

פתרון הבחינה

במתמטיקה

חורף תשע"ח, 2018, שאלון: 35482 עפ"י תכנית הרפורמה ללמידה משמעותית.
שאלון שני מ-4 יח"ל.
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. נתונה סדרה הנדסית אינסופית שכל איבריה חיוביים. האיבר השלישי בסדרה גדול פי 8 מן האיבר השישי בסדרה.
- א. פי כמה גדול סכום כל איברי הסדרה מסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים?
- ב. סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים הוא 2.
- חשב את הערך של האיבר השלישי בסדרה הנתונה.

אפי הנתון: $a_3 = 8 \cdot a_6$

נפרק את a_3 ואת a_6

אפי נוסחה האיבר כללי בסדרה הנדסית:

$$a_1 q^2 = 8 \cdot a_1 q^5$$

בסדרה הנדסית a_1 ו- q חייבים להיות שונים מאפס

ולכן ניתן לצמצם את המשוואה ב- a_1 ו- q^2 :

$$1 = 8 \cdot q^3 \quad | :8$$

$$q^3 = \frac{1}{8} \quad | \sqrt[3]{}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

(10) נשתמש בנוסחה לסכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת: $S = \frac{a_1}{1-q}$

וב- $q = \frac{1}{2}$ שמתקבל ונציב את שתי הסכומים המתוקנים:

$$S_{\text{הזוגי}} = \frac{a_1}{1-\frac{1}{2}} \rightarrow S_{\text{הזוגי}} = \frac{a_1}{\frac{1}{2}} \rightarrow S_{\text{הזוגי}} = 2a_1$$



$$S = \frac{a_2}{1-q^2} \rightarrow S = \frac{a_1 \cdot \frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2} \rightarrow S = \frac{\frac{1}{2}a_1}{\frac{3}{4}} \rightarrow$$

$$\rightarrow S = \frac{2}{3}a_1$$

על-מנת למצוא את כושר הקול סכמ של איברי הסדרה מסכים האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים, נחלק בין הסכומים:

$$\frac{S_{\text{סדרה}}}{S} = \frac{2a_1}{\frac{2}{3}a_1} \rightarrow \frac{S_{\text{סדרה}}}{S} = 3$$

אם נתון:

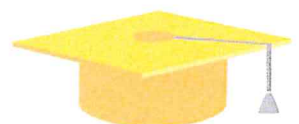
$$S = 2$$

נחלק את הסכום לפי הנסחה ונחסר מסך מסדרה הזוגיים אינסופית מתכנת:

$$\frac{a_1}{1-q^2} = 2$$

נציב את $q = \frac{1}{2}$ נמצא:

$$\frac{a_1}{1-(\frac{1}{2})^2} = 2$$



$$\frac{a_1}{1 - \frac{1}{4}} = 2$$

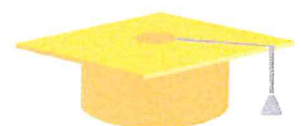
$$\frac{a_1}{\frac{3}{4}} = 2$$

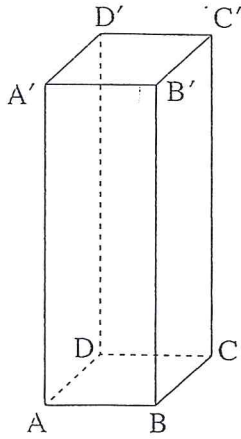
$$a_1 = \frac{3}{2}$$

נשתמש בנוסחה לזיכרון של סדרה הנדסית

וב- $a_1 = \frac{3}{2}$ ו- $q = \frac{1}{2}$ שטראנו:

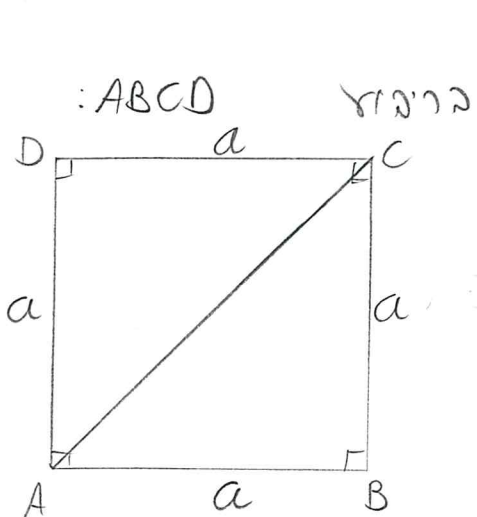
$$a_3 = a_1 q^2 = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{8}}$$





