

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשע"ז, 2017, שאלונים: 313, 35803
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



אלגברה

1. בחנות אופניים נמכרים שני סוגי אופניים: אופניים רגילים ואופני שטח. מחירם של אופני השטח גבוה ב- 300 שקלים ממחירם של האופניים הרגילים. בעקבות שינויים במחירים, התייקרו אופני השטח ב- 12%, ואילו האופניים הרגילים הוזלו ב- 18%. הסכום שנוסף למחירם של אופני השטח (בשקלים) שווה לסכום שהופחת מן המחיר של האופניים הרגילים (בשקלים).
- א. מצא את מחיר האופניים הרגילים לפני ההוזלה.
- ב. לאחר השינויים במחירים, בכמה שקלים אופני השטח יקרים יותר מן האופניים הרגילים?

1. א. קנייה נגזרת

x - מחיר אופניים רגילים

$x+300$ - מחיר אופני שטח

נניח באמצעות x את ההתייחסות ואלה ההוצאות:

ההתייחסות של אופני השטח היא 12% מהמחיר $x+300$, כלומר

$$\frac{12}{100} \cdot (x+300) = 0.12 \cdot (x+300)$$

ההוצאה של האופניים הרגילים היא 18% מהמחיר x , כלומר

$$\frac{18}{100} \cdot x = 0.18x$$

המטולה: ההוצאה שלהם התייחסות זהה

המטולה היא:



$$0.12(x+300) = 0.18x$$

$$0.12x + 36 = 0.18x$$

$$36 = 0.18x - 0.12x$$

$$36 = 0.06x$$

$$x = \frac{36}{0.06}$$

$$x = 600$$

לחיד האלקטרוני היקלויים לפני ההוצאה הוא 600 שקלים

ב. לחיד האלקטרוני היקלויים לפני הטינוי הוא 600 שקלים
 לחיד אלקטרוני השטח לפני הטינוי הוא $x+300$.
 נציב $x=600$ ונקבל $600+300=900$ שקלים.
 נמצא את סכום ההוצאה של האלקטרוני היקלויים.
 סכום ההוצאה עדיין סקלר יד הוא $0.18x$.
 נציב $x=600$ ונקבל 0.18×600 , כלומר 108 שקלים.
 עדיין ניתן סכום ההוצאה של האלקטרוני היקלויים שולח
 לסכום ההתקנות של אלקטרוני הכושר, ולכן סכום
 ההתקנות הוא 108 שקלים.



המחירים אלו ה"ס:

מחיר אלפי הטסה אלו ה"ס:

$$900 + 108 = 1008$$

מחיר האלפים הקטן אלו ה"ס:

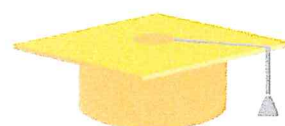
$$600 - 108 = 492$$

ההפרש בין המחירים הוא:

$$1008 - 492 = 516$$

516 סף'ר

תשובה:

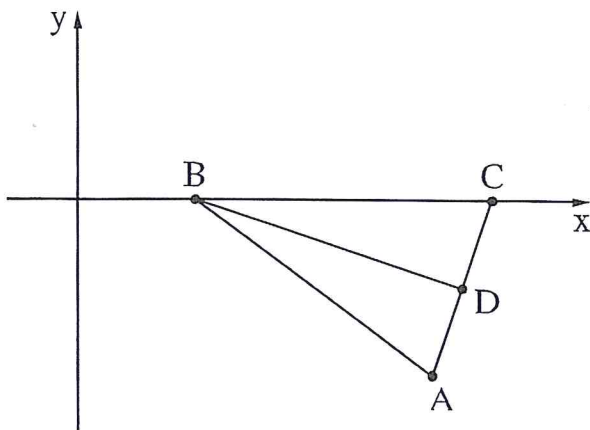


2. במשולש ABC, הצלע BC מונחת על ציר ה- x , כמתואר בציור.

נתון: $BC = 10$,

הקדקוד A נמצא בנקודה $(12, -6)$,

משוואת הצלע AB היא $y = -\frac{3}{4}x + 3$.



א. (1) מצא את שיעורי הקדקוד B.

