פתרון הבחינה
במתמטיקה

חורף תשע"ח, 2018, שאלונים: 35806, 316

מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

1. בכפר נופש יש שתי בריכות: בריכה א' ובריכה ב'.

הנפח של בריכה א' הוא V_1 והנפח של בריכה ב' הוא V_2.

את הבריכות ממלאים באמצעות 4 צינורות בעלי אותו הֶספק.

ביום כלשהו שתי הבריכות היו ריקות.

התחילו למלא את בריכה א' באמצעות ארבעת הצינורות. כאשר התמלאה בריכה א' לכדי $\frac{1}{6}$ מנפחה, העבירו אחד מן הצינורות לבריכה ב' והתחילו למלא אותה באמצעותו. כאשר התמלאה בריכה א' עד מחציתה, העבירו עוד שני צינורות למילוי בריכה ב'.

מילוי שתי הבריכות הסתיים באותו הזמן.

כל הצינורות הזרימו מים ללא הפסקה עד שהתמלאו שתי הבריכות.

חשב את היחס $\frac{V_1}{V_2}$.

תחילה נסמן x - הספק צינור בודד.

נבנה את הטבלה הבאה בהתאם לשלבי התרגיל:

	תאור	עבודה	הספק	זמן
I	4 צינורות לבריכה א'	$\frac{1}{6}V_1$	$4x$	$\frac{V_1}{24x}$
II	3 צינורות לבריכה א'	$\frac{2}{6}V_1$	$3x$	$\frac{V_1}{9x}$
III	צינור בודד לבריכה ב'	$\frac{V_1}{9}$	x	$\frac{V_1}{9x}$
IV	צינור בודד לבריכה א'	$\frac{1}{2}V_1$	x	$\frac{V_1}{2x}$
V	3 צינורות לבריכה ב'	$\frac{3}{2}V_1$	$3x$	$\frac{V_1}{2x}$

מתרחש בו זמנית

מתרחש בו זמנית

V_2 - סך כל המים שזרמו לבריכה ב'

משורות III ו- V :

$$V_2 = \frac{V_1}{9} + \frac{3}{2}V_1$$

$$V_2 = \left(\frac{1}{9} + \frac{3}{2}\right)V_1$$

$$V_2 = \frac{29}{18}V_1 \rightarrow \boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{18}{29}}$$

2. a_n היא סדרה חשבונית שההפרש שלה, d, שונה מ־ 0.

נתון: $a_7 = -a_{17}$.

א. מצא את a_{12}.

ב. (1) האם קיים בסדרה איבר שערכו שווה ל־ $-a_1$? נמק.

(2) מצא מספר טבעי n שעבורו סכום n האיברים הראשונים בסדרה שווה ל־ 0.

ג. האם קיים n טבעי שעבורו: $a_n \cdot a_{n+1} < 0$? אם כן — מצא n כזה, אם לא — נמק.

ד. האם אפשר לדעת כמה איברים שליליים יש בסדרה? נמק (הבחן בין מקרים שונים).

נתון: a_n סדרה חשבונית

d הפרש $d \neq 0$

$a_7 = -a_{17}$

$a_1 + 6d = -(a_1 + 16d)$ א

$2a_1 + 22d = 0$

$a_1 + 11d = 0$

$\Downarrow$

$\boxed{a_{12} = 0}$

ב

(1)

$$a_1+(n-1)d=-a_1$$

$$2a_1+nd-d=0$$

לפי סעיף א'

$$a_1=-11d$$

$$2\cdot(-11d)+nd-d=0 \quad \Big| :d\neq 0$$

$$-22+n-1=0$$

$$n=23$$

מס' אבר'

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a_{23}=-a_1}$$

(2)

$$S_n=0$$

$$S_n=\frac{a_n+a_1}{2}\cdot n$$

לפי סעיף ב 1

$$\frac{a_{23}+a_1}{2}\cdot 23=0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{S_{23}=0}$$

ד) (1) את הסעיף הזה ניתן לפתור
גם בדרך אחרת.

בסדרה חשבונית מתקיים

$$a_{n+k}+a_{n-k}=2a_n$$

הוכח בסעיף א'

$$a_{12}=0$$

אז עבור $n=12$ ו- $k=11$

$$a_{12+11}+a_{12-11}=2a_{12}$$

$$a_{23}+a_1=0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a_{23}=-a_1}$$

ג

$a_n \cdot a_{n+1} < 0$

אם מכפלה של שני המספרים שלילית, הם
חייבים להיות בעלי סימנים שונים.

הוכחה בסעיף א' שבסדרה יש איבר 0. ($a_{12}=0$)

⇓

עבור $n>12$ כל איברי הסדרה
בעלי סימנים זהים
ועבור $n<12$ כל איברי הסדרה
בעלי סימנים זהים.

ולכן אין בסדרה שני איברים עוקבים
בעלי סימנים שונים.

