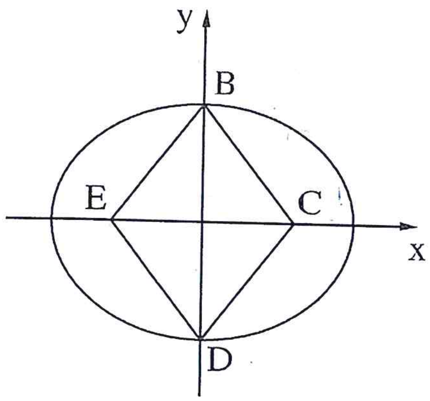
פתרון הבחינה
במתמטיקה

קיץ תשע"ז, 2017, שאלון: 35582 עפ"י תכנית הרפורמה ללמידה משמעותית.
שאלון שני מ- 5 יח"ל.
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"



1. נתון מעוין BCDE.

הקדקודים B ו־ D נמצאים על ציר ה־ y,

והקדקודים C ו־ E נמצאים על ציר ה־ x.

נתון: אורך צלע המעוין הוא 5,

אורך גובהו הוא 4.8,

ואורך האלכסון BD גדול מאורך האלכסון CE.

דרך הקדקודים B ו־ D עוברת אליפסה קנונית (ראה ציור), שמוקדיה הם הנקודות C ו־ E.

א. (1) מצא את השיעורים של קדקודי המעוין.

(2) מצא את משוואת האליפסה.

פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$ חותכת את האליפסה ברביע הראשון בנקודה M.

נתון: שיעור ה־ y של M הוא $\sqrt{15}$.

ב. הוכח שמוקד הפרבולה נמצא בנקודה C.

ג. דרך הנקודה E מעבירים ישר המקביל לציר ה־ y.

P היא נקודה על הפרבולה שמרחקה מהישר הזה הוא k.

מצא את היחס $\frac{PC}{k}$. הסבר.

א (1) נסתכל על שטח המעוין בשני אופנים: גובה אבסיס וחצי מכפלת האלכסונים, ונשווה ביניהם. נסמן $B(0,b)$, $D(0,-b)$

$C(c,0)$, $E(-c,0)$

$$\frac{2b \cdot 2c}{2} = 5 \cdot 4.8$$

$$(1)\quad b \cdot c = 12$$

עפ"י משפט פיתגורס ל $\triangle BOC$ והנתון כי $BC=5$

נקבל: $b^2+c^2=25 \quad (2)$

מכאן, שתי משוואות עם שני נעלמים:

$(1) \to (2) \quad \frac{144}{c^2}+c^2=25 \to \cancel{c^2=16}$ $(c<b)$ $\quad c^2=9 \to c=3$

$\Downarrow$

$b^2=16 \to b=4$

לסיכום:

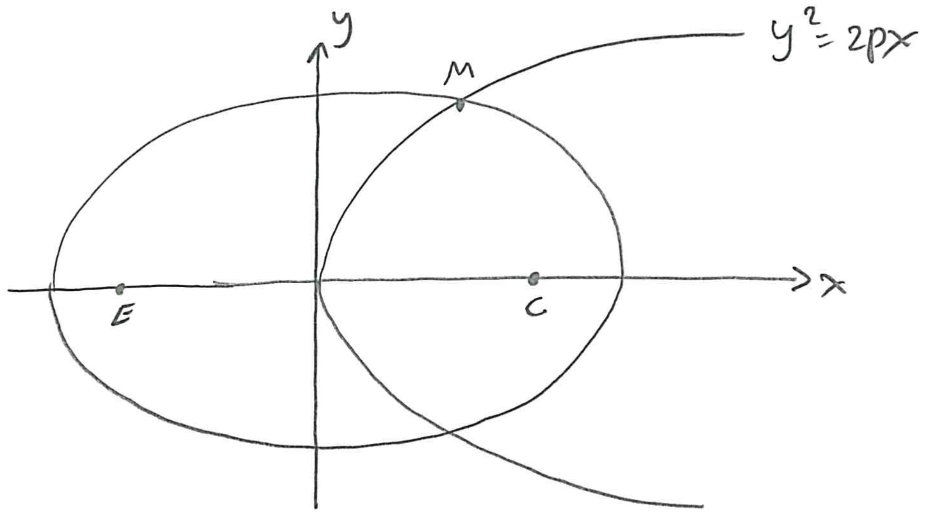
$$\boxed{\begin{array}{ll} B(0,4) & C(3,0) \\ D(0,-4) & E(-3,0) \end{array}}$$

(2) מכיוון שהנק' C היא מוקד האליפסה ומהגדרת האליפסה

מתקיים: $a^2=b^2+c^2=16+9=25$

הצבה במשוואת האליפסה:

$$\boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1}$$



ב.