(2) מצא את שיעורי הקדקוד C.

BD הוא תיכון במשולש ABC.

ב. מצא את משוואת BD.

ג. הראה ש- BD מאונך ל- AC .

ד. מצא את שטח המשולש ABC.

ה. פי כמה גדול שטח המשולש ABC משטח המשולש BCD? נמק.

א. (1) B היא נקודה שנמצאת על ציר ה- x ולכן שיעור ה- y שלה הוא 0.

$$B(\quad, 0)$$

$$y = 0$$

נציב $y = 0$ במשוואת ה- AB ונקבל את שיעור ה- x שלה.

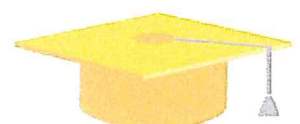
$$y = -\frac{3}{4}x + 3$$

$$0 = -\frac{3}{4}x + 3$$

$$\frac{3}{4}x = 3 \quad / : \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$$

$$B(4, 0)$$





(2) האליקט של BC זה הי הנחשן מולו 10-10
ולכן מיעור ה X של הנקודה C הוא

$$X_{(B)} + 10 = 4 + 10 = 14$$

הנקודה C נמצאת על ציר X ולכן מיעור ה Y-
של הוא 0.

$$C(14, 0)$$

ג. נ D הוא היטון לבצח AC ולכן הנקודה D
הוא נקודה הממצה של הבצח AC.

מצוי בנוסחת אמצע הנקודה:

$$A(12, -6)$$

$$C(14, 0)$$

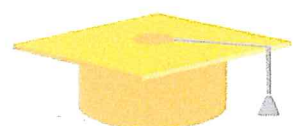
$$X_D = \frac{12 + 14}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

$$Y_D = \frac{-6 + 0}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$D(13, -3)$$

נמצא את משוואת BD בעזרת הנקודה B-D-1
שמצאנו.

$$D(13, -3) \quad B(4, 0)$$



$$m_{BD} = \frac{0 - (-3)}{4 - 13} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$$

$$m = -\frac{1}{3} \quad (4, 0) \quad \text{נקתי בנקודה}$$

(3) בקוטר ממואל היטור :

$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 4)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

לפי כתיבת המאל מייטרים מאונכים זה לזה נראה
 שמנקודת ממואליה מולה $(-1, -1)$ אל נראה
 שהיטור מ האמצ הוא היטור אנכי היטור מ
 היטור האחר.

$$C(14, 0) \quad m_{AC} = \frac{0 - (-6)}{14 - 12} = \frac{6}{2} = 3$$

$$A(12, -6)$$

$$m_{BD} = -\frac{1}{3} \quad \text{מכאן מסתקק קוטר}$$

$$m_{AC} \cdot m_{BD} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$

אל עזר היטור אנכי

$$3 = \frac{3}{1} \xrightarrow{\text{היטור}} \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{נגדי}} -\frac{1}{3}$$



$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot h}{2} \quad 3.$$

כאשר h הוא הגובה BC ו- BC

$$BC = 10$$

$$h = 6 \quad \left(\begin{array}{l} \text{המרחק של הנקודה } A \\ \text{מ-} BC \end{array} \right)$$

$$S_{\Delta} = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30$$

(הצורה יש ציור נוסף)

$$\boxed{30 \text{ יחידות}}$$

$$S_{\Delta BCD} = \frac{BC \cdot h}{2} \quad 4.$$

כאשר h הוא הגובה BC ו- BC

$$BC = 10$$

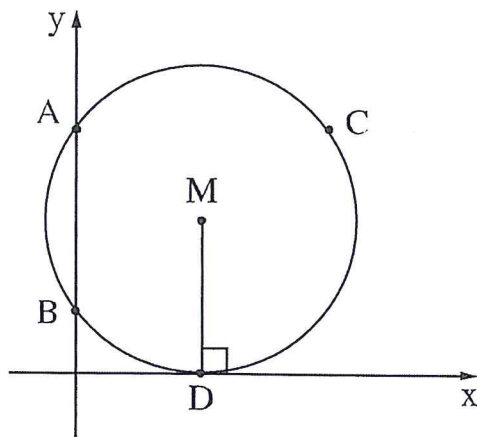
$$h = 3 \quad \left(\begin{array}{l} \text{המרחק של הנקודה } D \\ \text{מ-} BC \end{array} \right)$$

$$S_{\Delta} = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{30}{15} = 2$$

$$\boxed{2 \text{ היחס גדול פי 2}}$$





3. נתון מעגל שמרכזו בנקודה $M(4,5)$.

