פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשע"ז, 2017, מועד ב, שאלון: 35582 עפ"י תכנית הרפורמה ללמידה משמעותית.

שאלון שני מ- 5 יח"ל.

מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

1. נתונה הנקודה $A(20\,,0)$.

B היא נקודה שנמצאת על ציר ה־ y ואינה ראשית הצירים.

דרך הנקודה B מעבירים ישר, ℓ_1 , המקביל לציר ה־ x .

דרך ראשית הצירים, O , מעבירים ישר, ℓ_2 , שמאונך לישר AB .

הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 נחתכים בנקודה C .

א. הוכח שהמקום הגאומטרי של הנקודות C הנבנות כמתואר נמצא על פרבולה, ומצא את משוואתה.

ב. D היא נקודה כלשהי הנמצאת על הפרבולה שאת משוואתה מצאת בסעיף א.

הנקודה F היא מוקד הפרבולה.

נתון הישר $x=k$. $k<0$ הוא פרמטר.

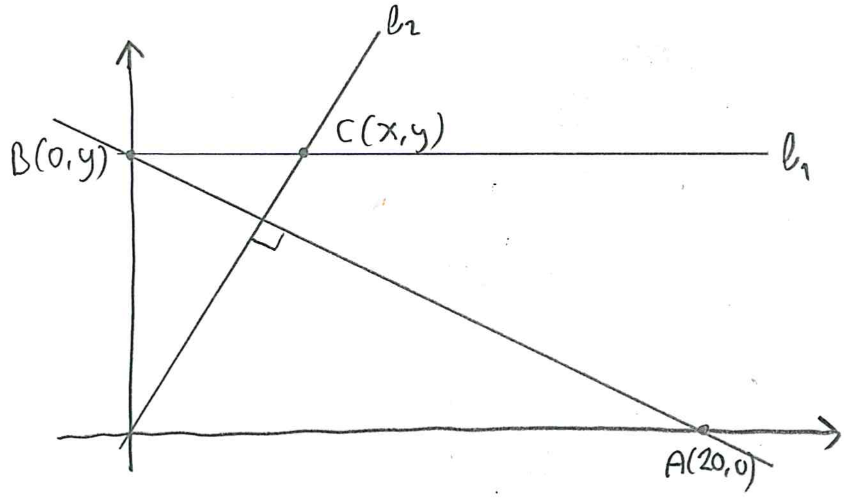
דרך הנקודה D העבירו ישר המקביל לציר ה־ x וחותך את הישר $x=k$ בנקודה N .

קיים ערך של k שעבורו כל משולש NDF שנבנה כמתואר הוא שווה שוקיים.

(1) מצא את הערך של k . נמק.

(2) נתון: הנקודה D נמצאת ברביע הראשון.

מצא את שיעורי הנקודה D שעבורה המשולש NDF הוא שווה צלעות.



א נסמן $C(x,y)$

מהנתון כי l_{AB} ו- l_2 ניצבים, מכפלת שיפועים שווה ל -1:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

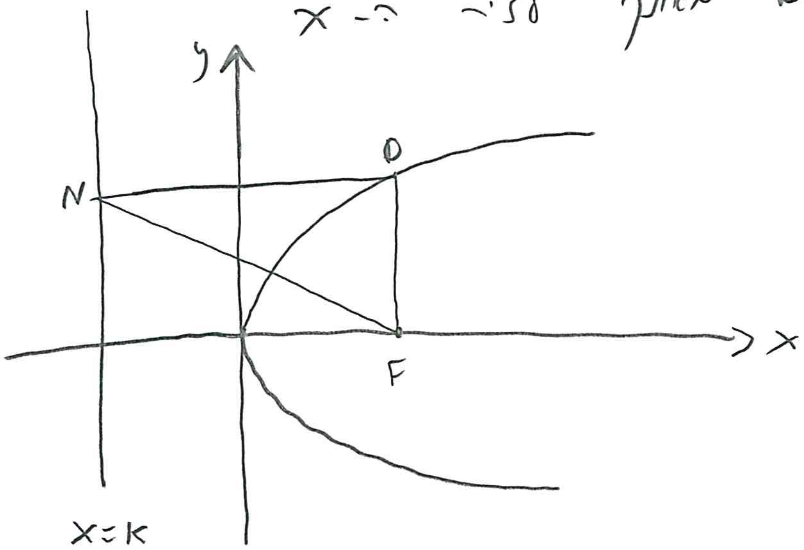
$$\frac{y-0}{0-20} \cdot \frac{y-0}{x-0} = -1 \rightarrow \boxed{y^2 = 20x}$$

