)$

נק' חיתוך עם ציר x ← נציב $f(x)=0$

$0=4^{2x}-4^{x}-2$

ניעזר בחוק' חזקות:

$0=(4^{x})^{2}-4^{x}-2$

נציב $4^{x}=t$ ונקבל:

$0=t^{2}-t-2$

נפתור משוואה ריבועית:

$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^{2}-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}$

$t_{1}=-1$

$4^{x}=-1$

אין פתרון

$t_{2}=2$

$4^{x}=2$

ניעזר בסיס זהה ונשווה מעריכים

$2^{2x}=2^{1}$

$2x=1 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

נק' החיתוך:
$(0,-2)$
$(\frac{1}{2},0)$

(3) נגזור את הפונקציה:

$f'(x)=4^{2x}\cdot 2\ln 4-4^{x}\ln 4$

נציב $f'(x)=0$

$0=4^{2x}\cdot 2\ln 4-4^{x}\ln 4 \quad / :\ln 4$

$0=2\cdot 4^{2x}-4^{x}$

נציב $4^x=t$ ונקבל:

$0=2t^2-t$

$0=t(2t-1)$

$t=0$

$4^x=0$

אין פתרון

$2t-1=0$

$t=\frac{1}{2}$

$4^x=\frac{1}{2}$

נגיע לבסיס זהה:

$2^{2x}=2^{-1}$

נשווה מעריכים:

$2x=-1$

$x=-\frac{1}{2}$

נציב בפונקציה ונמצא שיעור y:

$f(-\frac{1}{2})=4^{2(-\frac{1}{2})}-4^{-\frac{1}{2}}-2$

$f(-\frac{1}{2})=-2.25$

$\boxed{(-\frac{1}{2},-2.25)}$

נק' מינימום

נעזר בטבלה למציאת סוג הקיצון:

x	$x=-1$	$-\frac{1}{2}$	$x=0$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-2.25	$\nearrow$

$f'(-1)=4^{2(-1)}\cdot 2\ln 4-4^{-1}\ln 4 \rightarrow -0.17$

$f'(0)=4^{2\cdot 0}\cdot 2\ln 4-4^{0}\cdot\ln 4 \rightarrow 1.38$

ב. (1) נתון: $g(x)=-2f(x)$

מכיוון ש- $(-\frac{1}{2},-2.25)$ היא נק' <u>המינימום</u> של $f(x)$,
עבור אותו שיעור x הפונק' $g(x)$ תקבל <u>ערך מקסימלי</u>,
ומכיוון ש $g(x)=-2f(x)$, <u>שיעור y</u> של הנקודה מוכפל ב-(-2).

לכן לפונקציה $g(x)$ תהיה נק' מקסימום עבור $(-\frac{1}{2},4.5)$.

<u>הערה:</u> ניתן לרשום את הפונקציה
$$g(x)=-2(4^{2x}-4^x-2)$$
ולמצוא נק' קיצון ע"י גזירת הפונקציה.

(2) נתון $g(x)=-2f(x)$ ולכן $f(x)=-\frac{g(x)}{2}$

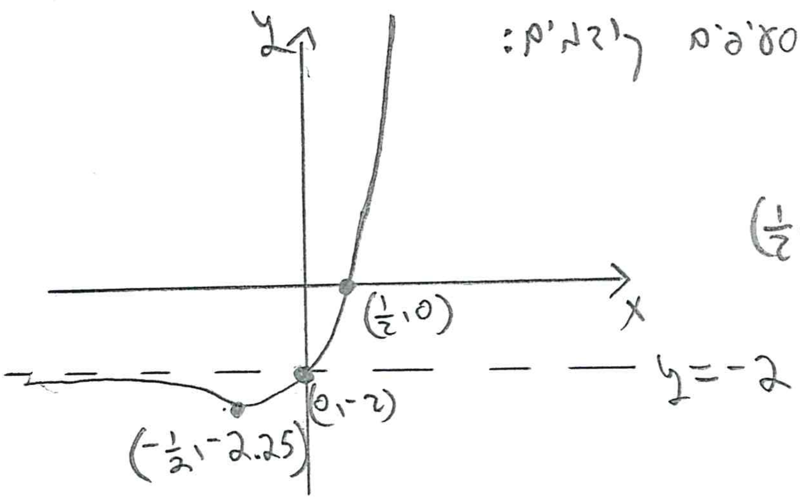
כיוון שהאסימפטוטה האופקית של $g(x)$ היא $y=4$ האס' האופקית של $f(x)$ תהיה $-\frac{4}{2}$ ← כלומר $\boxed{y=-2}$

(3) נסרטט $f(x)$ לפי סעיפים קודמים:

אס' אופקית: $y=-2$

נק' חיתוך עם הצירים: $(0,-2)$, $(\frac{1}{2},0)$

נק' מינימום: $(-\frac{1}{2},-2.25)$



5. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2\ln x+3}{3}$.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) כתוב את משוואת האסימפטוטה האנכית של הפונקציה $f(x)$.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) כתוב את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.

$1<b$ הוא פרמטר.

השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־ x , על ידי הישר $x=1$ ועל ידי הישר $x=b$ שווה ל־ $\ln 4$.

ג. מצא את הערך של b .

א. (1) תחום הגדרה ← הביטוי שבתוך הפונקציה הלוגריתמית צריך להיות חיובי ולכן: $\boxed{x>0}$

(2) נק' חיתוך עם ציר y:

תחום ההגדרה $x>0$ ולכן אין חיתוך עם ציר y.

נק' חיתוך עם ציר x: נציב $f(x)=0$

$$0=\frac{2\ln x+3}{3}$$

$$0=2\ln x+3$$

$$\ln x=-1.5$$

$$\log_e x=-1.5$$

$$x=e^{-1.5}$$

$$x=0.22$$

$$\boxed{(e^{-1.5},0) \quad \text{או} \quad (0.22,0)}$$

(3) מציאת תחומי עלייה וירידה:

נגזור פונקציה לוגריתמית

$$f'(x) = \frac{2\cdot\frac{1}{x}}{3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3x}$$

נשווה נגזרת ל-0:

$$0 = \frac{2}{3x}$$

אין פתרון ולכן אין קיצון.

מכיוון ש $x>0$ הנגזרת $f'(x) = \frac{2}{3x}$ חיובית

לכן:

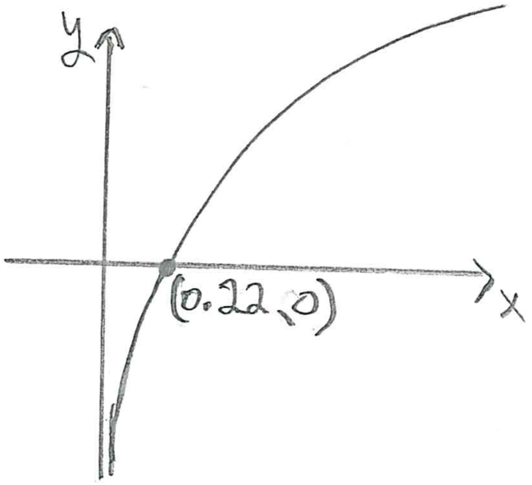
תחום עלייה: $x>0$
תחום ירידה: אין x.

הערה: ניתן להיעזר גם בטבלת ערכים למציאת תחומי עלייה וירידה.

(4) אסימפטוטה אנכית:

אסימפטוטה אנכית של פונקציה לוגריתמית לפי תחום ההגדרה:

$\boxed{x=0}$



(5) נסכם לפי סעיפים (1)-(4):

תחום הגדרה $x>0$

נק' חיתוך עם הצירים: $(0.22, 0)$

עלייה: $x>0$

אסימפטוטה אנכית $x=0$

ב. 1) $f'(x)=\frac{2}{3x}$

אסימפטוטה אנכית:

נבדוק מתי המכנה מתאפס

$3x=0$

$x=0$

אסימפטוטה אנכית עבור $\boxed{x=0}$

אסימפטוטה אופקית:

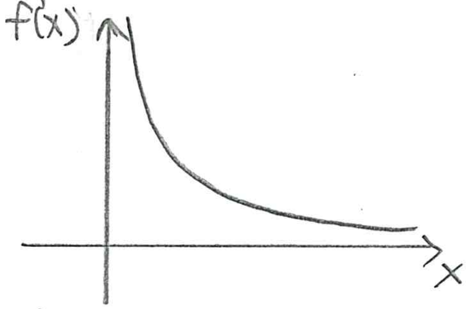
החזקה הגבוהה במכנה ולכן אסימפטוטה אופקית $\boxed{y=0}$

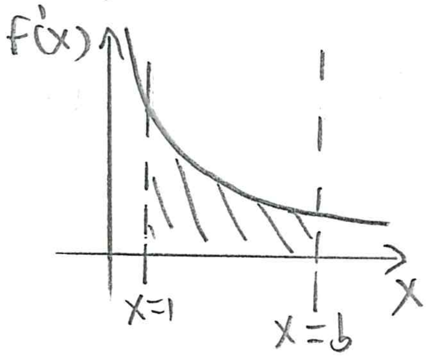
2) לפי סעיף 4 (3) הנגזרת חיובית עבור $x>0$,

אסי' אנכית $x=0$

אסי' אופקית $y=0$

נסרטט





ג. נסרטט את השטח המבוקש:

נוסיף את הישרים

$x=1$, $x=b$

נתון כי השטח הוא ln4 ולכן:

$$\int_1^b f'(x)\,dx=\ln 4$$

$$\Big[f(x)\Big]_1^b=\ln 4$$

$$f(b)-f(1)=\ln 4$$

$$\frac{2\ln b+3}{3}-\frac{2\ln 1+3}{3}=\ln 4$$

$$\frac{2\ln b+3}{3}-1=\ln 4$$

$$2\ln b+3-3=3\ln 4$$

$$\ln b=\frac{3}{2}\ln 4$$

$$\log_e b=2.079$$

$$b=e^{2.079}$$

$\leftarrow$ $\boxed{b=8}$