D היא נקודה משותפת למעגל ולציר ה- x

כך ש- MD מאונך לציר ה- x (ראה ציור).

א. (1) מצא את אורך MD , רדיוס המעגל.

(2) רשום את משוואת המעגל.

הנקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של המעגל

עם ציר ה- y , כמתואר בציור.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

BC הוא קוטר במעגל.

ג. מצא את שיעורי הנקודה C.

ד. מצא את היקף המשולש CMD.

3. א. (1) $d_{MD} = \sqrt{(4)^2} = 5$

משוואה: $\boxed{5 \text{ יחידות}}$

(2) מרכז המעגל $M(4,5)$, רדיוס המעגל $R = MD = 5$

לציג את הנמנים במשוואת המעגל והיקף:

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

$$\boxed{(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25}$$



ק. נתונים: A ו-B נמצאים בזווית ה- y
 וכן מידות ה- x שלהן הן 0.
 (זוהי המטלה הנדרשת: $x=0$)

$$(0-4)^2 + (y-5)^2 = 25$$

$$16 + (y-5)(y-5) = 25$$

$$16 + y^2 - 5y - 5y + 25 = 25$$

$$y^2 - 10y + 16 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 6}{2}$$

$y_1 = 8$ $y_2 = 2$
 ע"כ הן נקודות הנמצאות:

$$\boxed{B(0, 2)} \quad \boxed{A(0, 8)}$$





שאלה 1) BC הוא קוטר ולכן יהנקודה M היא נקודה

האמצע של הקוטר BC.

$$M(4, 5)$$

$$B(0, 2)$$

(ציר קואורדינטות האמצע קסר)

$$4 = \frac{0 + X_c}{2} \quad / \cdot 2$$

$$8 = X_c$$

$$2) \quad 5 = \frac{2 + Y_c}{2} \quad / \cdot 2$$

$$10 = 2 + Y_c$$

$$Y_c = 8$$

$$\boxed{C(8, 8)}$$

$$3) \quad \text{היקף המעגל} = MC + MD + CD$$

$$MD = MC = R = 5$$

נמצא את האורך של CD באמצעות נוסחה
 מרחק בין שתי הנקודות.





$$X_D = X_M = 4$$

X נמצא 8 ו-3
 $Y_D = 0$

$$C(8,8) \quad d_{CM} = \sqrt{(8-4)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{80}$$

$$D(4,0) \quad d_{CM} = 8.944$$

ה"ק
 הממוצע
 $CM D = 5 + 5 + 8.944 = 18.944$

ה"ק הממוצע הוא 18.944





4. נתונה הפונקציה $f(x) = x - 4 + \frac{16}{x}$.

- רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.
- רשום את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- האם לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם ציר ה- x ? אם כן – מצא אותן, אם לא – נמק.

א. תחום ההגדרה $x \neq 0$

ב. נקודות יקיצון $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2}$$

$$1 - \frac{16}{x^2} = 0 \quad / x^2$$

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = -4$$

מצא את שיעורי נקודות הקיצון:

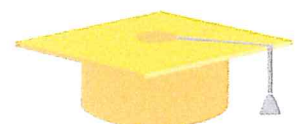
$$f(4) = 4 - 4 + \frac{16}{4} = 4$$

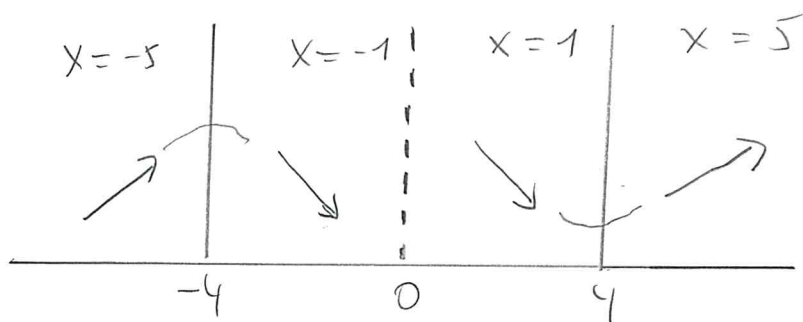
$$f(-4) = -4 - 4 + \frac{16}{-4} = -12$$

$$(4, 4)$$

$$(-4, -12)$$

ציר ה- x אינו חותך את גרף הפונקציה.