נמצא את הנקודה M ע"י הצבה במשוואת האליפסה:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{15}{16}=1 \rightarrow x=\frac{5}{4} \rightarrow M\left(\frac{5}{4}, \sqrt{15}\right)$$

נציב נק' זו במשוואת הפרבולה ונקבל את פרמטר הפרבולה p:

$$15=2p\cdot\frac{5}{4} \rightarrow p=6$$

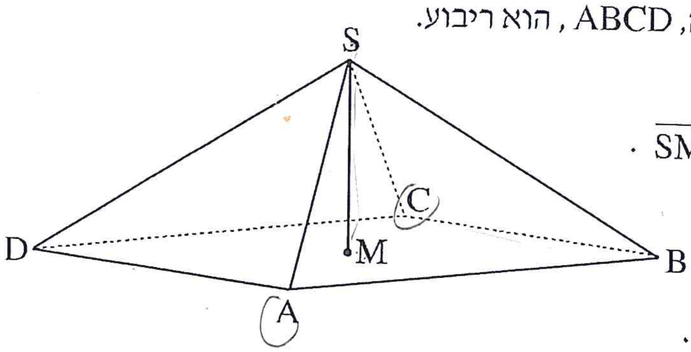
מוקד הפרבולה מק"מ: $F=\frac{p}{2}=\frac{6}{2}=3 \rightarrow (3,0)$

ונקודה זו היא הנק' C שמצאתי בסעיף א'.

ג. הנקודה $C(3,0)$ בקודקוד הפרבולה, לכן המדריך עובר בנק' $E(-3,0)$ מהגדרת הפרבולה, ישר דרך הנק' E המקביל לציר ה-y הוא המדריך של הפרבולה. ומהגדרת הפרבולה, מרחקה של כל נקודה שעליה מהמוקד, שווה למרחקה מהמדריך, לכן: $PC=K$

$$\boxed{\frac{PC}{k}=1.}$$

2. נתונה פירמידה ישרה $SABCD$, שבסיסה, $ABCD$, הוא ריבוע.



M היא נקודה כך ש־ $\vec{SM}=\frac{1}{2}\vec{SA}+\frac{1}{2}\vec{SC}$.

א. (1) הוכח: $\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{AC}$.

(2) הוכח ש־ $\vec{SM}$ מאונך ל־ $\vec{AC}$.

(3) נמק מדוע SM הוא גובה בפירמידה.

נתון: $A(\sqrt{3},1,0)$, $C(-\sqrt{3},-1,0)$, הנקודות B ו־ D נמצאות במישור $z=0$

ונפח הפירמידה $SABCD$ הוא 16.

ב. (1) מצא את שיעורי הנקודה M.

(2) מצא את שיעורי הקדקוד S (מצא את שתי האפשרויות).

נסמן את הנקודות שמצאת בתת־סעיף ב(2) ב־ S_1 ו־ S_2 .

ג. (1) מצא את משוואת המישור AS_1S_2 .

(2) האם נקודה C נמצאת על המישור AS_1S_2 ? נמק.

(1) א

$$\vec{AM}=\vec{AS}+\vec{SM}=-\vec{SA}+\frac{1}{2}\vec{SA}+\frac{1}{2}\vec{SC}=\frac{1}{2}(\vec{SC}-\vec{SA})=$$

$$=\frac{1}{2}\vec{AC}$$

(2) הפירמידה נתונה פירמידה ישרה ולכן $SA=SC$

בסעיף (1) הוכחנו כי $\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{AC}$ לכן M אמצע AC

כך ש- $\triangle SAC$ שוק SM הוא תיכון לבסיס

ותיכון הוא גובה לבסיס ב- $\triangle$ שוק ולכן $\vec{SM}\perp\vec{AC}$

(3) בסעיף (1) הראנו כי M אמצע תיכון AC בבסיס הפירמידה הישרה, לכן M מרכז המעגל החוסם את הבסיס ABCD.

בפירמידה ישרה, ישר מהקודקוד למרכז המעגל החוסם את הבסיס הוא הגובה בפירמידה. כנדרש.