⇓

לא קיים כזה n טבעי
שעבורו מתקיים $a_n \cdot a_{n+1} < 0$

ד אם האיבר הראשון בסדרה שלילי,
אז הסדרה היא עולה ויש בה 11 איברים שליליים.

אם האיבר הראשון בסדרה חיובי,
אז הסדרה היא יורדת,
אין לדעת כמה איברים שליליים יש בה.

3. למיכל יש קובייה מאוזנת. על שלוש מפאות הקובייה שלה כתוב המספר 2 , ועל שלוש הפאות האחרות כתוב המספר 4 .

לגלית יש קובייה מאוזנת אחרת. על כל אחת מפאות הקובייה של גלית כתוב אחד מן המספרים: 1 או 3 .

מיכל וגלית משחקות משחק בן חמישה סיבובים. המשתתפת שתנצח במספר סיבובים רב יותר מחברתה, תנצח במשחק. בכל סיבוב של המשחק כל אחת מהן מטילה את הקובייה שלה פעם אחת.

המנצחת בסיבוב היא השחקנית שהמספר שהתקבל על הקובייה שלה גבוה יותר.

נתון שבסיבוב יחיד הסיכוי של מיכל לנצח את גלית הוא $\frac{7}{12}$.

א. על כמה פאות בקובייה של גלית כתוב המספר 1 ? נמק את תשובתך.

ב. מהו הסיכוי שגלית תנצח במשחק?

ג. מהו הסיכוי של גלית לנצח במשחק, אם ידוע שהיא ניצחה בסיבוב הראשון?

מיכל: ההסתברות לקבל "2" - $\frac{1}{2}$

ההסתברות לקבל "4" - $\frac{1}{2}$

גלית: ההסתברות לקבל "3" - x סימון

ההסתברות לקבל "1" - $1-x$

א

$$P(\text{מיכל תנצח בסיבוב } 1) = \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{5}{12}$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$\Downarrow$

על 5 פאות כתובה ספרה "3" ועל פאה אחת ספרה "1"

על קובייה של גלית מספר "1"
כתוב על פאה אחת.

ב) ההסתברות שגלית תנצח
במשחק בודד היא $1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$

$n=5$

$K=3,4,5$

$$P(\text{גלית תנצח במשחק})=\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^5\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^0+\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^4\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^1+\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^3\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^2=$$

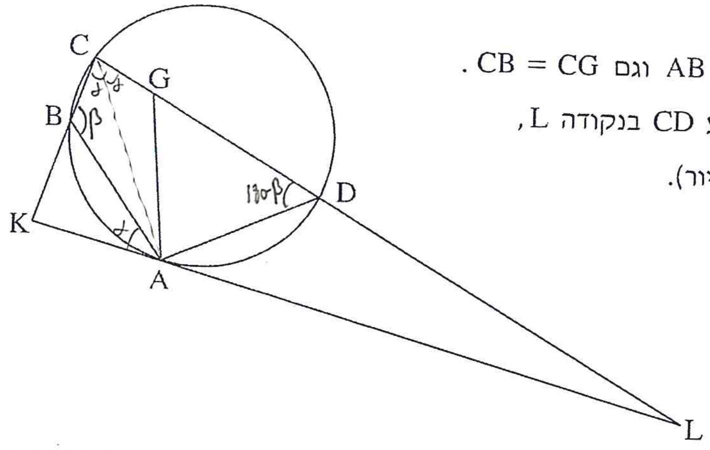
$$\boxed{P=0.3466}$$

ט

$$P\left(\text{גלית תנצח במשחק} \;/\; \text{גלית תנצח בסיבוב ראשון}\right) =$$

$$\frac{\frac{5}{12}\cdot\left[\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^4\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^0+\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^3\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^1+\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^2\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^2\right]}{\frac{5}{12}} \Rightarrow$$

$$\boxed{P = 0.5533}$$



4. המרובע ABCD חסום במעגל.

הנקודה G נמצאת על הצלע CD כך ש־ $AB = AG$ וגם $CB = CG$.

המשיק למעגל בנקודה A חותך את המשך הצלע CD בנקודה L,

וחותך את המשך הצלע CB בנקודה K (ראה ציור).

א. הוכח כי $AD = AG$.

ב. (1) הוכח כי $\triangle ABK \sim \triangle CDA$.

(2) הוכח כי $AD^2 = BK \cdot CD$

ג. הראה כי $\frac{LA}{AK} = \frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}}$.