$$f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2}$$

$$f'(-5) = 1 - \frac{16}{(-5)^2} = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \quad \text{חיובי}$$

$$f'(-1) = 1 - \frac{16}{(-1)^2} = 1 - \frac{16}{1} = -15 \quad \text{שלילי}$$

$$f'(1) = 1 - \frac{16}{1^2} = 1 - 16 = -15 \quad \text{שלילי}$$

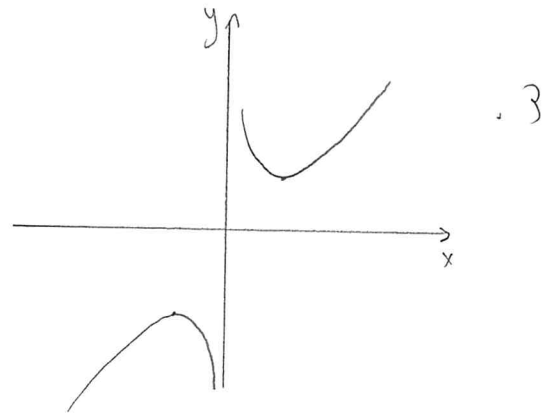
$$f'(5) = 1 - \frac{16}{5^2} = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \quad \text{חיובי}$$

$(-4, -12)$	נקודת מקסימום	נקודות:
$(4, 4)$	נקודת מינימום	

$$x < -4 \quad \text{חיובי} \quad x > 4$$

$$-4 < x < 0 \quad \text{שלילי} \quad 0 < x < 4$$





ה. עדי היגדל ניקן אינאל טאין נקודות חילוק
 ער ציר x .

צירק נוסט: נקודות חילוק ער ציר x טעור
 ה y האט 0.

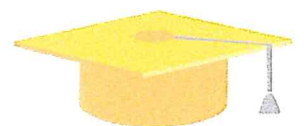
צירק אונק צייט $y=0$ אנקא:

$$x - \frac{x}{4} + \frac{16}{x} = 0 \quad / \cdot x$$

$$x^2 - 4x + 16 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-48}}{2}$$

אין טאט וואס אינאסער טאלי וואסן אין חילוק ער ציר x .



5. בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = x^2 + 3$.

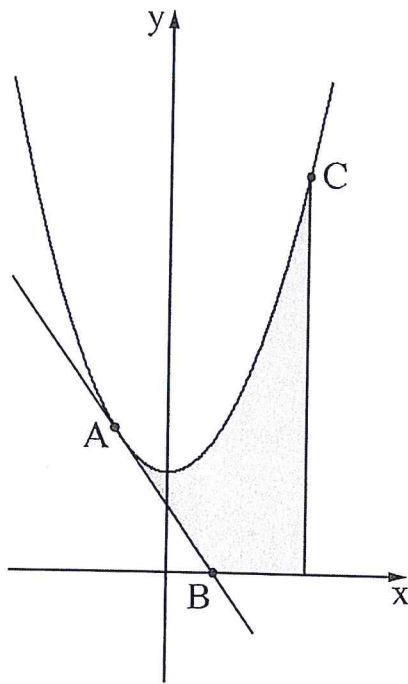
בנקודה A שבה $x = -1$, העבירו משיק לגרף הפונקציה.

א. מצא את שיפוע המשיק.

ב. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את שיעורי הנקודה B, נקודת החיתוך של

המשיק עם ציר ה- x .



הנקודה C נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון.

שיעור ה- y של הנקודה C הוא 12.

ג. מצא את שיעור ה- x של הנקודה C.

ד. מהנקודה C הורידו אנך לציר ה- x .