ב (1) M-אמצע הקטע AC, לכן:

$$X_M = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2} = 0, \quad Y_M = \frac{1-1}{2} = 0 \quad Z_M = 0 \rightarrow \boxed{M(0,0,0)}$$

(2) נמצא תחילה את שטח הבסיס:

$$\vec{AC} = (2\sqrt{3}, 2, 0) \rightarrow |AC| = \sqrt{12+4} = 4$$

$$S_{ABCD} = \frac{|AC|^2}{2} = 8$$

$$V = \frac{SM \cdot S_{ABCD}}{3} = 16 \rightarrow SM = 6$$

בסיס הפירמידה במישור $z=0$ ו- SM ניצב למישור ואורכו 6 יחידות. הנקודה M היא הראשית ולכן

$$\boxed{S(0,0,6) \quad \text{או} \quad S(0,0,-6)}$$

ב (1) למציאת משוואת המישור, נמצא תחילה את הווקטור

(a,b,c) הניצב למישור ע"פ הווקטורים $\overrightarrow{MS_1}$

ו- $\overrightarrow{MA}$ השייכים למישור

M - אמצע הקטע S_1S_2 ולכן שייכת למישור:

$\overrightarrow{MS_1}=(0,0,6)$ $\overrightarrow{AM}=(\sqrt{3},1,0)$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 6 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a=-6 \\ -b=-6\sqrt{3} \\ c=0 \end{matrix} \rightarrow (1,-\sqrt{3},0)$$

$$x-\sqrt{3}y+d=0$$

ראשית הצירים M שייכת למישור, לכן $d=0$

$$\boxed{x-\sqrt{3}y=0}$$

3. א. מצא את המספרים המרוכבים z המקיימים $z^3=-1$.

נסמן את פתרונות המשוואה מסעיף א ב־ z_1 , z_2 ו־ z_3 .

נתון כי z_2 הוא ממשי.

ב. (1) הראה ש־ z_1 , z_2 ו־ z_3 הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית.

(2) z_1 , z_2 ו־ z_3 הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית z_n .

מצא את z_5 , האיבר החמישי בסדרה.

ג. (1) z_{13} , z_{14} ו־ z_{15} (האיברים ה־ 13 , ה־ 14 וה־ 15 בסדרה z_n שמצאת בסעיף ב)

מיוצגים על ידי הנקודות A , B ו־ C במישור גאוס, בהתאמה.

חשב את שטח המשולש ABC .

(2) K , L ו־ M הן שלוש נקודות במישור גאוס המייצגות שלושה איברים עוקבים

בסדרה z_n .

הסבר מדוע המשולש KLM חופף למשולש שאת שטחו מצאת בתת־סעיף ג(1).

א (1)

$z^3=-1$

$z^3=cis\,180^\circ$

$z_k=cis\,\frac{180^\circ+360^\circ k}{3}=cis(60+120^\circ k)$

$\boxed{\begin{aligned} z_1&=cis\,60^\circ \\ z_2&=cis\,180^\circ \\ z_3&=cis\,300^\circ \end{aligned}}$

ב (1) $q = \frac{z_3}{z_2} = \frac{z_2}{z_1} = cis\,120^\circ$

(2) $z_5 = z_1 q^4 = cis\,60^\circ \cdot (cis\,120^\circ)^4 =$

$= cis\,60^\circ \cdot cis\,480^\circ = cis\,60^\circ \cdot cis\,120^\circ =$

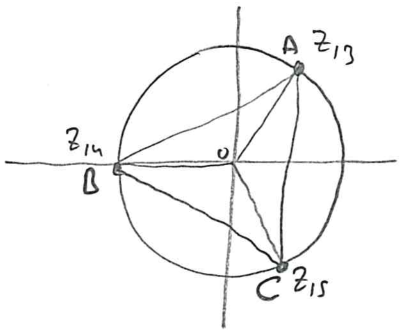
$= cis(60^\circ+120^\circ) = cis\,180^\circ = -1$

ג (1) נשים לב כי $q^3 = (cis\,120^\circ)^3 = cis\,360^\circ = 1$

$z_{13} = z_1 \cdot q^{12} = z_1 (q^3)^4 = z_1 \cdot 1 = z_1 = cis\,60^\circ$

$z_{14} = z_{13} \cdot q = cis\,60^\circ \cdot cis\,120^\circ = cis\,180^\circ$

$z_{14} = z_{13} \cdot q = cis\,180^\circ \cdot cis\,120^\circ = cis\,300^\circ = cis(-60^\circ)$



$S_\Delta = 3 \cdot S_{\Delta OAB} =$

$= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

(2) מכיוון ש $q^3=1$ (הראנו בסעיף ג-1), כל 3 איברים בסדרה באים לאותם האיברים הראשונים בה. ולכן הנקודות K,L,M באים לנקודות A,B,C ומכאן ה-Δים חופפים.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^{x^2} - 2x}{e^{x^2}}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

היעזר בתשובותיך על סעיף א וענה על סעיף ב.