	טענה	נימוק
①	$CB = CG$, $AB = AG$	נתון
②	KL משיק למעגל בנק' A	נתון
③	ABCD מרובע חסום במעגל	נתון
④	$\measuredangle CDA = 180° - \measuredangle CBA = 180° - \beta$ $\measuredangle CBA \equiv \beta$	סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל שווה ל- 180° + סימון β
⑤	ABCG - דלתון	מרובע בו שני זוגות צלעות סמוכות שוות, הוא דלתון, שורה ①
⑥	$\measuredangle CGA = \measuredangle CBA = \beta$	זוויות בסיס בדלתון שוות זו לזו.
⑦	$\measuredangle AGD = 180° - \beta$	משלימה לזווית שטוחה + שורה ⑥

טענה		נימוק
8	$\sphericalangle AGD = \sphericalangle ADG = 180° - \beta$	כלל המעבר לשוויון (7) ו-(4)
9	$AG = AD$	מול זוויות שוות ב-$\triangle AGD$ צלעות שוות, שורה (8)
	כנדרש א'	
10	$\sphericalangle KAB = \sphericalangle BCA \equiv \alpha$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על אותו המיתר מצידו ההפוך. שורה (2) + סימון
11	$AD = AB$	כלל המעבר שורות (1) ו-(9)
12	$\sphericalangle DCA = \sphericalangle BCA = \alpha$	מול מיתרים שווים במעגל, זוויות היקפיות שוות.
13	$\sphericalangle DCA = \sphericalangle KAB = \alpha$	כלל המעבר לשוויון (10) ו-(12)
14	$\sphericalangle KBA = 180° - \beta$	נספחות לזווית שטוחה + סימון שורה (4)
15	$\sphericalangle KBA = \sphericalangle CDA = 180° - \beta$	כלל המעבר לשוויון (4) ו-(14)

	טענה	נימוק
16	$\triangle ABK \sim \triangle CDA$	לפי משפט דמיון ז.ז שורות 13 ו-15
	כנדרש ב (1)	
17	$\frac{AB}{CD} = \frac{BK}{AD} = \frac{AK}{AC}$	יחס הדמיון ב-מ"ם דומים, שורה 16
	$\Downarrow$	
18	$AD \cdot AB = BK \cdot CD$	חישוב, שורה 17
19	$AD^2 = BK \cdot CD$	$AD = AB$, הצבה של שורה 11
	כנדרש ב (2)	
20	$\sphericalangle DAL = \sphericalangle DCA = \alpha$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על אותו המיתר מצידו השני + שורה 13
21	$\sphericalangle BAK = \sphericalangle DAL = \alpha$	כלל המעבר לשורות 12 ו-20

	טענה	נימוק
(22)	$\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} AD \cdot AL \cdot \cancel{\sin\alpha}}{\cancel{\frac{1}{2}} AB \cdot AK \cdot \cancel{\sin\alpha}}$	נשתמש בנוסח לשטח משולש על פי שתי צלעות והזווית שביניהן
	$\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \frac{\cancel{AB} \cdot AL}{\cancel{AB} \cdot AK} = \frac{AL}{AK}$	הצבה $AD=AB$, שורה (11)

כנדרש ג

הערה: ניתן להוכיח את סעיף ג' ע"י הורדת גבהים לבסיסים AK ו- AL מהנקודות B ו- D בהתאמה ולהראות כי הגבהים שווים ע"י חפיפה.

5. נתונה מקבילית ABCD . AC הוא האלכסון הארוך, כמתואר בציור.

במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו O.

נתון: הנקודה O נמצאת במרחקים 6 ו־ 3

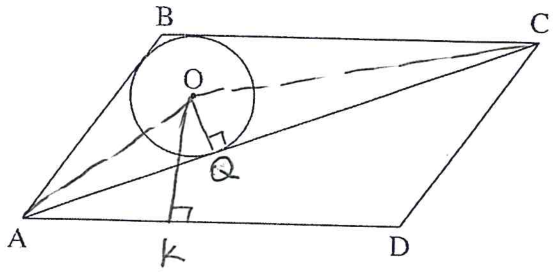
מן הישרים AD ו־ AC בהתאמה;

. OA = 10

א. חשב את גודלי זוויות המקבילית.

ב. חשב את אורך האלכסון AC .

ג. חשב את שטח המקבילית.



בנ"ת עזר!

$OQ \perp AC$ (רדיוס מאונך למשיק)

$OQ = 3$

$OK \perp AD$

$OK = 6$

$\angle BAO = \angle OAC, \quad \angle BCO = \angle OCA$

מרכז מעגל החסום במשולש נמצא במפגש חוצי זוויות.