2. נתונה תיבה $ABCD A' B' C' D'$ שבסיסה, $ABCD$, הוא ריבוע (ראה ציור).
נתון: $AA' = 3a$, $AB = a$.
- הבע באמצעות a את AC ואת AD' .
 - הסבר מדוע $AD' = CD'$.
 - מצא את גודל הזווית $AD'C$.
 - הבע באמצעות a את שטח המשולש $AD'C$.
 - $D'E$ הוא גובה במשולש $AD'C$. מצא את גודל הזווית שבין $D'E$ לבין בסיס התיבה $ABCD$.

נתונים: $ABCD A' B' C' D'$ תיבה, $AB = a$,
 $AA' = 3a$, $ABCD$ ריבוע



נתון: $ABCD$ ריבוע
נתון: AC נתון נתון
נתון: $AB = BC = CD = AD = a$
נתון: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

AC הוא אלכסון הריבוע הנתון.
שטח המשולש ABC - נתון

$$AC^2 = a^2 + a^2$$

$$AC^2 = 2a^2 / \sqrt{}$$

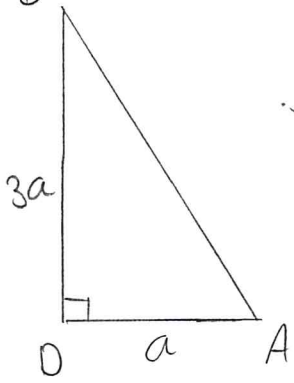
$AC = a\sqrt{2}$

נחידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



על-מנת להביע את AO' , נתבונן במשולש ADO' :
 DO' הוא זווה בתיבה ולכן המשולש הוא ישר-זווית.



בתיבה של המקצועות הצדדיים שווים ולכן:

$$AA' = BB' = CC' = DD' = 3a$$

נמצא את AO' באמצעות משפט פיתגורס:

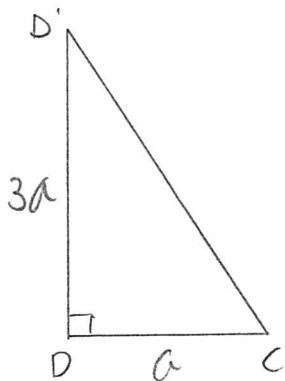
$$AO'^2 = a^2 + (3a)^2$$

$$AO'^2 = a^2 + 9a^2$$

$$AO'^2 = 10a^2 \quad /\sqrt{}$$

$$AO' = a\sqrt{10}$$

Ⓢ Ⓣ כדי להראות ש: $AO' = CO'$ נמצא גם את CO' .



נתבונן במשולש CDO' :

CO' הוא זווה בתיבה ולכן המשולש הוא ישר-זווית.

נמצא את CO' באמצעות משפט פיתגורס:

$$CO'^2 = a^2 + (3a)^2$$

$$CO'^2 = a^2 + 9a^2$$

$$CO'^2 = 10a^2 \quad /\sqrt{}$$

$$CO' = a\sqrt{10}$$

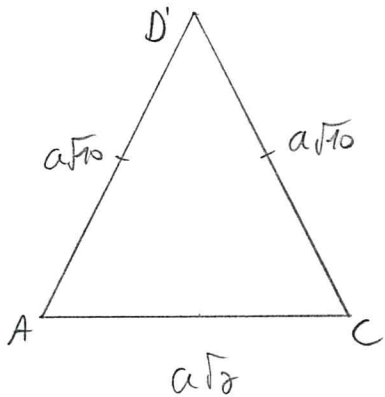


$$AD' = CD' = a\sqrt{10}$$

אם כל המספרים:

⊗ ניתן היה להוכיח את סרט זה אם באמצעות חוקי המשולשים ADD' ו- CDD' אם משפט חוקי זווית-זווית-זווית.

