

פתרון הבחינה

במתמטיקה

חורף תשע"ח, 2018, שאלונים: 313, 35803
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. מחירו של שולחן הוא פי 2 יותר ממחירו של כיסא.
 במבצע מכירות הוזל מחיר השולחן ב-15%, ומחירו של הכיסא הוזל ב-25%.
 אלי קנה שולחן אחד ו-3 כיסאות במחירי המבצע ושילם 1,343 שקלים סך הכול.
 א. חשב מה היה המחיר של כיסא לפני המבצע, ומה היה המחיר של שולחן לפני המבצע.
 בתקציב של אלי היה אפשר לקנות בדיוק שולחן אחד ו-3 כיסאות במחיר שלפני המבצע.
 ב. האם סכום הכסף שחסך אלי בזכות המבצע יספיק לקניית עוד כיסא? נמק.

א. קניית נעליים

$$\begin{aligned}
 &X - \text{מחיר כיסא לפני המבצע} \\
 &2X - \text{מחיר שולחן לפני המבצע} \\
 \hline
 &\text{קניית משלוח}
 \end{aligned}$$

מחיר שולחן הנוף - 15% זול, זולתן מחירו לאתר הנוף
 באחוזים הוא 85% ממחירו המקורי
 כולמו 85% = $1.2X$
 נקבל:

$$\frac{85}{100} \cdot 2X = 1.7X$$

מחיר כיסא הנוף - 25% זול, זולתן מחירו לאתר הנוף
 הוא 75% ממחירו המקורי, כולמו
 75% = $X - N$

$$\frac{75}{100} \cdot X = 0.75X \quad \text{נקבל:}$$



המטלה: מחיר + 3 כנסות = 1343

$$1.7x + 3 * 0.75x = 1343$$

$$1.7x + 2.25x = 1343$$

$$3.95x = 1343 \quad / : 3.95$$

$$x = 340$$

תשובה: מחיר כנסת הוא 340 שקלים

מחיר שולחן הוא 2x

$$2 * 340 = 680 \text{ שקלים}$$

ג. הרכיב שאולי הוא:

מחיר שולחן זמני המגבג + מחיר 3 כנסות זמני המגבג

$$680 + 3 * 340 = 1,700$$

אולי טיפס עבור הקנייה סכום הנסף שניתן לו הוא:

$$1,700 - 1,343 = 357$$

מחיר כנסת לאחר הוצבה ג'פה סוף סוף הוא 0.75.

מצאנו $x = 340$, ולכן מחיר כנסת לאחר הוצבה

הוא $0.75 * 340$, כלומר 255 שקלים.

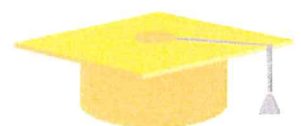


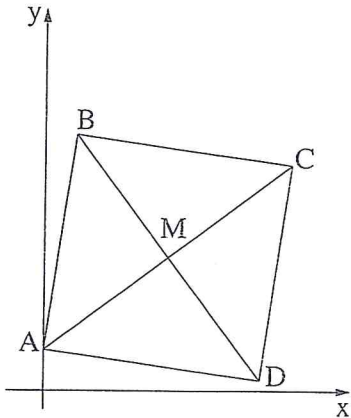
נסכין סכום הנסף שניתר אלמי אחרי הקנייה
הוא 357 שקלים.
אחרי ניסא אחר הונחה הוא 255 שקלים.

$$357 > 255$$

אכן אלמי יואל זקנת ניסא נוסף.

תשובה: אלמי יואל זקנת ניסא נוסף





2. ABCD הוא ריבוע. הקודקוד A נמצא על ציר ה-y (ראה ציור).

נתון: שיעור ה-x של הקודקוד C הוא 24,

משוואת האלכסון AC היא $y = \frac{3}{4}x + 4$.

א. (1) מה הם שיעורי הקודקוד A?