ב (1) צ"ל: שני הצלעות היחידות שיכולות להיות שוות לכל בחירה של נקודה D הן הצלעות DN ו- DF.

נסביר מדוע אין זוג אחר של צלעות במשולש שיכולות להיות שוות לכל בחירה של נקודה D.

נסתכל על המקרה הפרטי בו $x_D = x_F$

במצב זה DF מאונך לציר ה- x



במקרה זה $\triangle NDF$ הינו ישר זווית

כך ש NF היתר במשולש זה

ולכן $NF \neq ND$, $NF \neq FD$

לכן NF לא יכול להיות שוק במשולש שווה שוקיים

ומכאן, האפשרות היחידה לקיום $\triangle$ שו"ש עבור כל בחירה

של D היא כאשר $ND = DF$

נמצא את הערך של k עבורו $DF = DN$:

מהגדרת הפרבולה, כל נקודה D שעליה מקיימת את התנאי:

שמרחקה מהמוקד שווה למרחקה מהמדריך

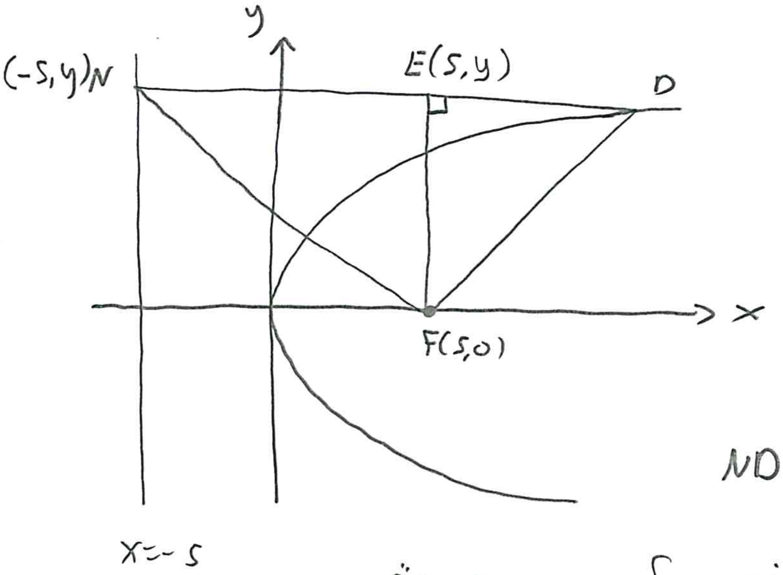
לכן $DF = DN$ כאשר $x = k$ הינו המדריך של הפרבולה