Ⓜ) עז-מנתר לחצה את הזווית $AD'C$, נתבונן המשולש $AD'C$:



אם הסגמים יקובצו, המשולש הוא שווה-שוקיים
כך ש: $AD' = CD' = a\sqrt{10}$
ובנוסף, $AC = a\sqrt{2}$.

עז-מנתר לחצה את הזווית $AD'C$ שגרם למשולש $AD'C$ להיות יקובצו:

$$(a\sqrt{2})^2 = (a\sqrt{10})^2 + (a\sqrt{10})^2 - 2 \cdot a\sqrt{10} \cdot a\sqrt{10} \cdot \cos \angle AD'C$$

$$2a^2 = 10a^2 + 10a^2 - 20a^2 \cdot \cos \angle AD'C$$

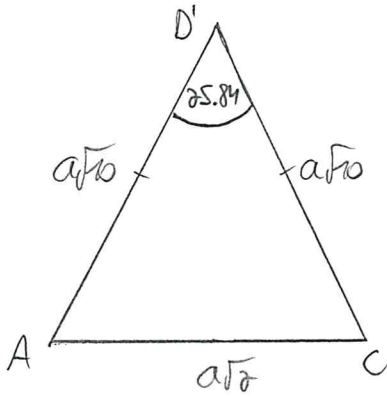
$$-18a^2 = -20a^2 \cdot \cos \angle AD'C \quad /: -20a^2$$

$$\cos \angle AD'C = \frac{9}{10}$$

$$\angle AD'C = 25.84^\circ$$



① נוסף את הזווית שבצמט בסגף הקיום המשולש $AD'C$:



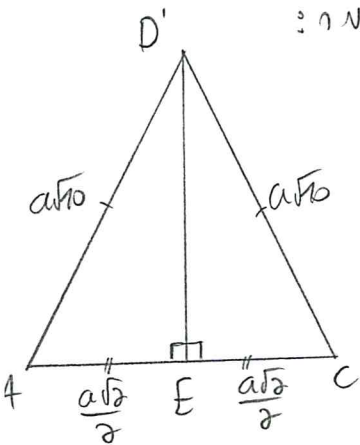
לא נותר להביא את שטח המשולש באמצעות a , נשתמש בנוסחה לשטח משולש באמצעות שני צלעות והזווית שבניהן:

$$S_{AD'C} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \sin 25.84}{2}$$

$$S_{AD'C} = 2.18a^2$$

② נתון כי E 'ים הם אורך המשולש $AD'C$ שהוא משולש שווה-שוקיים ולכן הם גם תיכונים במשולש זה, כלומר:

$$AE = CE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

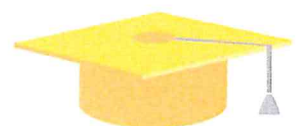


בהכנס $ABCD$ התיבה, הריבוע

האלכסונים חוצים זה את זה

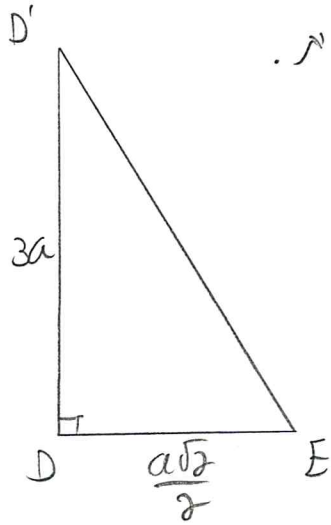
$$AE = CE = DE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

ולכן:



הזווית שבין הישר D'E לבין הנגזרת ABCD היא $\angle D'ED$.
 כל ענף אחת היא זווית 45, נמצא את הנשוא $\angle D'ED$.