ב. (1) הסבר מדוע הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x.

(2) מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, ומה סוגן? נמק את תשובתך.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(4) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
נמק את תשובתך.

(5) הוסף לסרטוט של גרף הפונקציה $f(x)$ סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

א (1) הפונקציה מוגדרת לכל x.

(2) תנאי הכרחי לנקודת קיצון פנימי: $f'(x)=0$

$$f(x)=\frac{e^{x^2}-2x}{e^{x^2}}=1-\frac{2x}{e^{x^2}}$$

$$f'(x)=-\frac{2e^{x^2}-(2x)^2e^{x^2}}{(e^{x^2})^2}=\frac{4x^2-2}{e^{x^2}}=0$$

$$4x^2-2=0 \rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

נמצא את סוג הקיצון ע"י מבחן הנגזרת השנייה לנקודות קיצון בלבד,
נגזור רק את המונה של $f'(x)$:

לנקודות קיצון בלבד $f''(x)=\frac{8x}{e^{x^2}}$

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)>0 \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0.142\right)\ min$$

$$f''\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)<0 \rightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{2}},1.858\right)\ max$$

(3) נמצא את תחומי העליה וירידה של הפונקציה ע"י הצבת נקודות הקיצון בטבלה הבאה:

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$f'(x)$	↗		↘		↗

תחומי עליה: $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ x>\frac{1}{\sqrt{2}}$

תחומי ירידה: $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$

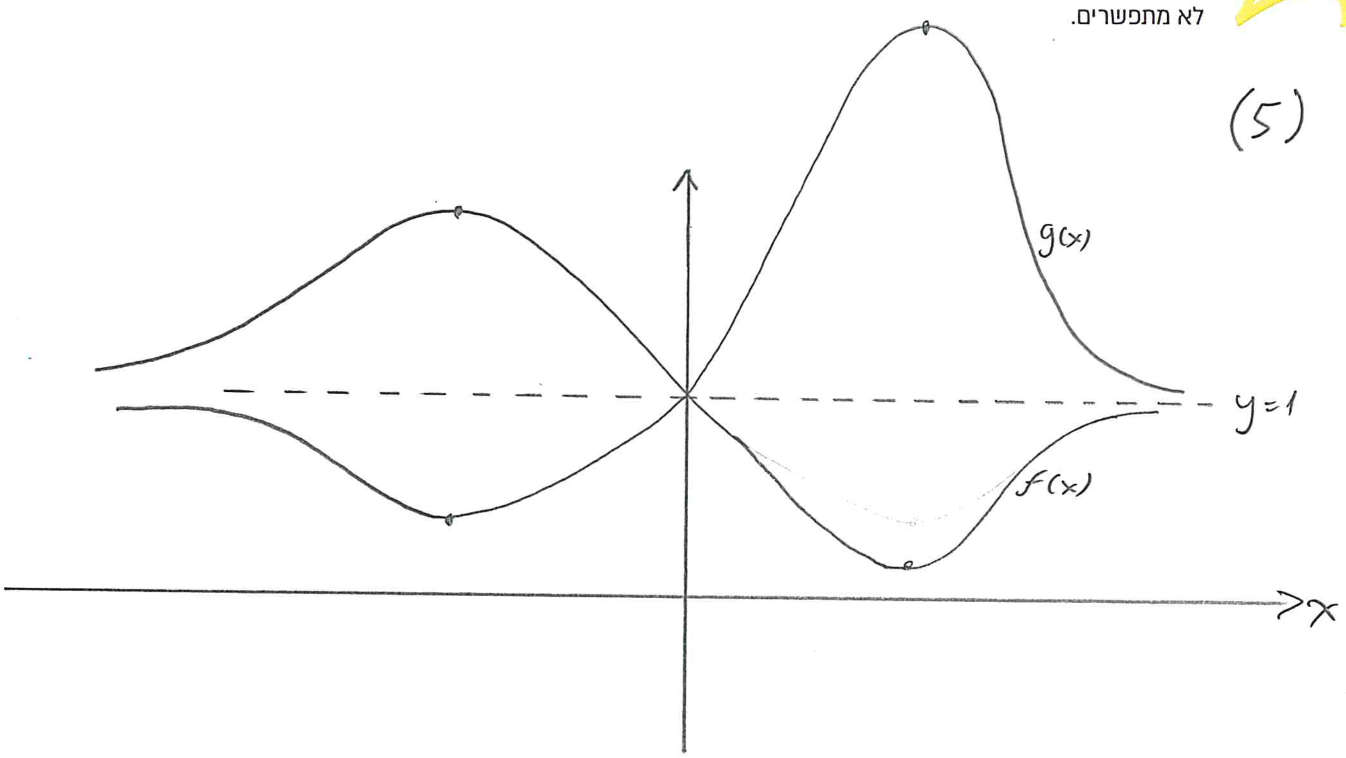
(4) הפונקציה מוגדרת לכל x, לכן אין לה אסימפטוטה אנכית
נמצא את האסימפטוטה האופקית:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2x}{e^{x^2}}\right)=1-0=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2x}{e^{x^2}}\right)=1+0=1$$

$$\boxed{y=1}$$

(5)