(2) מצא את שיעור ה-y של הקודקוד C.

M היא נקודת מפגש האלכסונים בריבוע ABCD.

ב. (1) מהו שיפוע האלכסון BD?

(2) מצא את משוואת האלכסון BD.

הישר BD חותך את ציר ה-y בנקודה E.

ג. מצא את היקף המשולש AME.

א. (1) A נמצאת על ציר ה-y ולכן שיעור ה-x שלה הוא 0.

(2) מצא את שיעור ה-y של הקודקוד C:

$$AC: y = \frac{3}{4}x + 4$$

$$y = \frac{3}{4} \cdot 0 + 4 = 4$$

$$\boxed{A(0, 4)}$$

(2) הנתון שיעור ה-x של הקודקוד C הוא 24.

מצא את שיעור ה-y של הקודקוד C:

$$AC: y = \frac{3}{4}x + 4$$

$$y = \frac{3}{4} \cdot 24 + 4 = 22$$



$$Y(A) = 2/2$$

ק. (1) את כסוני הריקון מאנכיז זה רצה אכן מנהיג
 שיטותיהם היא -1, אלא השיבוך של האלכסון
 האמצעי הוא הוכיח ונגזי השיבוך של האלכסון היטני.

$$\frac{3}{4} \cdot m_{BD} = -1$$

$$m_{BD} = \frac{-1}{\frac{3}{4}} = -1\frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{4} \xrightarrow{\text{הוכיז}} \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{לגזי}} -\frac{4}{3} = \boxed{-1\frac{1}{3}}$$

(2) נמצא את שיטותי הנקודה M.
 את כסוני הריקון חלוצים זה את זה, אכן
 M היא נקודת האמצע של האלכסון AC.

$$A(0, 4) \quad X_M = \frac{0+24}{2} = 12$$

$$C(24, 22) \quad Y_M = \frac{4+22}{2} = 13$$

$$M(12, 13)$$



מטואל BD :

$$m = -1\frac{1}{3}$$

$$M(12, 13)$$

$$y - 13 = -1\frac{1}{3}(x - 12)$$

$$y - 13 = -1\frac{1}{3}x + 16$$

$$\boxed{y = -1\frac{1}{3}x + 29} = \boxed{y = -\frac{4}{3}x + 29}$$

ע. נמצא את שיטת הנקודה E.

E נמצאת על ציר y חתך שיטת ה-x שלה הוא 0.

נציב $x=0$ במטואל האלכסון BD שמצאנו קודם ונקבל:

$$BD: y = -1\frac{1}{3}x + 29$$

$$y = -1\frac{1}{3} \cdot 0 + 29 = 29$$

היקף מטואל AME הוא:

$$ME + MA + AE$$

נמצא את אורכי הצלעות ונתקין:



$$d_{ME} = \sqrt{(12-0)^2 + (29-13)^2} = 20$$

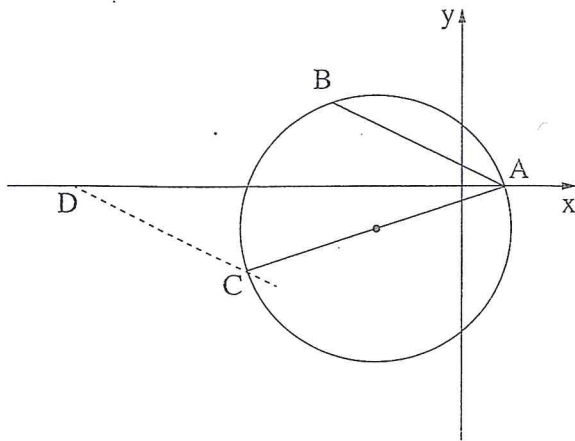
$$d_{MA} = \sqrt{(12-0)^2 + (13-4)^2} = 15$$