$BC \parallel AD$

$\Downarrow$

$\angle BCA = \angle CAD$

$AO = 10$ נתון:

ג

$\triangle AOQ$

$$\sin \sphericalangle OAQ = \frac{3}{10}$$

$$\sphericalangle OAQ = 17.46^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle BAC = 2 \cdot 17.46^\circ = 34.92^\circ$$

$\triangle OAK$

$$\sin \sphericalangle OAK = \frac{6}{10}$$

$$\sphericalangle OAK = 36.87^\circ$$

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle BCA = 36.87^\circ - 17.46^\circ = 19.41^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sphericalangle A = 36.87^\circ + 17.46^\circ = 54.33^\circ = \sphericalangle C \\ &\sphericalangle D = 180^\circ - 54.33^\circ = 125.67^\circ = \sphericalangle B \end{aligned}}$$

ה

ΔAOQ

$AQ^2 = AO^2 - OQ^2$

$AQ = \sqrt{100 - 9} = 9.54$

$\measuredangle OCQ = 9.71^\circ$

ΔOCQ

$\tan 9.71^\circ = \frac{3}{CQ}$

$CQ = 17.54$

$\Downarrow$

$\boxed{AC = 9.54 + 17.54 = 27.08}$

ג

$\triangle ABC$ משפט הסינוסים

$$\frac{27.08}{\sin 125.67^\circ} = \frac{AB}{\sin 19.41^\circ}$$

$$AB = \frac{27.08 \cdot \sin 19.41^\circ}{\sin 125.67^\circ} = 11.08$$

$$\triangle ABC \cong \triangle ADC$$

$$\Downarrow$$

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \measuredangle BAC$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 11.08 \cdot 27.08 \sin 34.92^\circ$$

$$\boxed{S_{ABCD} = 171.73}$$
סמ"ר

6. נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$, $g(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$.

ענה על סעיף א עבור התחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המאונכות לציר ה־ x .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענה גם על סעיף ב עבור התחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

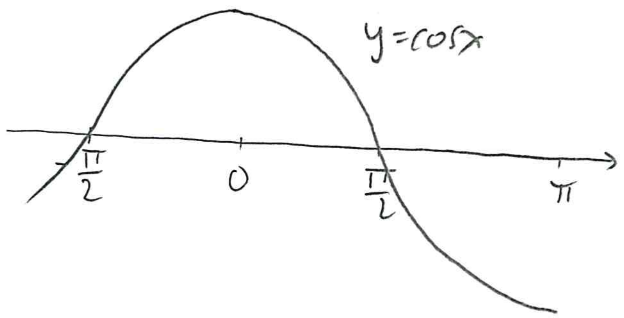
(2) הוכח: $g(x)=-f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ג. מצא את ערך הביטוי $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$. נמק את תשובתך.

$\underline{\text{א}}$(1) לתחום הגדרה לפונק' $f(x)$ נדרוש $\cos x>0$



בתחום הנתון:

$$\boxed{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}}$$

(2) למציאת אסימפטוטות אנכיות, נסתכל על $f(x)$ בסביבת תחום ההגדרה:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} = \frac{-1}{0} = -\infty \rightarrow \boxed{x=-\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{2}}$$

(3) למציאת תחומי עליה/ירידה, נסתכל על הנגזרת $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{\cos x\cdot\sqrt{\cos x} - \sin x\cdot\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x} = \frac{2\cos^2 x + \sin^2 x}{2\cos x\cdot\sqrt{\cos x}}$$

נשתמש בזהות: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$:

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + 1}{2\cos x\sqrt{\cos x}}$$

מהתנאי לתחום ההגדרה $\cos x>0$

לכן המכנה חיובי לכל x בתחום ההגדרה.

כן גם המונה חיובי לכל x בתחום ההגדרה

ולכן חיובית f' לכל x בתחום ההגדרה.