<u>ב</u> (1) מתקיים $f(x)\neq 0$ לכל x (ניתן לראות בשרטוט)

ולכן אין ערך של x המאפס את המכנה של $g(x)$ ומכאן מוגדרת לכל x.

(2) תנאי הכרחי לקיצון פנימי: $g'(x)=0$

$$g(x)=\frac{1}{f(x)} \rightarrow g'(x)=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}=0 \rightarrow f'(x)=0$$

מסעיף א-2: $x=\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$

כאשר לפונקציה $f(x)$ יש נקודת max לפונ' $g(x)=\frac{1}{f(x)}$

יש נקודת מינ' ולהיפך. לכן:

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 7.031\right)$ max

$\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0.538\right)$ min

3) נמצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה ע"י הצבת נקודות הקיצון בטבלה הבאה:

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$g'(x)$	↘		↗		↘

תחומי עליה $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

תחומי ירידה $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(4) $g(x)$ מוגדרת לכל x, לכן אין לה אסימפטוטה אנכית

נמצא את האסימפטוטה האופקית:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{1}{f(\infty)}=\frac{1}{1}=1$$

$$\boxed{y=1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{1}{f(-\infty)}=\frac{1}{1}=1$$

5. נתונה הפונקציה $h(x)=\frac{x+3}{x}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של $h(x)$.

ב. מצא את התחום שבו $h(x)>0$.

בתחום שבו $h(x)>0$ נתונה הפונקציה $f(x)$ המקיימת: $f'(x)=\frac{h'(x)}{h(x)}$.

נתון שגרף הפונקציה $f(x)$ עובר דרך הנקודה $(3\,,\ln2)$,

וידוע שלפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית אחת.

ג. מצא את הפונקציה $f(x)$.

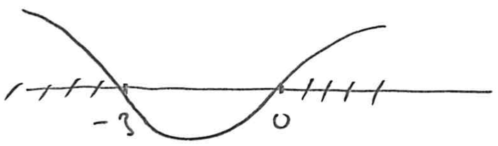
ד. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

א. לתחום ההגדרה נדרוש $\boxed{x\neq 0}$

ב. $\frac{x+3}{x}>0$



$\rightarrow$ $\boxed{x<-3\ ,\ x>0}$

ג. $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{h'(x)}{h(x)}\,dx=\ln(h(x))+C.$

נמצא את קבוע האינטגרל C ע״י הצבת הנקודה $(3, \ln2)$

$$\ln(h(3)) + c = \ln 2$$

$$\ln 2 + c = \ln 2 \rightarrow c = 0$$

$$\boxed{f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x}\right)}$$

ד. למצוא אסימפטוטות אנכיות:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\ln \frac{x+3}{x}\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to -3^-} \left(\ln \frac{x+3}{x}\right) = -\infty$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = 0 \\ x = -3 \end{matrix}}$$

למצוא אסימפטוטות אופקיות

$$\lim_{x \to \infty} \left(\ln \frac{x+3}{x}\right) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\ln \frac{x+3}{x}\right) = \ln 1 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{y = 0}$$

ה. לתחומי עליה-ירידה, נבדוק את נגזרת הפונקציה:

$$f'(x) = \frac{\frac{1 \cdot x - (x+3) \cdot 1}{x^2}}{\frac{x+3}{x}} = \frac{-3}{x^2} \cdot \frac{x}{x+3} = \frac{-3}{x(x+3)}$$

לפונקציה אין נקודות קיצון $f'(x) \neq 0$.

נבדוק את סימן הנגזרת בתחומי ההגדרה:

$x<-3$: $f'(-4)=\frac{-3}{(-4)(-1)}<0 \rightarrow$ יורדת

$x>0$: $f'(1)=\frac{-3}{1\cdot 4}<0 \rightarrow$ יורדת

הפונקציה יורדת לכל x בתחום ההגדרה:

תחום ירידה: $x<-3$, $x>0$
תחום עליה: אין