יחס הוא עזרה בטיבה ולכן הנשוא הוא ישר-זווית.



$$\tan \angle D'ED = \frac{3a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

$$\tan \angle D'ED = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$\angle D'ED = 76.74^\circ$$



3. נתונה הפונקציה $f(x) = 3 \cdot \sin(x - \frac{\pi}{2})$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים בתחום הנתון.
 ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון, וקבע את סוגן.
 ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.
 ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הישר $x = \pi$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

א. (1) נציא נק' חיתוך עם ציר $y \leftarrow x = 0$
 $f(0) = 3 \sin(0 - \frac{\pi}{2})$
 $f(0) = -3$
 (0, -3)

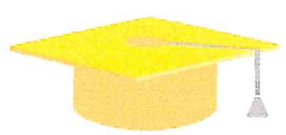
נציא נק' חיתוך עם ציר $x \leftarrow f(x) = 0$
 $0 = 3 \sin(x - \frac{\pi}{2})$
 $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = 0$

נבדוק את כל פתרונות: $x - \frac{\pi}{2} = \pi k$
 $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

הפתרונות בתחום הנתון:
 $x = \frac{\pi}{2}$ $x = -\frac{\pi}{2}$

ואכן נק' החיתוך של הפונקציה עם הצירים:

$(0, -3)$ $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ $(\frac{\pi}{2}, 0)$



א. (2) מצא את שיעורי הקיצור והקיצה:
 נמצא את נק' הקצה: $x = -\pi$

$$f(-\pi) = 3 \sin(-\pi - \frac{\pi}{2})$$

$$f(-\pi) = 3$$

$$(-\pi, 3)$$

$$f(\pi) = 3 \sin(\pi - \frac{\pi}{2}) \quad x = \pi \text{ קיצ'}$$

$$f(\pi) = 3$$

$$(\pi, 3)$$

נמצא את קיצון פנימי:

$$f'(x) = 3 \cos(x - \frac{\pi}{2}) \quad \text{נגזרת}$$

$$0 = 3 \cos(x - \frac{\pi}{2}) \quad f'(x) = 0 \text{ קיצ'}$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \text{נמצא פתרון כללי:}$$

$$x = \pi + \pi k$$

הפתרונות בתחום הנשאל: $x = -\pi, x = 0, x = \pi$

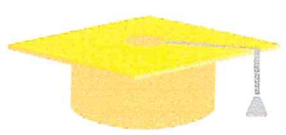
(קיצ' בטבלה למצא את קיצון):

x	$-\pi$	$x = -\frac{\pi}{2}$	0	$x = \frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	0	-	0	+	0
$F(x)$	3	\searrow	-3	\nearrow	3

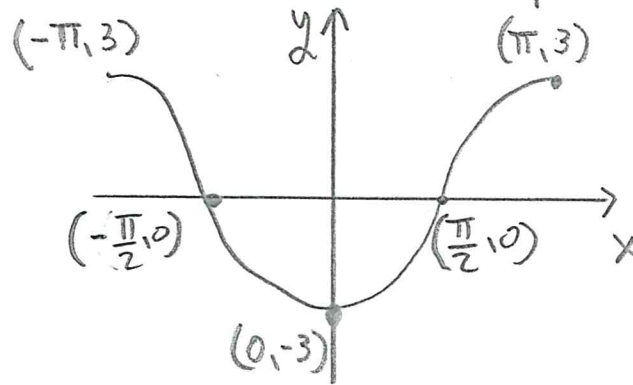
(0, -3) נק' מינימום
 נק' מקסימום קצה (-π, 3)
 נק' מקסימום קצה (π, 3)

$$f'(-\frac{\pi}{2}) = 3 \cos(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) \rightarrow -3$$

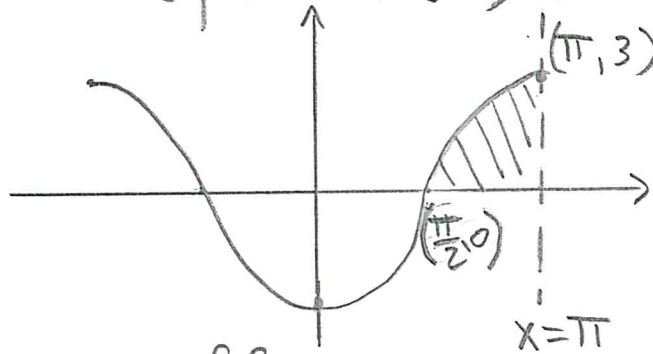
$$f(\frac{\pi}{2}) = 3 \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) \rightarrow 3$$