ולכן $k = -\frac{p}{2}$

לפי משוואת הפרבולה $y^2 = 20x$ $\Leftarrow$ $\boxed{k=-5}$

(2) למשולש שווה צלעות נדרוש בנוסף לשוויון $DF=DN$

כי $NF=DF$



במצב זה אנך FE לבסיס ND

הוא גם תיכון - תיכון הוא גובה לבסיס ב Δ שו"ש

$$EN=ED$$

$$X_E-X_N=X_D-X_E$$

$$5+5=X_D-5$$

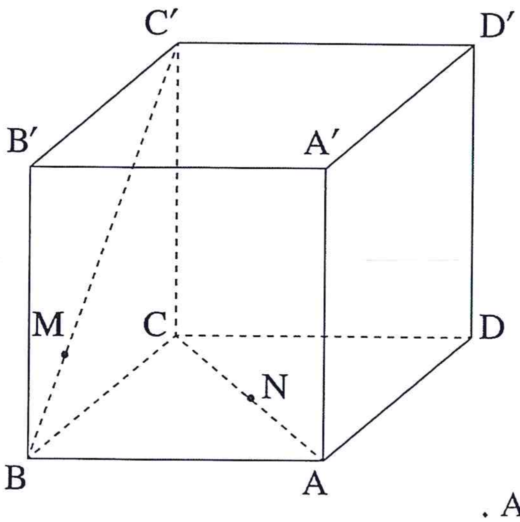
$$X_D=15.$$

הצבה במשוואת הפרבולה $y^2=20x$

$$y^2=20\cdot15 \Rightarrow y=\pm10\sqrt{3}$$

הנק' D נמצאת ברביע הראשון:

$$\boxed{D(15,\ 10\sqrt{3})}$$



2. נתונה קובייה $ABCDA'B'C'D'$.

נסמן: $\overrightarrow{CB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{CC'} = \underline{w}$.

נתון: $\overrightarrow{AN} = s\,\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BM} = t\,\overrightarrow{BC'}$.

א. מצא את היחס $\frac{s}{t}$ שעבורו MN מקביל למישור $AA'B'B$ $(t \neq 0)$.

נתון: $s = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{4}$.

ב. חשב את הזווית שבין MN ובין המישור ABCD .

ג. מהו המצב ההדדי של הישרים AB ו־ MN ? נמק.

<u>א</u> מהנתונים:

$$\overline{BM} = t(-\underline{u} + \underline{w})$$

$$\overline{AN} = s(-\underline{u} - \underline{v})$$

$$\overline{MN} = \overline{MB} + \underline{v} + \overline{AN} = t\underline{u} - t\underline{w} + \underline{v} - s\underline{u} - s\underline{v} =$$

$$\overline{MN} = (t-s)\underline{u} + (1-s)\underline{v} - t\underline{w}$$

כדי שהוקטור $\overline{MN}$ יהיה מקביל למישור $AA'B'B$

נצטרך לאפס את המקדם של וקטור $\underline{u}$

וכן $\overline{MN}$ יהיה קומבינציה לינארית של $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ בלבד:

$$t - s = 0 \rightarrow t = s \rightarrow \boxed{\frac{s}{t} = 1}$$

ב. נציב את הקוביה במע' צירים כך שהקודקוד C נמצא בראשית והמקצועות CB CD ו- 'CC מתלכדות עם צירי השיעורים:

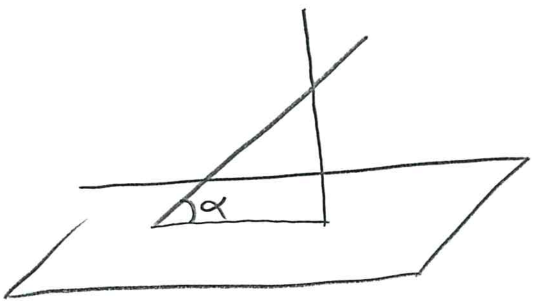
$\underline{u}=(a,0,0)$ $\underline{v}=(0,a,0)$ $\underline{w}=(0,0,a)$

ההצגה האלגברית לישר MN: (בעבור $s=\frac{1}{2}$, $t=\frac{1}{4}$)

$N\left(\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a,0\right)$

$MN: \left(\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a,0\right)+k^*\left(-\frac{1}{4}a,\frac{1}{2}a,-\frac{1}{4}a\right)$

$\left(\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a,0\right)+k(-1,2,-1)$



הזווית בין ישר ומישור α שווה לזווית שבין הישר להיטל הישר על המישור.