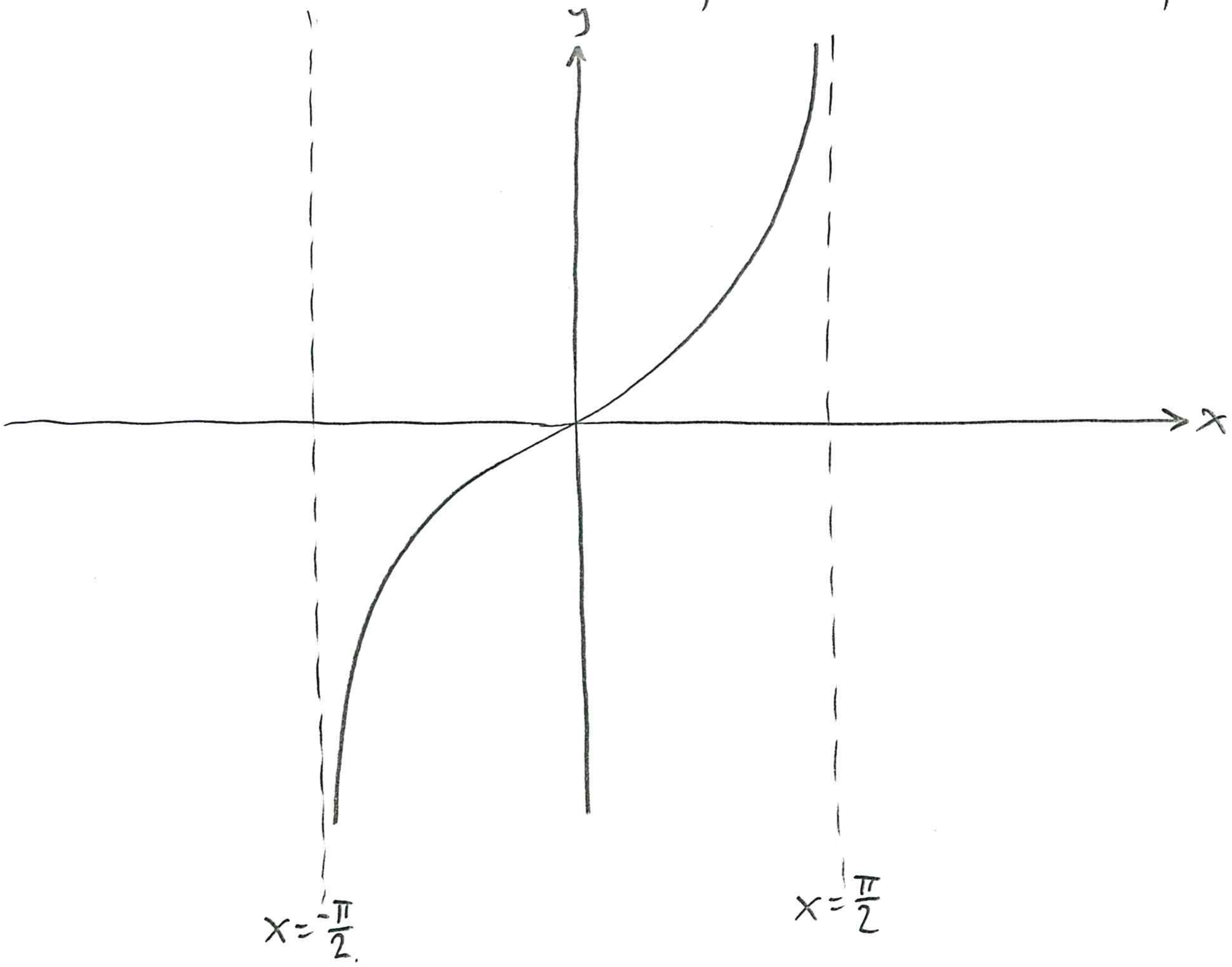
נפרט:

תחום עלייה: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

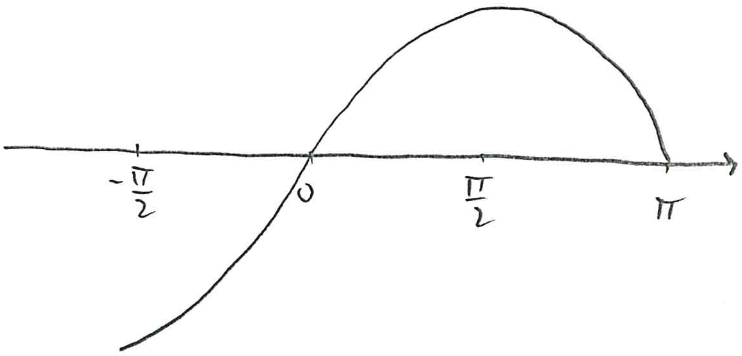
תחום ירידה: אין

(4) ניתן לשים לב כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי זוגית, כי מתקיים $f(-x) = -f(x)$ וכמובן $f(0) = 0$

ומכאן הגרף בתחום הנתון:



ב. (1) לתחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ נרצה סקיצה



בתחום הנתון:

$$\boxed{0 < x < \pi}$$

(2)
$$-f\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}} =$$

$$= -\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} = g(x)$$

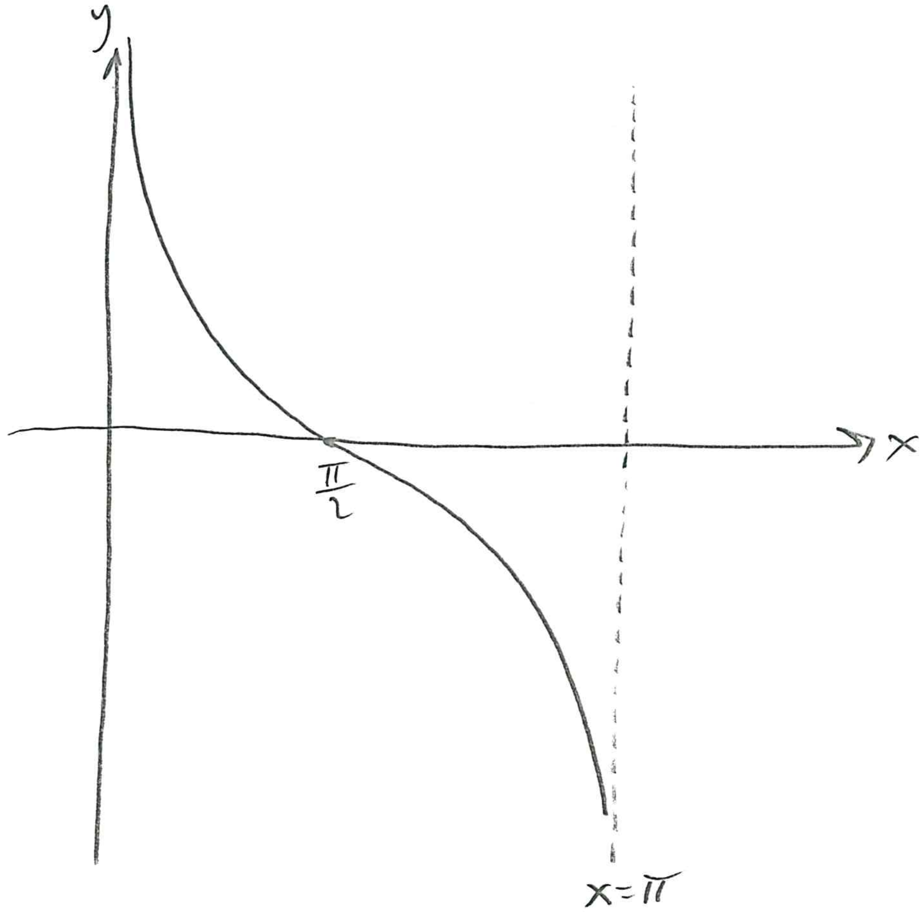
הזהויות שהיו בשימוש:
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

(3) כפל של $f(x)$ ב- -1 יוצר שיקוף סביב ציר ה-x

הורדה של $\frac{\pi}{2}$ מהמשתנה הבלתי תלוי x גוררת הזזה

לכיוון ימין ב- $\frac{\pi}{2}$.

ומכאן הרכבה של הפעולות $g(x) = -f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$



ב. בסעיף א-(4) ראינו כי הפונקציה $f(x)$ היא
פונקציה אי זוגית
הגבולות באינטגרל הנתון סימטריים לציר ה-y
ולכן ערך האינטגרל הנתון הוא אפס:

$$\boxed{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = 0}$$

נראה גם בדרך אחרת:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$$

נבחר משתנה אינטגרציה חדש:

$$\cos x = u$$

$$-\sin x \cdot dx = 1 \cdot du$$

$$dx = \frac{-1}{\sin x}\,du$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = \int \frac{\cancel{\sin x}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{-1}{\cancel{\sin x}}\,du = -\int u^{-\frac{1}{2}}\,du =$$

$$= -\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{u} = -2\sqrt{\cos x}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = -2\sqrt{\cos x}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left[-2\sqrt{\cos\frac{\pi}{4}}\right] - \left[-2\sqrt{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right] =$$

נשתמש בזהות $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$$= -2\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} + 2\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 0$$

ולכן

$$\boxed{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = 0}$$

7. נתונה משפחת הפונקציות: $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-a}$. a הוא פרמטר, $a \neq 0$, $a \neq 4$.

ענה על סעיף א. הבע באמצעות a במידת הצורך. הבחן בין $a > 0$ ובין $a < 0$ במידת הצורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המקבילה לציר ה־ x .

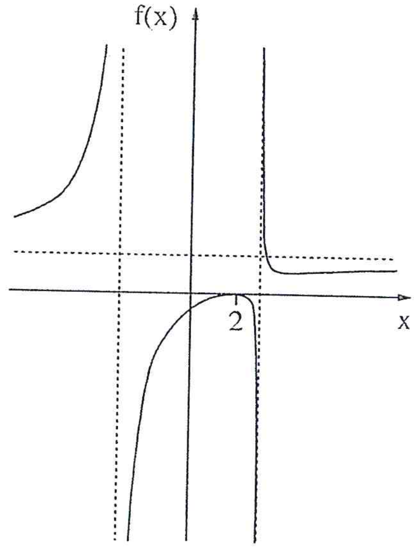
(4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ x (אם יש כאלה).

ענה על סעיף ב. הבע באמצעות a במידת הצורך. הבחן בין $a > 4$ ובין $a < 4$ במידת הצורך.

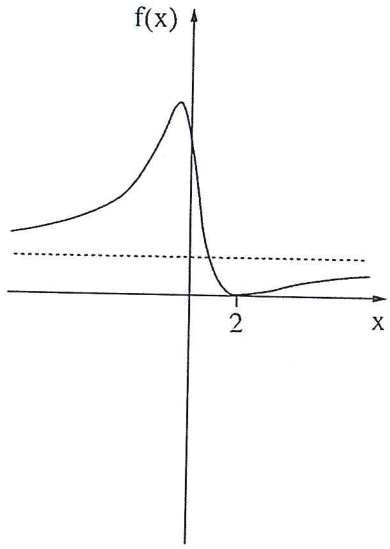
ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ג. לפניך שלושה גרפים אפשריים של הפונקציה $f(x)$, כל אחד עבור ערך אחר של a .