ג. נסרט את הפונקציה ההיפוטנטיים אסעימים א (1), (2):



ז. נוסף אסרט את השטח המבוקש:



נחשב שטח פשוט של הפונקציה געל אפיר א:

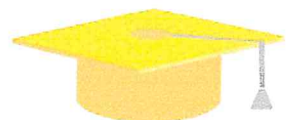
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx =$$

$$\left[-3 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$\left[-3 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \right] - \left[-3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right] \rightarrow \boxed{S = 3}$$

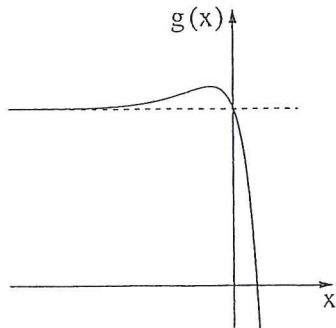
הארה: כיון ש: $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

נין היה ארשום א הפונקציה כ - $f(x) = -3 \cos x$ וחקנו אותה לפי כלל הסעיפים.



4. נתונה הפונקציה $f(x) = 4^{2x} - 4^x - 2$.

- א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
- (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- (3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.



בציור שלפניך סרטוט של גרף הפונקציה $g(x) = -2f(x)$.

לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה שמשוואתה $y = 4$.

- ב. (1) מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$?
- (2) מהי משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$? נמק.
- (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

א. (1) תחום הגדרה: $x \in \mathbb{R}$

(2) נק' חיתוך עם הצירים:

נק' חיתוך עם ציר $y \leftarrow$ נציב $x=0$.

$$f(0) = 4^{2 \cdot 0} - 4^0 - 2$$

$$f(0) = -2$$

$$(0, -2)$$

נק' חיתוך עם ציר $x \leftarrow$ נציב $f(x)=0$

$$0 = 4^{2x} - 4^x - 2$$

ניצחי בחי' חזקה:

$$0 = (4^x)^2 - 4^x - 2$$

$$0 = t^2 - t - 2$$

נציב $4^x = t$ ונקבל:

אם תירי לשלוטה ל'בוא' עיניך:

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$t_1 = -1$$

$$t_2 = 2$$

$$4^x = -1$$

אין פתרון

$$4^x = 2$$

$$2^{2x} = 2^1$$

$$2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

נישע אגסים לבה ונסוה לעני'ים

נק' החיתוך:
 $(0, -2)$
 $(\frac{1}{2}, 0)$



$f'(x) = 4^{2x} \cdot 2 \ln 4 - 4^x \ln 4$ (3) נצטרך את הפונקציה:

$0 = 4^{2x} \cdot 2 \ln 4 - 4^x \ln 4 \quad | : \ln 4 \quad f'(x) = 0$ נציב

$0 = 2 \cdot 4^{2x} - 4^x$

$0 = 2t^2 - t$ נציב $4^x = t$ ונקבל:

$0 = t(2t-1)$

$t=0$

$4^x = 0$

אין פתרון

$2t-1=0$

$t = \frac{1}{2}$

$4^x = \frac{1}{2}$

$2^{2x} = 2^{-1}$

נניח ארבעים נהיה:

$2x = -1$ נשווה האצות:

$x = -\frac{1}{2}$

נציב בפונקציה ונמצא שיעור y :

$f(-\frac{1}{2}) = 4^{2(-\frac{1}{2})} - 4^{-\frac{1}{2}} - 2$

$f(-\frac{1}{2}) = -2.25$

$(-\frac{1}{2}, -2.25)$
נק' מינימום

ניצור טבלה אמצעית סוג הקיצון:

x	x = -1	$-\frac{1}{2}$	x = 0
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘	-2.25	↗

$f'(-1) = 4^{2(-1)} \cdot 2 \ln 4 - 4^{-1} \ln 4 \rightarrow -0.17$

$f'(0) = 4^{2 \cdot 0} \cdot 2 \ln 4 - 4^0 \cdot \ln 4 \rightarrow 1.38$



ג. (1) נתון: $g(x) = -2f(x)$

מכיוון ש- $(-\frac{1}{2}, -2.25)$ היא נק' המינימום של $f(x)$, עבור אותה שיעור x הפונק' $g(x)$ עקבה ערך מקסימלי, ומכיוון ש $g(x) = -2f(x)$, שיעור y של הנקודה מאכלה ג-2.5.