לפי משפט הניצבים הווקטור הניצב למישור הינו הווקטור $\underline{w}$ ולכן $(0,0,1)$ ניצב למישור:

$$\sin\alpha=\left|\frac{(0,0,1)\cdot(-1,2,-1)}{|0,0,1|\,|-1,2,-1|}\right|=\frac{1}{\sqrt{6}} \rightarrow \boxed{\alpha=24.09^\circ}$$

ב. נמצא את ההצגה האלגברית של משוואת הישר AB:

$$AB: \quad (a,0,0)+p(0,1,0)$$

ונמצא את נקודת החיתוך בין הישר AB לישר MN
עפ"י פתרון מע' המשוואות שלהם:

$$\begin{cases} a=\frac{1}{2}a-k \\ p=\frac{1}{2}a+2k \\ 0=-k \quad \rightarrow k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2}a \quad \rightarrow \quad \cancel{a=0} \\ p=\frac{1}{2}a \end{cases}$$

לכן מע' המשוואות אינה פתירה ווקטורי הכיוון $(0,1,0)$ $(-1,2,-1)$
בלתי תלויים, $\boxed{\text{לכן הישרים מצטלבים}}$

3. במעגל שמרכזו בראשית הצירים במישור גאוס חסום משולש שווה צלעות ABC .

הקדקוד A מתאים למספר המרוכב $z_1 = a - \sqrt{3} \cdot a \cdot i$ ($a > 0$ הוא פרמטר ממשי).

נתון: הקדקוד B נמצא ברביע הראשון.

א. הבע באמצעות a את המספרים המרוכבים z_2 ו־ z_3 המתאימים לקדקודים B ו־ C בהתאמה.

נתון: $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$.

ב. מצא את a .

ג. המספר z_1^{6n+5} מתאים לנקודה P במישור גאוס. n הוא מספר שלם.

הנקודה O היא ראשית הצירים. הראה שהנקודה B נמצאת על הקרן OP .

5

$A \rightarrow \quad z_1 = a - \sqrt{3}ai \quad , \quad a > 0$

מצא a

$B \rightarrow$ ברביע ה-$\underline{I}$

$\triangle ABC$ ש"צ (שווה צלעות)

א

$$z_1 = a - \sqrt{3}ai$$

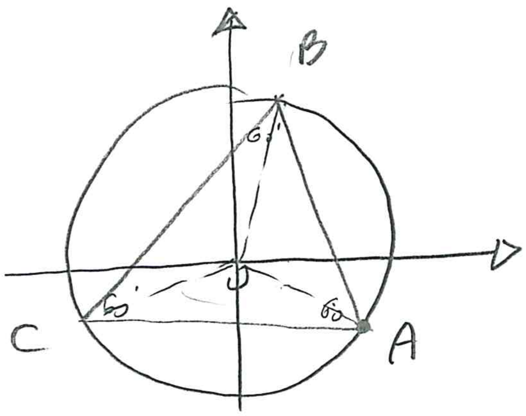
$$r = \sqrt{a^2 + (\sqrt{3}a)^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$$

$$\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}a}{a} = -\sqrt{3}$$

$$\theta = -60 + 180^\circ k$$

$\theta = 300^\circ$ (A ברביע ה-$\underline{IV}$)

$\underline{\underline{A}}$ $\boxed{z_1 = 2a\,cis\,300^\circ}$



$\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C = 60^\circ$

$\Downarrow$

$\measuredangle COA = \measuredangle AOB = \measuredangle BOC = 120^\circ$

$r_A = r_B = r_C = 2a$

$$\Theta_C = -60^\circ - 120^\circ = -180^\circ = 180^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$C: \boxed{z_3 = 2a\,cis\,180^\circ} \rightarrow z_3 = -2a$$

$$\Theta_B = 180 - 120 = 60^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$B: \boxed{z_2 = 2a\,cis\,60^\circ} \rightarrow z_2 = a + \sqrt{3}a$$

$$z_3 = \frac{z_1^3}{4}$$ נתון:

ב

$$z_1^3 = (2a\,cis\,300^\circ)^3 = 8a^3\,cis(900^\circ) =$$

$$= 8a^3\,cis(900^\circ - 2\cdot360^\circ) = 8a^3\,cis\,180^\circ$$

$$2a\,cis\,180^\circ = \frac{8a^3\,cis\,180^\circ}{4} \quad / : cis\,180^\circ$$

$$2a = 2a^3 \quad / : 2$$

$$a - a^3 = 0$$

$a(1-a^2)=0$

$a\neq 0$ $\quad$ $1-a^2=0$

$a>0$ $\quad$ $a^2=1$

$\boxed{a=1}$ $\quad$ $a\neq -1$

$a>0$

ב) $P:\ z_1^{6n+5}$ $\quad$ משלם

$$(2cis300)^{6n+5}=2^{6n+5}\cdot(cis300)^{6n}\cdot(cis300)^5=$$

$$=2^{6n+5}\cdot(cis1800^\circ)^n\cdot cis(1500^\circ)=$$

$$=2^{6n+5}\cdot(cis\,360^\circ\cdot5)^n\cdot cis(360^\circ\cdot4+60^\circ)$$

$$=2^{6n+5}\cdot1^n\cdot cis60^\circ$$

$$=2^{6n+5}cis60^\circ$$

$B:\ z_2=2cis60^\circ \Rightarrow$ B נמצאת על קרן OP

4. נתונה הפונקציה $g(x)=2x^2+c$. c הוא פרמטר.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת כך: $f(x)=e^{g(x)}$.

הגרפים של פונקציות הנגזרת, $f'(x)$ ו־ $g'(x)$, נחתכים בנקודה ששיעור ה־ x שלה הוא 2 .

א. מצא את c .

ב. (1) הוכח ש־ $f'(x)$ היא פונקציה אי־זוגית.

(2) מצא את שיעורי כל הנקודות שבהן הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו־ $g'(x)$ חותכים זה את זה.

(3) עבור אילו ערכי x $f'(x)>g'(x)$?

(4) סרטט סקיצה של הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו־$g'(x)$ באותה מערכת צירים.

ג. נתון: $M(2,8)$, $N(-2,-8)$.

MN הוא אלכסון של מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים.

הראה שגרף הפונקציה $f'(x)$ מחלק את המלבן לשני חלקים שווים בשטחם.

4

$g(x) = 2x^2 + c$

$f(x) = e^{g(x)}$

נתון: $f'(2) = g'(2)$

א

$g'(x) = 4x$

$f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

$g'(2) = 4 \cdot 2 = 8$

$f'(2) = g'(2) \cdot e^{g(2)}$

$g(2) = 2 \cdot 2^2 + c = 8 + c$

$f'(2) = 8 \cdot e^{8+c}$

נשווה את הנגזרות:

$8 \cdot e^{8+c} = 8$

$e^{8+c} = 1$

$8 + c = 0$

$\boxed{c = -8}$

$f(x)=e^{2x^2-8}$ $\quad g(x)=2x^2-8$ ב

(1) צ"ל

$f'(x)$ אי זוגית

$$f'(x)=4x e^{2x^2-8}$$

$$f'(-x)=4\cdot(-x)\cdot e^{2(-x)^2-8}=-4x e^{2x^2-8}$$

$$f'(-x)=-f'(x)$$

$$\Downarrow$$

$f(x)$ אי זוגית

(2) נק' חיתוך בין $f'(x)$ ל $g'(x)$:

$f'(x)=4xe^{2x^2-8}$ $\quad g'(x)=4x$

$$4x=4xe^{2x^2-8}$$

$$4x\left(1-e^{2x^2-8}\right)=0$$

$x=0$ $\quad$ $1-e^{2x^2-8}=0$

$$e^{2x^2-8}=1$$

$$2x^2-8=0$$

$$x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

$g'(0) = 4 \cdot 0 = 0 \qquad (0,0)$

$g'(2) = 4 \cdot 2 = 8 \qquad (2,8)$

$g'(-2) = 4(-2) = -8 \qquad (-2,-8)$

(3) $\quad f'(x) > g'(x)$?