$$AE = 29 - 4 = 25$$

$$y_{\text{המטלות}} = 20 + 15 + 25 = 60$$

היקף מטלת AME הוא 60 יחידות





3. נתון מעגל שמשוואתו היא $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 40$.
- הנקודה A היא נקודת החיתוך של המעגל עם החלק החיובי של ציר ה-x (ראה ציור).
- מצא את שיעורי הנקודה A.
 - נתונה הנקודה $B(-6, 4)$.
 - הראה כי הנקודה B נמצאת על המעגל.
 - הנקודה C נמצאת על המעגל כך ש-AC הוא קוטר במעגל.
 - מצא את שיעורי הנקודה C.
 - דרך הנקודה C העבירו ישר המקביל לישר AB.
 - מצא את משוואת הישר שהעבירו (הישר המקווקו בציור).
 - הישר שאת משוואתו מצאת בסעיף ד חותך את ציר ה-x בנקודה D.
 - חשב את שטח המשולש ADC.

א. A היא נקודת החיתוך של המעגל עם ציר ה-x.

אכן שיעור ה-y שלה הוא 0.
ב) $y=0$ במשוואת המעגל ונקבל:

$$(x+4)^2 + (y+2)^2 = 40$$

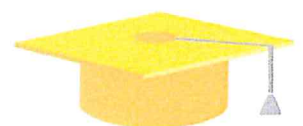
$$(x+4)^2 + (0+2)^2 = 40$$

$$(x+4)(x+4) + 4 = 40$$

$$x^2 + 4x + 4x + 16 + 4 - 40 = 0$$

$$x^2 + 8x - 20 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm 12}{2}$$



$$x_1 = 2 \quad x_2 = -10$$

מכיוון שאין הנתון הנקודה A נמצאת על החלק הימני של ציר X, טענוי הנקודה A הוא 2.

$$A(2, 0)$$

ד. נראה שטענוי הנקודה B מקויים את משוואת המעגל. נסבב לבק את שיעורי הנקודה B במשוואת המעגל.

נקבל:

$$(x+4)^2 + (y+2)^2 = 40$$

$$B(-6, 4)$$

$$(-6+4)^2 + (4+2)^2 \stackrel{?}{=} 40$$

$$40 = 40$$

קיבלנו מסק את זכין הנקודה B נמצאת על המעגל.

ה. מכיוון ש-AC הוא קוטר, איננו המעגל הוא נקודה

האמצע של הקוטר AC.

מרכז משוואת המעגל נקרא טענוי איננו המעגל

הוא $(-4, -2)$. נקודת אמצע המעגל הוא אמצע הקוטר AC.

נמצא את שיעורי הנקודה C באמצעות נוסחה אמצע קוטר.



$A(2, 0)$
 הנקודה $(-4, -2)$
 $C(x, y)$

נוקטא:
 $-4 = \frac{2 + X_c}{2}$

$-8 = 2 + X_c$

$X_c = -10$

$-2 = \frac{0 + Y_c}{2}$

$-4 = 0 + Y_c$

$Y_c = -4$

$C(-10, -4)$

3. AB מקביל ל-CD. יש טענות אלו, אינן
 טענות מקבילות הם נקודות אלו, אינן

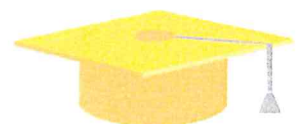
$m_{CD} = m_{AB}$

נמצא את הטיבון של AB בעזרת

הנקודות A ו-B

$A(2, 0)$
 $B(-6, 4)$

$m_{AB} = \frac{0 - 4}{2 - (-6)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$



משוואת הישר המקביל היא:
 $c(-10, -4) \quad m = -\frac{1}{2}$

$$y + 4 = -\frac{1}{2}(x + 10)$$

$$y + 4 = -\frac{1}{2}x - 5$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 9$$

ה. נמצא את שיעורי הנקודה D.
 D נמצאת על ציר x ולכן שיעור ה-y
 שלה הוא 0.