ריבן לפונקציה $g(x)$ תהיה נק' מקסימום עבור $(-\frac{1}{2}, 4.5)$.

הערה: ניתן להשוו את הפונקציה $g(x) = -2(4^{2x} - 4^x - 2)$ ולמצוא נק' קיצון על ידי גזירת הפונקציה.

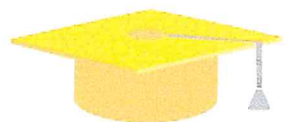
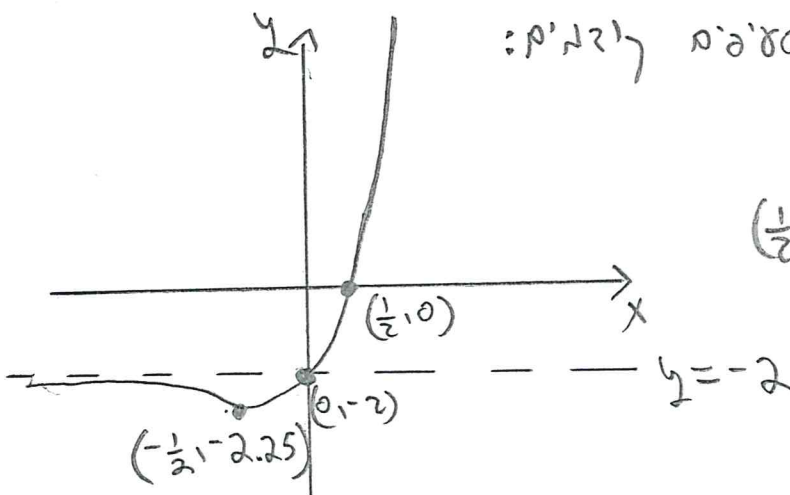
(2) ניתן $g(x) = -2f(x)$ ולכן $f(x) = -\frac{g(x)}{2}$

כיוון שהמס' המטרייה האפק' של $g(x)$ היא $y=4$ תהיה $-\frac{4}{2} \leftarrow$ כלומר $y = -2$ (המס' האפק' של $f(x)$)

(3) נסה $f(x)$ לפי סעיפים קודמים:

מס' אפק' $y = -2$

נק' חיתוך עם הצירים: $(0, 2)$, $(\frac{1}{2}, 0)$
נק' מינימום: $(-\frac{1}{2}, -2.25)$



5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2\ln x + 3}{3}$.

- א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
 (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 (4) כתוב את משוואת האסימפטוטה האנכית של הפונקציה $f(x)$.
 (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ב. (1) כתוב את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.
 (2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.

$b < 1$ הוא פרמטר.

השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה- x , על ידי הישר $x = 1$ ועל ידי הישר $x = b$

שווה ל-4 תל.

ג. מצא את הערך של b .

א. (1) תחום הגדרה ← הביטוי שבתוך הריבוע $x > 0$ הוא תחום הגדרה של הפונקציה.

$x > 0$

חיובי ולכן:

(2) נק' חיתוך עם ציר y :

תחום ההגדרה $x > 0$ ולכן אין חיתוך עם ציר y .