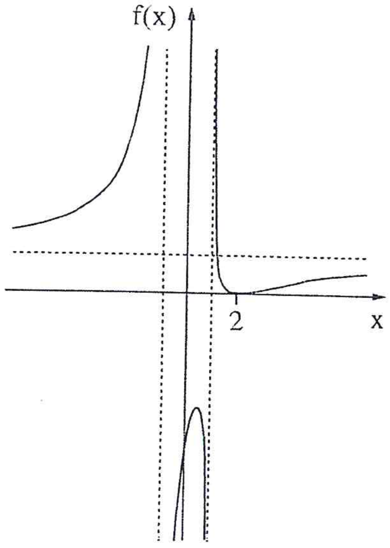
כתוב מהו תחום הערכים של a המתאים לכל אחד מן הגרפים I-III . נמק את תשובתך.



I



II



III

א

לתחום ההגדרה, המכנה שונה מאפס:

$x^2-a\neq 0$

$x^2\neq a$

בעבור $a<0$ תחום הגדרה כל x

בעבור $a>0$ תחום הגדרה $x \neq \pm\sqrt{a}$

(2) לחיתוך עם ציר ה-x $f(x)=0$:

$$\frac{(x-2)^2}{x^2-a}=0 \rightarrow x=2 \rightarrow \boxed{(2,0)}$$

לחיתוך עם ציר ה-y : $x=0$

$$f(0)=\frac{4}{-a} \rightarrow \boxed{\left(0, \frac{-4}{a}\right)}$$

(3) לאסימפטוטה אופקית נבדוק את התנהגות הפונקציה

לערכי x גדולים מאוד:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-2)^2}{x^2-a}=\frac{x^2}{x^2}=1 \rightarrow \boxed{y=1}$$

(4)

בעבור $a<0$ אין לפונקציה אסימפטוטה אנכית

בעבור $a>0$:

$$\lim_{x \to \pm\sqrt{a}} \frac{(x-2)^2}{x^2-a} = \infty$$

לכן

$$\boxed{\begin{matrix} x=-\sqrt{a} \\ x=\sqrt{a} \end{matrix}}$$

ב. למציאת נקודות קיצון נבדוק את ערך הנגזרת:

$$f'(x) = \frac{2(x-2)(x^2-a)-2x(x-2)^2}{(x^2-a)^2} =$$

$$= \frac{2(x-2)[x^2-a-x(x-2)]}{(x^2-a)^2} = \frac{2(x-2)(2x-a)}{(x^2-a)^2}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow 2(x-2)(2x-a)=0$$

$$x=2 \qquad x=\frac{a}{2}$$

$$f(2)=0$$

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}a-2\right)^2}{\frac{a^2}{4}-a} = \frac{\cancel{\tfrac{1}{4}}(a-4)^{\cancel{2}}}{\cancel{\tfrac{1}{4}}a\cancel{(a-4)}} = \frac{a-4}{a}$$

נמצא את סוג הקיצון לפי מבחן הנגזרת השניה
לנקודת קיצון בלבד:

$$f'(x)=\frac{2(2x^2-ax-4x+2a)}{(x^2-a)^2}$$

לנקודת קיצון בלבד
$$f''(x)=\frac{2(4x-a-4)}{(x^2-a)^2}$$

לנק' קיצון בלבד
$$f''(2)=\frac{2(8-a-4)}{+}=\frac{2(4-a)}{+}$$

בעבור $a>4$ $f''<0$ ולכן מקסימום $(2,0)$

בעבור $a<4$ $f''>0$ ולכן מינימום $(2,0)$

לנק' קיצון בלבד
$$f''\left(\tfrac{1}{2}a\right)=\frac{2(2a-a-4)}{+}=\frac{2(a-4)}{+}$$

בעבור $a>4$ $f''>0$ ולכן מינימום $\left(\frac{1}{2}a,\ \frac{a-4}{a}\right)$

בעבור $a<4$ $f''<0$ ולכן מקסימום $\left(\frac{1}{2}a,\ \frac{a-4}{a}\right)$

ג

בעבור גרף I הנקודה $(2,0)$ היא נקודת מקסימום
ונקודת הקיצון הנוספת היא נק' מינימום

ולכן $\boxed{\text{תחום הערכים המתאים לגרף I הוא } a>4}$

בעבור גרף II תחום ההגדרה הוא כל x

ולכן $\boxed{\text{תחום הערכים המתאים לגרף II הוא } a<0}$

בעבור גרף III הנקודה $(2,0)$ היא נקודת מינימום
ונקודת הקיצון הנוספת היא מקסימום

לכן $\boxed{\text{תחום הערכים המתאים לגרף III הוא } 0<a<4}$

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=t$.