נציב $y=0$ במשוואת הישר D ונקבל:

$$y = -\frac{1}{2}x - 9$$

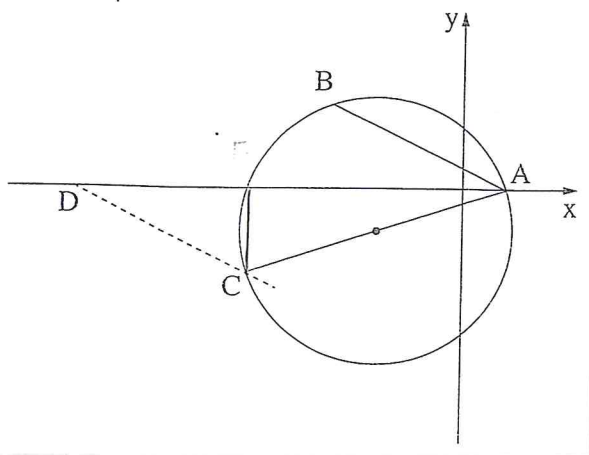
$$0 = -\frac{1}{2}x - 9$$

$$\frac{1}{2}x = -9$$

$$x = \frac{-9}{\frac{1}{2}} = -18$$

$$D(-18, 0)$$





כדי למצוא את שטח המשוש ACD
עלינו למצוא את אורך אחת הצלעות
הגובה המורכב מצלע זו.
נבחרו הצלע AD ומקווקו C
נוריד גובה לצלע זו.

אורך הצלע AD שווה

$$AD = X_A - X_B = 2 - (-18) = 2 + 18 = 20$$

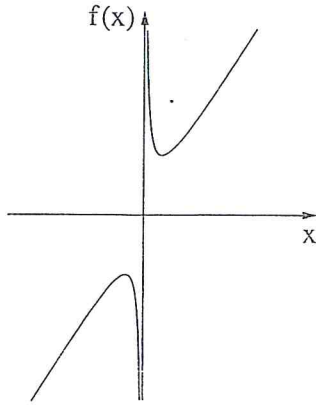
שיעורי הנקודה C הם $(-18, -4)$ חתך אוקטנט
הגובה שהוא האנך מנקודה C לציר ה- x הוא 4.

נקודות: $(2, 0)$ ו- $(-18, -4)$

$$S_{\Delta ACD} = \frac{20 \cdot 4}{2} = 40$$

תשובה: שטח המשוש 40 יחידות





4. לפניך גרף הפונקציה $f(x) = 4x + \frac{16}{x}$.
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
 - מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן בהסתמך על הגרף.
 - בנקודה שבה $x = 4$ העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.
 - מצא את שיפוע המשיק.
 - מצא את משוואת המשיק.
 - מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה.
 - מצא את שיעורי נקודת החיתוך של שני המשיקים.

א. האכנה לא יכול להיות 0, ולכן תחום ההגדרה הוא $x \neq 0$

ב. בנקודת הקיצון $y' = 0$.
המשוואה היא:

$$f(x) = 4x + \frac{16}{x}$$

$$f'(x) = 4 - \frac{16}{x^2}$$

$$4 - \frac{16}{x^2} = 0 \quad / \cdot x^2$$

$$4x^2 - 16 = 0$$

$$4x^2 = 16 \quad / : 4$$



$$x^2 = 4$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{4}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

כיוון שקיבלנו את שני הערכים של x הנקראים נקודות
את נקודות המינימום הנמוכות:

$$f(x) = 4x + \frac{16}{x}$$

$$x_1 = 2$$

$$f(2) = 4 \cdot 2 + \frac{16}{2} = 16$$

$$(2, 16)$$

$$x_2 = -2$$

$$f(-2) = 4(-2) + \frac{16}{-2} = -16$$

$$(-2, -16)$$

נקודת אגס הסימטריה של הנקודה
נקודת המינימום נמצאת בקוטר הנגדי, סבן סגור
ה- x וסגור ה- y חלוקים, ולכן הנקודה $(2, 16)$
היא נקודת מינימום.
נקודת המינימום נמצאת בקוטר הנגדי סבן
סגור ה- x וסגור ה- y חלוקים, ולכן הנקודה
 $(-2, -16)$ היא נקודת מינימום.