נק' חיתוך עם ציר x : $f(x) = 0$

$$0 = \frac{2\ln x + 3}{3}$$

$$0 = 2\ln x + 3$$

$$\ln x = -1.5$$

$$\log_e x = -1.5$$

$$x = e^{-1.5}$$

$$x = 0.22$$

$(0.22, 0)$ או $(e^{-1.5}, 0)$



(3) מצאתי תחומי עלייה וירידה:
נגזרת פונקציה אוזרימית

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3x}$$

$$0 = \frac{2}{3x} \quad \text{(נשווה נגזרת ל-0)}$$

אין פריבון ולכן אין קיצון.
אין מקבילון ו $x > 0$ הנגזרת תמידית

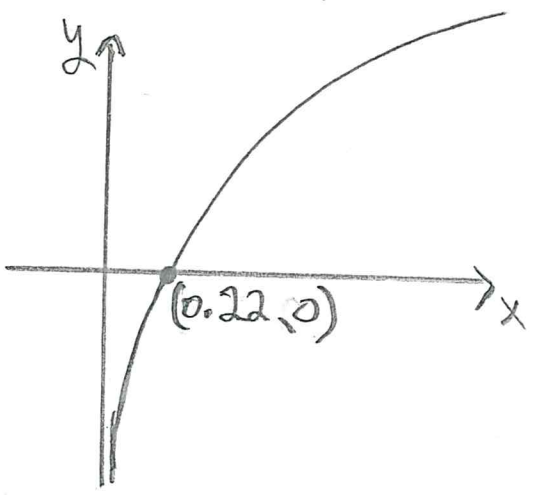
$$f'(x) = \frac{2}{3x}$$

ולכן:
תחום עלייה: $x > 0$
תחום ירידה: $x < 0$

הערה: ניתן להעזר גם בטבלת ערכים למצאת תחומי עלייה וירידה.

(4) אסימטוטה אנכית:
אסימטוטה אנכית של פונקציה אוזרימית לפי תחום ההגדרה:

$$x = 0$$



(5) נסרט לפי סעיפים (4)-(5):

תחום הגדרה $x > 0$

נק' חיתוך עם הצירים: $(0.22, 0)$

עלייה: $x > 0$

אסימטוטה אנכית $x = 0$



ג. א) $f'(x) = \frac{2}{3x}$

אסימטוטה אנכית:
נקודת הנקודה הנכונה

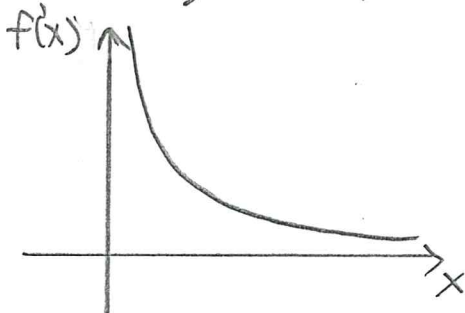
$3x=0$
 $x=0$

$x=0$

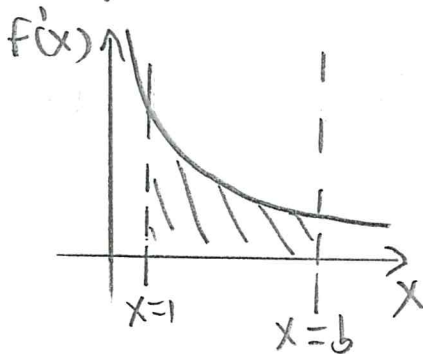
אסימטוטה אנכית עבור
אסימטוטה אופקית:

$y=0$ החזרה הזקוהה במתנה ולכן אסימטוטה אופקית

(2) אפי' ייסע'ד אי (3) הנצ'ר ח'וב' ע'בור $x > 0$



א' אנכ' $x=0$
א' אופק' $y=0$
(נסרט)



ג. נסרט ג' הש'ה המ'וק'ג:
נוס'ד ג' הש'ים
 $x=1$, $x=b$

$\int_1^b f'(x) dx = \ln 4$ נ'ען כ' הש'ה הוא ח'חל ולכן:

$[f(x)]_1^b = \ln 4$

$f(b) - f(1) = \ln 4$

$\frac{2 \ln b + 3}{3} - \frac{2 \ln 1 + 3}{3} = \ln 4$

$\frac{2 \ln b + 3}{3} - 1 = \ln 4$

$2 \ln b + 3 - 3 = 3 \ln 4$

$\ln b = \frac{3}{2} \ln 4$

$\log_e b = 2.079$

$b = e^{2.079}$

$b = 8$

נחידע ע'ן פסיכומטרי
ביואל גבע

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