חשב את השטח האפור בציור:

השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק, ציר ה- x והאנך.

א. (1) נמצא את השיפוע באמצעות הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.
 נגזרת של הפונקציה $f(x)$ אנכי אנגלי
 את שיפוע ה- x של הנקודה A.

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(-1) = 2(-1) = -2$$

$$m = -2$$



(2) נמצא את שיעור ה- y של הנקודה A .

$$x(A) = -1$$

נציב $x = -1$ בסיוע הנמנה ונקבל

$$f(x = -1) = (-1)^2 + 3 = 4$$

$$A(-1, 4)$$

(3) במשולש הישרי את השיעור y הנמצא
 ואת שיעור הנקודה A .

$$m = -2 \quad A(-1, 4)$$

$$y - 4 = -2(x + 1)$$

$$y - 4 = -2x - 2$$

$$y = -2x + 2$$

2. B היא נקודת החיתוך של המשיק עם ציר
 ה- x וכן שיעור ה- y הוא 0.

$$B(0, 0)$$

נציב $y = 0$ במשולש המשיק שקיבלנו
 במסגרת קודמת.



$$y = -2x + 2$$

$$0 = -2x + 2$$

$$2x = 2 \quad / : 2$$

$$x = 1$$

נקודה:

$$B(1, 0)$$

ג. אפ"ה הנחין שיהיו ה- y הנקודה C הוא 12 ,
 נ"ב $y = 12$ במשוואת הפירוקה ונקודה A שיהיו
 ה- x הנקודה C .

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$x^2 + 3 = 12$$

$$x^2 = 12 - 3$$

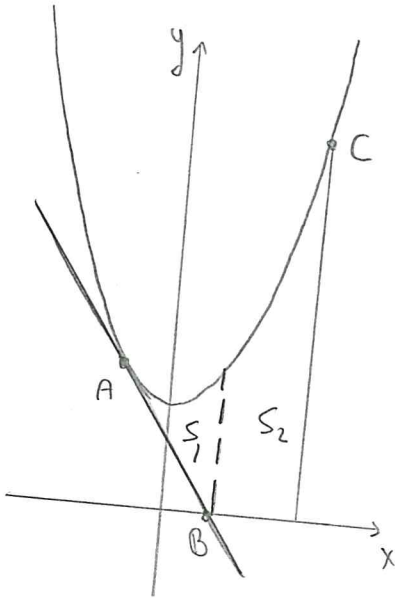
$$x^2 = 9$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

הנקודה C נמצאת בקוץ הנכנסון חסן שיהיו
 ה- x שיהיו הוא חילוקי.

$$x_c = 3$$





3. אר הטח האכנו חיון אחטק
קטני גיוני.

תקלזה B נחא האק אכיו ה- X

אנמאן אר הטח הנטאון ק- S_1

אר הטח הטני ק- S_2 .

$$\frac{S_1}{\text{ח'ט'ק}} = \int_{-1}^1 \text{אכיון האנטאק} :$$

הכרט הנאק צאר: $(X^2+3) - (-2X+2)$

$$X^2+3 + 2X-2 = X^2+2X+1$$

$$S_1 = \int_{-1}^1 (X^2+2X+1) dX = \left[\frac{X^3}{3} + \frac{2X^2}{2} + X \right]_{-1}^1 =$$

$$\left(\frac{1^3}{3} + \frac{2 \cdot 1^2}{2} + 1 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{2(-1)^2}{2} - 1 \right)$$

$$2\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) = 2\frac{2}{3}$$



ח'ט"ק S_2

גבולות האינטגרל:

הפיט הפונקציה: $(x^2+3)-(0) = x^2+3$

ח'ט"ק הפיט:

$$\int_1^3 (x^2+3) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3x \right]_1^3 =$$

$$\left(\frac{3^3}{3} + 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1^3}{3} + 3 \cdot 1 \right) =$$

$$18 - 3\frac{1}{3} = 14\frac{2}{3}$$

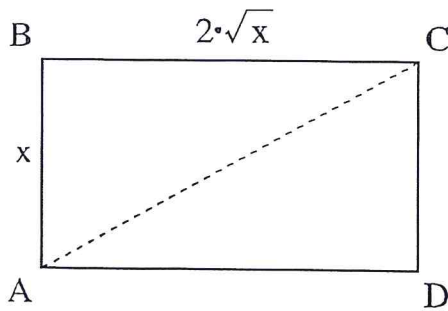
$$S_1 + S_2 = 2\frac{2}{3} + 14\frac{2}{3} = 17\frac{1}{3}$$

הפיט הוא $17\frac{1}{3}$ יחידות





6. לפניך המלבן ABCD.