מטואלג המטיק היא:

$$m=3$$

$$(4, 20)$$

$$y-20=3(x-4)$$

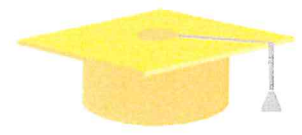
$$y-20=3x-12$$

$$y=3x+8$$

3. (1) המטיק בקולצת הקיצון מקיף לזכר ה-X
 וזמן מטואלג היא מהצורה
 לקולצת המקסימום טיקולנו בסוף ה היא
 וזמן מטואלג המטיק הוא $y=-16$

$$y=-16$$

(2) מטואלג המטיק בקולצת ה $x=4$ נני
 טיקולנו בסוף ה היא $y=3x+8$
 מטואלג המטיק בקולצת המקסימום היא
 $y=-16$
 לקולצת היחיתק טו טנו המטיקום תמקד





| | |
|-------------|---------|
| $(2, 16)$ | מ'נימ'ם |
| $(-2, -16)$ | מ'סימ'ם |

ג. (1) למצוא שינוע נצוק $x=4$ קטצרת טל הווקציה.

$$f'(x) = 4 - \frac{16}{x^2}$$

$$f'(x=4) = 4 - \frac{16}{4^2} = 3$$

$$m = 3$$

(2) נמצא את מקוצת ההטקה.

זע הנתון $x=4$.

למצוא שינוי ה- y נצוק $x=4$ הווקציה הנתונה ונקקה:

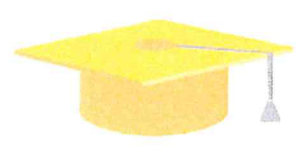
$$f(x) = 4x + \frac{16}{x}$$

$$f(4) = 4 \cdot 4 + \frac{16}{4} = 20$$

נקוצת ההטקה היא $(4, 20)$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



ק"י נתון מערכת שתי המשוואות:

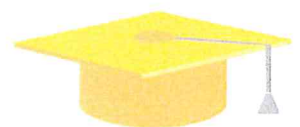
$$\begin{cases} y = 3x + 8 \\ y = -16 \end{cases}$$

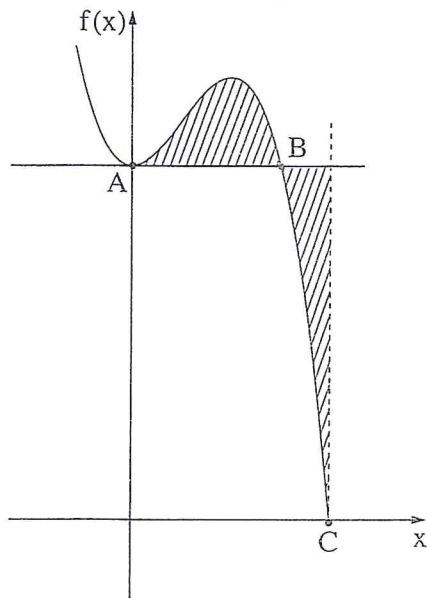
$$-16 = 3x + 8$$

$$-24 = 3x \quad /:3$$

$$x = -8$$

$$\boxed{(-8, -16)}$$





5. לפניך ציור של גרף הפונקציה $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 16$.

הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-y.

א. מצא את שיעורי הנקודה A.

ב. מצא את משוואת הישר העבירו ישר המקביל לציר ה-x.

ג. מצא את משוואת הישר.

ד. הישר חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה נוספת, B.