$$f'(x) - g'(x) > 0$$

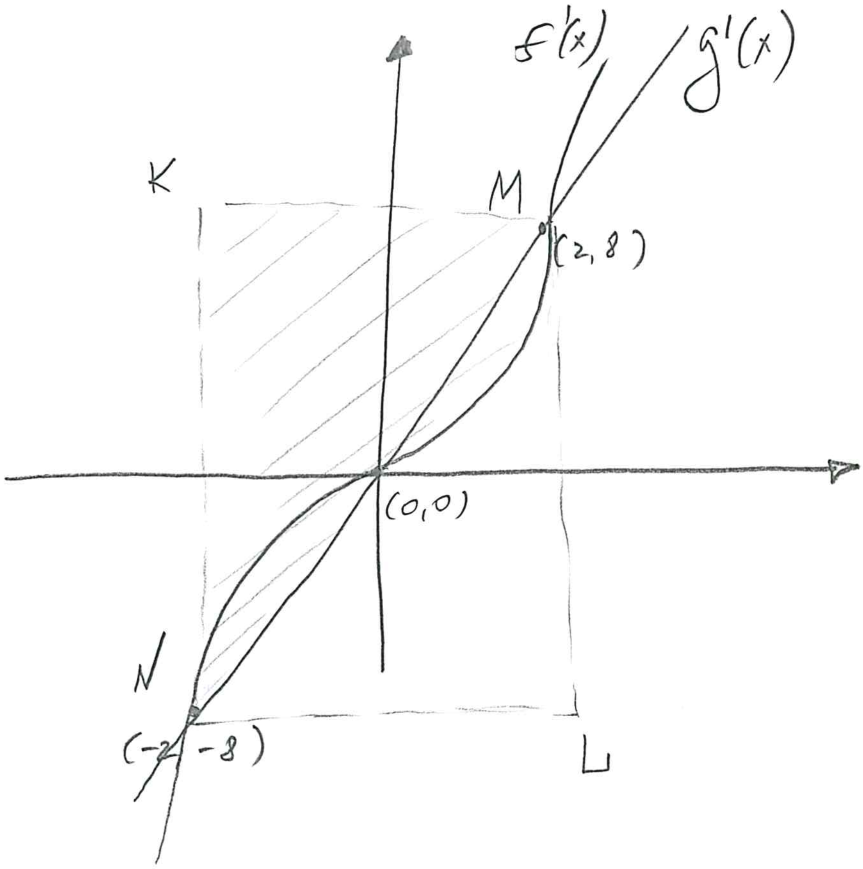
$$4xe^{2x^2-8} - 4x > 0$$

$$4x\left(e^{2x^2-8} - 1\right) > 0$$

	$x<$	-2	$<x<$	0	$<x<$	2	$<x$
x	-3		-1		1		3
$f'-g'$	$-$		$+$		$-$		$+$

$\boxed{-2<x<0 \quad \text{או} \quad x>2}$

(4)



ⓒ $M(2,8)$ $N(-2,8)$

מלבן $MKNL$ $KM \parallel X$ $KN \parallel Y$ $NL \parallel X$ $ML \parallel Y$

$y=8$ $x=-2$ $y=-8$ $x=2$

$$S_1 = S_{MKN}$$

$$S_1 = \int_{-2}^{2} (8 - f'(x))\,dx = 8x - f(x) \Big|_{-2}^{2} =$$

$$= {}^{2}(8\cdot 2 - f(2)) - {}^{-2}(8\cdot(-2) - f(-2)) =$$

$$= 16 - e^{2\cdot 2^2 - 8} + 16 + e^{2\cdot(-2)^2 - 8} = 32$$ יח"ר

$$S_{\text{מלבן}} = (2-(-2))(8-(-8)) = \underset{\text{יח"ר}}{64}$$

$$\Downarrow$$

$$S_2 = S_{NML} = S_{\text{מלבן}} - S_1 = 64 - 32$$

$$S_2 = \underset{\text{יח"ר}}{32}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{S_1 = S_2}$$

5. נתונה הפונקציה $f(x) = x + m \cdot \ell n\left(\frac{1}{x}\right)$. m הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון.

ב. (1) מצא את תחום הערכים של m .

(2) הבע את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ באמצעות m , וקבע את סוגה.

ג. הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ושיעוריה אינם תלויים ב־m .

(1) מצא את שיעורי הנקודה P .

(2) מצא את הערך של m שעבורו הנקודה P היא נקודת מינימום של הפונקציה $f(x)$.

הצב את m שמצאת בתת־סעיף ג(2) וענה על הסעיפים ד-ה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{f(x) - x}{x}$. חשב את $\int_1^e g(x)dx$.

5 $f(x)=x+m\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

א **תחום הגדרה**

$\frac{1}{x}>0$

$\boxed{x>0}$

ב (1) נתון: ל-$f(x)$ יש נק' קיצון

$f'(x)=1+m\cdot\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=1-\frac{m}{x}$

$1-\frac{m}{x}=0 \quad /\cdot x>0$

$x-m=0$

$x=m$ כדי שלמשוואה יהיה פתרון, m צריך להיות בתחום ההגדרה

$x>0$ ולכן $\boxed{m>0}$.

(2)

$$f(m) = m + m \cdot \ln \frac{1}{m} = m + m \cdot \ln m^{-1}$$

$$f(m) = m - m \ln m = m(1 - \ln m)$$

$$f''(x) = \frac{m}{x^2}$$

$$f''(m) = \frac{m}{m^2} = \frac{1}{m} > 0$$

$\Downarrow$

$\boxed{(m, m(1-\ln m)) \quad \text{מינימום}}$

ד)

אם שייכת P

אינה תלויה ב m

$$m \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

אז

$m \neq 0$ $\quad \ln \frac{1}{x} = 0$

$$\frac{1}{x} = e^0$$

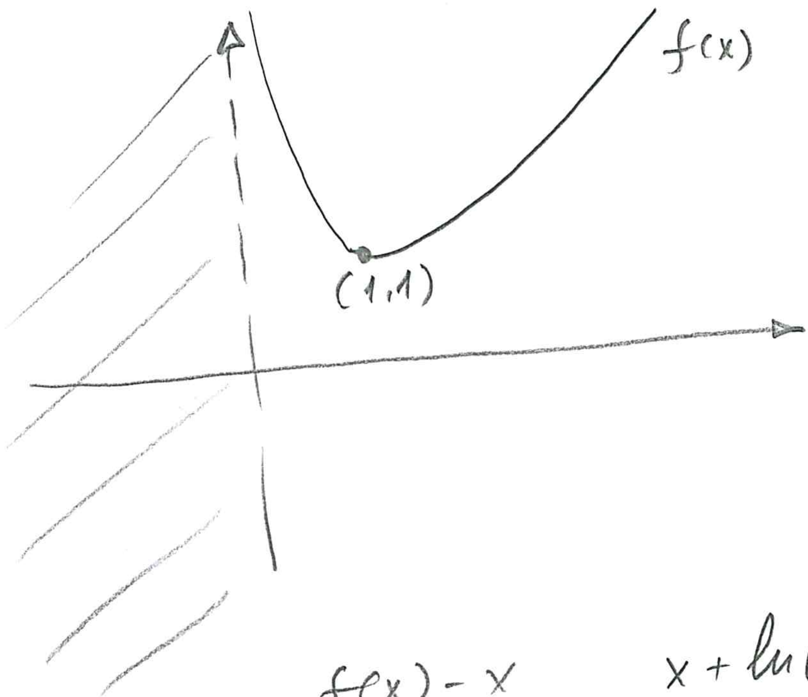
$x = 1$ $\quad f(1) = 1 + 0 = 1$ $\quad \boxed{P(1,1)}$

(ב) $P(1,1)$ מינימום

לפי סעיף ב (2)
נק' מינימום היא
$(m, m(1-\ln m))$.
כדי שנק' P תהיה נק' מינימום
צריך להתקיים $m=1$.

$\boxed{m=1}$

(3) $f(x) = x + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$



(ה) $g(x) = \frac{f(x)-x}{x} = \frac{x+\ln\left(\frac{1}{x}\right)-x}{x} = -\frac{\ln x}{x}$

$$\int_1^e g(x)\,dx = \int_1^e \left(-\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

שיטת ההצבה

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}\,dx$

$dx = x\,du$

$$\int_1^e \left(-\frac{\ln x}{x}\right) dx = \int_1^e -\frac{u}{x} \cdot x\,du =$$

$$= \int_1^e -u\,du = -\frac{u^2}{2} = -\frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_1^e =$$

$$= {}^{e}\left(-\frac{\ln^2 e}{2}\right) - {}^{1}\left(-\frac{\ln^2 1}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + 0 = \boxed{-\frac{1}{2}}$$