נתון: $1\le t\le 5$.

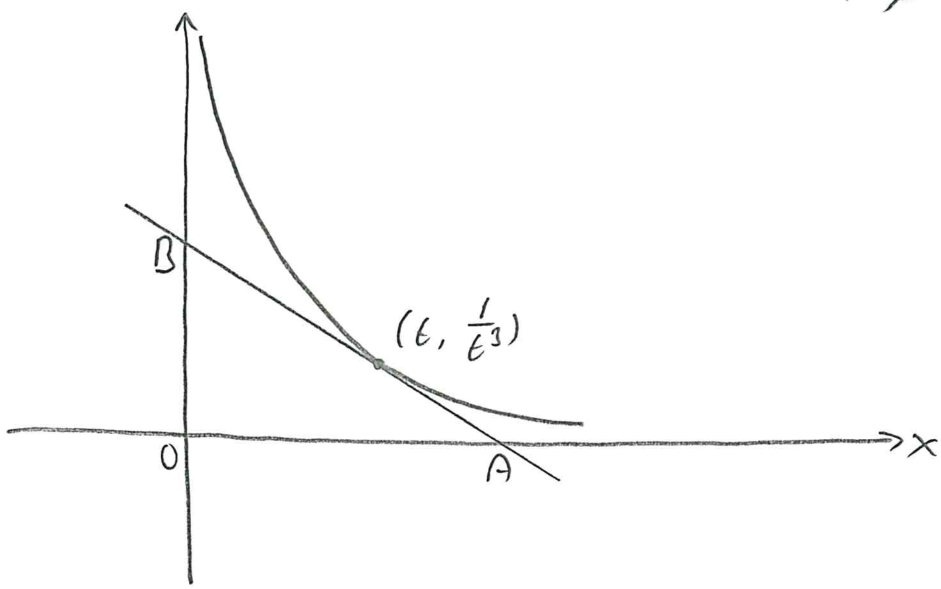
המשיק חותך את ציר ה־ x בנקודה A ואת ציר ה־ y בנקודה B. הנקודה O היא ראשית הצירים.

א. מצא את שיעור ה־ x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מינימלי.

ב. מצא את שיעור ה־ x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מקסימלי.

__ב__ בתחום $1\le t\le 5$

הפונקציה $f(x)$ חיובית ויורדת ולכן ניתן לשרטט את הפונקציה בתחום:



נמצא תחילה את משוואת המשיק לגרף הפונקציה

$$f'(x)=\frac{-3}{x^4}$$

$$m = f'(t) = \frac{-3}{t^4}$$

ומכאן משוואת המשיק עפ"י שיפוע ונקודה $\left(t, \frac{1}{t^3}\right)$

$$y - \frac{1}{t^3} = \frac{-3}{t^4}(x - t)$$

בשביל הנק' A: $y=0$

$$0 - \frac{1}{t^3} = \frac{-3}{t^4}(x - t)$$

$$\frac{1}{3}t = x - t \rightarrow x_A = \frac{4}{3}t \rightarrow A\left(\frac{4}{3}t, 0\right)$$

בשביל הנק' B: $x=0$

$$y - \frac{1}{t^3} = \frac{-3}{t^4}(0 - t)$$

$$y - \frac{1}{t^3} = \frac{+3}{t^3} \rightarrow y_B = \frac{4}{t^3} \rightarrow B\left(0, \frac{4}{t^3}\right)$$

נגדיר את פונקציית המטרה : $OA + OB \rightarrow min$

$y(t) = \frac{4}{3}t + \frac{4}{t^3}$

נמצא את הנקודות החשודות כנקודות קיצון ע"י $y'(t) = 0$

$y'(t) = \frac{4}{3} - \frac{12}{t^4} = 0$

$\frac{4}{3} = \frac{12}{t^4} \rightarrow t^4 = 9 \qquad t = \sqrt{3} \qquad \cancel{t = -\sqrt{3}}$

מחוץ לתחום ההגדרה

נמצא את סוג הקיצון עפ"י מבחן הנגזרת השנייה :

$y''(t) = \frac{+48}{t^5} \qquad y''(\sqrt{3}) > 0 \rightarrow$ מינימום

ומכאן, בעבור $\boxed{t = \sqrt{3}}$ סכום ניצבי $\triangle AOB$ הוא מינימלי.

ב. את ערכי המקסימום לפונק' השטח שקיבלנו
בסעיף א' נמצא בנקודות קצה

נציב את הערכים בנקודות הקצה ונציגם בטבלה הבאה:

x	1		$\sqrt{3}$		5
y	$5\frac{1}{3}$				6.7
y'	max	− ↘	0 min	+ ↗	max

$y(1)=5\frac{1}{3}$ $\qquad$ $y(5)=6.7$

את המקסימום המוחלט קיבלנו בקצה $\boxed{x=5}$.