אורך הצלע AB הוא x , ואורך הצלע BC הוא $2\sqrt{x}$.

א. מצא את x שעבורו ההפרש בין BC ל-AB

(BC - AB) הוא מקסימלי.

ב. עבור ערך ה- x שמצאת בסעיף א,

חשב את אורך האלכסון AC.

6. נניח ש- x הוא פונקציה של x וההפרש

בין BC ל-AB הוא $f(x)$.

א. חשב את הפונקציה $f(x)$.

$$f(x) = BC - AB$$

$$f(x) = 2\sqrt{x} - x \leftarrow \text{הפונקציה}$$

כדי למצוא את x שזקולו ההפרש הוא מקסימלי

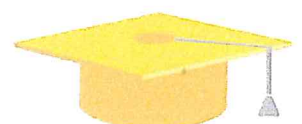
נמצא את נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$.

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} - 1$$

$$\frac{2}{2\sqrt{x}} - 1 = 0 \quad / \cdot 2\sqrt{x}$$

מי שנגזרת
יכול למצוא



$$2 - 2\sqrt{x} = 0$$

$$-2\sqrt{x} = -2 \quad / -2$$

$$\sqrt{x} = \frac{-2}{-2}$$

$$\sqrt{x} = 1$$

נשים בקיבוץ את שני האגפי המטולה ונקבל:

$$(\sqrt{x})^2 = 1^2$$

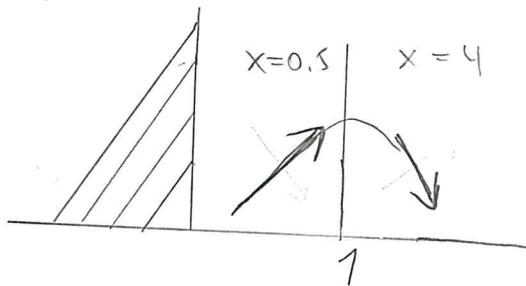
$$x = 1$$

נראה שהנקודה היא נקודת מקסימום בעזרת
טבלת עלייה וירידה.

נשייטת שהנונקציה

$$f(x) = 2\sqrt{x} - x$$

מאגירה עבור $x \geq 0$ ואכן הטבלה שנקבל היא:



$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} - 1$$

$$f'(x=0.5) = \frac{2}{2\sqrt{0.5}} - 1 = 0.41$$

עולה

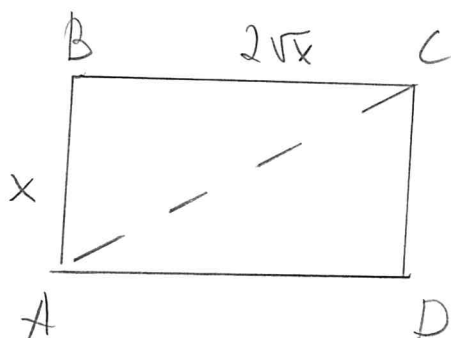
$$f'(x=4) = \frac{2}{2\sqrt{4}} - 1 = -\frac{1}{2}$$

יורדת

קיבלנו ש- $x=1$ הפונקציה
מקבלת נקודת מקסימום.

תשובה: עבור $x=1$ ההכנסה היא מקסימלית





ק. בסעיף א' קיבלנו

$$x = 1$$

ולכן:

$$AB = x = 1$$

$$BC = 2\sqrt{x} = 2\sqrt{1} = 2$$

נמצא את אורך היתר AC
 באמצעות משפט פיתגורס:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$1^2 + 2^2 = AC^2$$

$$5 = AC^2$$

$$AC = \sqrt{5} = 2.236$$

$$AC = \sqrt{5} = 2.236$$

תשובה: יחידות