(שיעור ה-y של הנקודה B שווה לשיעור ה-y של הנקודה A).

ה. מצא את שיעורי הנקודה B.

ו. הנקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x היא $C(4, 0)$.

ז. העבירו ישר המאונך לציר ה-x (הישר המקווקו בציור).

ח. חשב את השטח המקווקו בציור:

השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הישר AB ועל ידי הישר המאונך לציר ה-x.

א. הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-y. לכן $x=0$.
נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-y היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y.

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 16$$

$$f(0) = -0^3 + 3 \cdot 0^2 + 16 = 16$$

$$A(0, 16)$$



ה. מטואג יטע האקטיוא צייג x היא אה צורה

מספר $y =$
קאט
טיאור

הקוצה A (כפי טקאלנו הסעיף

הוא 16 , אכן מטואג היטע היא $y = 16$.

$$y = 16$$

$$y(B) = y(A) = 16$$

כדי למצוא אג טיאווי ה- x טה הקוצה B

נציב $y = 16$ בהונקציה הנתונה.

ויקבל:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 16$$

$$16 = -x^3 + 3x^2 + 16$$

$$-x^3 + 3x^2 = 0$$

$$x^2(-x + 3) = 0$$



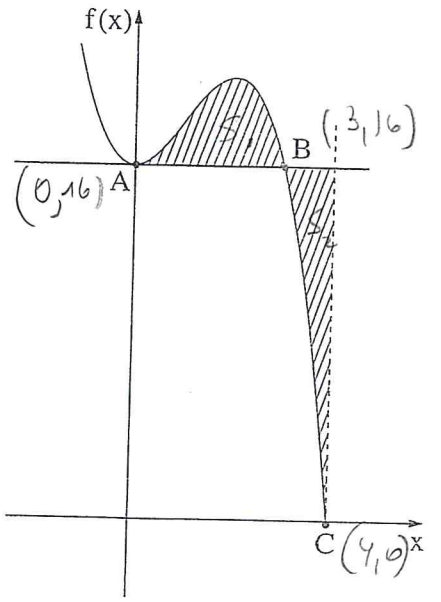
$$x^2 = 0$$

$$-x + 3 = 0$$

(נקודה A) $x = 0$

(נקודה B) $x = 3$





$$B(3, 16)$$

3. נתת אה הטח המקווקו
היחיון (מסומן ק - S_1)

חיטוב הטח

$$\int_0^3$$

אקוואה האינטגרל

הכנס הבוקר

$$(-x^3 + 3x^2 + 16) - (16) = -x^3 + 3x^2 + 16 - 16 = -x^3 + 3x^2$$

חיטוב הטח

$$S_1 = \int_0^3 (-x^3 + 3x^2) = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} \right]_0^3$$

$$\left(-\frac{3^4}{4} + \frac{3 \cdot 3^3}{3} \right) - (0) = 6.75$$

חיטוב טח

$$\int_3^4$$

אקוואה האינטגרל

$$(16) - (-x^3 + 3x^2 + 16) =$$

הכנס הבוקר



$$16 + X^3 - 3X^2 - 16 = X^3 - 3X^2$$

חיטוב הטסה

$$\int_3^4 (X^3 - 3X^2) dx = \left[\frac{X^4}{4} - \frac{3X^3}{3} \right]_3^4 =$$

$$\left(\frac{4^4}{4} - \frac{3 \cdot 4^3}{3} \right) - \left(\frac{3^4}{4} - \frac{3 \cdot 3^3}{3} \right) =$$

$$(0) - (-6.75) = 6.75$$

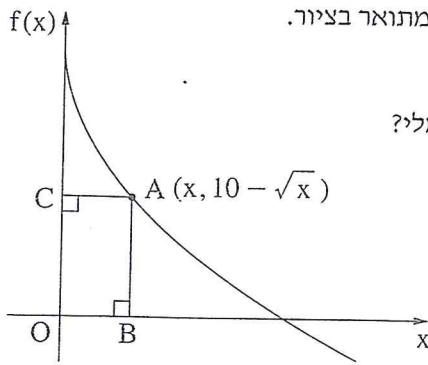
$$S_1 + S_2 = 6.75 + 6.75 = 13.5$$

הטסה הוא 13.5 יחידות

תשובה:



6. הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על גרף הפונקציה $f(x) = 10 - \sqrt{x}$, $(0 < x)$.
 מן הנקודה A מורידים אנכים לצירים, החותכים אותם בנקודות B ו-C, כמתואר בציור.
 O היא ראשית הצירים.



- א. מה הם שיעורי הנקודה A שבעבורה היקף המלבן ABOC הוא מינימלי?
 ב. מהו ההיקף המינימלי של המלבן ABOC?

א. נביא באמצעות x את היקף המלבן
 דפי שיעורי הנקודה A:

$$AC = x$$

$$AB = 10 - \sqrt{x}$$

היקף המלבן:

$$2x + 2(10 - \sqrt{x}) = 2x + 20 - 2\sqrt{x}$$

הפונקציה המגדלת את היקף המלבן היא:

$$f(x) = 2x + 20 - 2\sqrt{x}$$

נמצא את נקודת המינימום של הפונקציה.

$$f'(x) = 0$$



$$f'(x) = 2 - \frac{2}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{array}{l} 2\sqrt{x} \cdot 2 - \frac{2}{2\sqrt{x}} = 0 \quad / \cdot 2\sqrt{x} \\ 4\sqrt{x} - 2 = 0 \end{array}$$

$$4\sqrt{x} - 2 = 0$$

$$4\sqrt{x} = 2 \quad / : 4$$

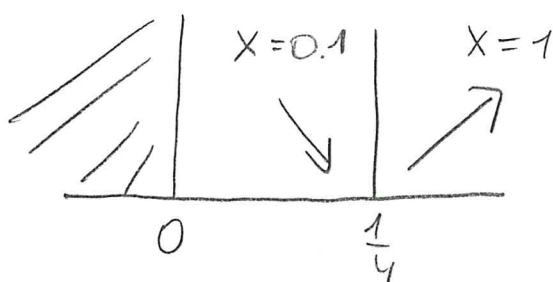
$$\sqrt{x} = \frac{2}{4}$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2} \quad / \cdot x^2$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x = \frac{1}{4}$$

נראה שהנקודה היא נקודת מינימום מקומי
טבלת עליה וינידה.



$$f'(x) = 2 - \frac{2}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(0.1) = 2 - \frac{2}{2\sqrt{0.1}} = -$$

$$f'(1) = 2 - \frac{2}{2\sqrt{1}} = +$$

נמצא את טיפוס ה- γ של נקודת המינימום.

טיפוס ה- γ של הנקודה A הוא $\gamma = 10 - \sqrt{x}$
(צ"ל $x = \frac{1}{4}$ ונקודה):

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 40 - \sqrt{\frac{1}{4}} = 9\frac{1}{2}$$

$$\boxed{A\left(\frac{1}{4}, 9\frac{1}{2}\right)}$$

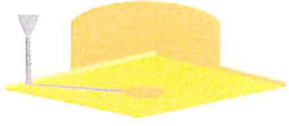
גטוה!

כדי למצוא את ההיקף המינימלי נציב $x = \frac{1}{4}$ בנוסחה המצאה את ההיקף
בנוסחה קבוצתית

$$f(x) = 2x + 20 - 2\sqrt{x}$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} + 20 - 2\sqrt{\frac{1}{4}}$$





י' לך לך אלהים
 אלהים אלהינו

תפילת אלהים →
 אלהים אלהינו

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 19\frac{1}{2}$$

התשובה: $19\frac{1}{2}$ ימים

תשובה: