

## פתרון הבחינה במתמטיקה

קיץ תשע"ז, 2017, שאלון: 35581 עפ"י תכנית הרפורמה ללמידה משמעותית.  
שאלון ראשון מ-5 יח"ל.  
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"





1. נגה רכבה על אופניים במסלול באורך מסוים, בארבע מהירות קבועות שונות. בכל פעם, לאחר שעברה מקטע שאורכו רבע מן המסלול, היא הגבירה את מהירותה, ורכבה במהירות הגדולה פי 2 מן המהירות הקודמת. במקטע האחרון היא רכבה במהירות של 40 קמ"ש. נגה יצאה לדרך בשעה 8:00 בבוקר וסיימה את המסלול בשעה 11:45 בבוקר.

א. מהו אורך המסלול?

- ב. דניאל יצא לדרך באותו מסלול בשעה 9:45, ונסע במהירות קבועה לאורך כל המסלול. גם הוא הגיע לסוף המסלול בשעה 11:45. באיזה מארבעת מקטעי המסלול פגש דניאל את נגה בפעם הראשונה, ובאיזו שעה?

$$\begin{array}{ccccccc} & x, v & & x, 2v & & x, 4v & & x, 8v = 40 \text{ קמ"ש} \\ \hline & | & & | & & | & & | \end{array}$$

ק

מהירות למקטע האחרון:  $8v = 40 \rightarrow v = 5$  קמ"ש

נציב את המהירות במכלול:  $x, 2v, 4v, 8v$

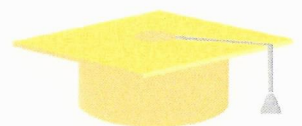
| זמן            | מהירות | ק"מ | סך הכל |
|----------------|--------|-----|--------|
| $\frac{x}{5}$  | 5      | x   | I      |
| $\frac{x}{10}$ | 10     | x   | II     |
| $\frac{x}{20}$ | 20     | x   | III    |
| $\frac{x}{40}$ | 40     | x   | IV     |

מהירות כי סך כל המהירות היא:  $3\frac{3}{4}$  קמ"ש

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{10} + \frac{x}{20} + \frac{x}{40} = 3\frac{3}{4} \rightarrow x = 10$$

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



ואכן אורך ההסלול כולו  $40 = 4.0$  דקות.

ב תחילה נגזר את מהירותו של רגל:

סך הדרך היא 40 ד"ר במהלך 2 שעות:  $\frac{40}{2} = 20$  ד"ר

נבדוק תחילה מה במהלך השעה הראשונה נהג רגל:  $10^{\text{ש}}$ :

נהג רגל שעה שמיים במהירות 5 ד"ר ואכן עברה 10 ד"ר

רגל נסע שעה במהירות 20 ד"ר ואכן עבר 5 ד"ר

ומכאן סגל עדין לא הסיל את רגל.

כפי שהינו, רגל עבר 5 ד"ר פחות ממה ש  $10^{\text{ש}}$

נבדוק מכאן בקלע הבני:

נהג רגל שעה שמיים במהירות 5 ד"ר ואכן עבר  $10^{\text{ש}}$

נהג רגל שעה במהירות 10 ד"ר

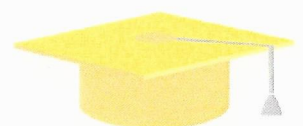
רגל נסע שעה במהירות 20 ד"ר

אכן נהג רגל עברה 10 ד"ר ורגל 20 ד"ר ואכן עבר רגל שעה

הוא עבר 5 דקות יותר ממה שאכן:  $20t = 10t + 5 \rightarrow t = \frac{1}{2}$

נפגש בשעה 10:30  
במקל הבני.

(אכן נהג רגל שעה במהירות 20 ד"ר - 11)



2. נתונה הסדרה  $a_n = \frac{(2^n + 1)(2^n - 1)}{2^n}$ .

$b_n$  ו-  $c_n$  הן סדרות הנדסיות שכל איבריהן חיוביים, המקיימות לכל  $n$  טבעי:  $a_n = b_n - c_n$ .

נתון:  $b_6 = 64$ ,  $c_3 = \frac{1}{8}$ .

א. (1) מצא את  $b_1$  ואת המנה של הסדרה  $b_n$ .

(2) מצא את  $c_1$  ואת המנה של הסדרה  $c_n$ .

את סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$  נסמן ב-  $A_n$ ,

את סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה  $b_n$  נסמן ב-  $B_n$ ,

ואת סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה  $c_n$  נסמן ב-  $C_n$ .

ב. הראה ש-  $C_n = B_n - A_n$ .

ג. עבור אילו ערכי  $n$  מתקיים האי-שוויון:  $0.9 < B_n - A_n < 1$ ?

ע (1) נמצא את  $a_3$  מהסדרה הנמנית:

$$a_3 = \frac{(2^3 + 1)(2^3 - 1)}{2^3} = \frac{9 \cdot 7}{8} = \frac{63}{8}$$

מכאן נמצא את  $b_3$ :

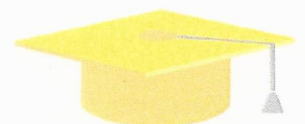
$$b_3 = a_3 + c_3 = \frac{63}{8} + \frac{1}{8} = 8$$

הנמון כי  $b_n$  היא סדרה הנדסית:

$$q^3 = \frac{b_6}{b_3} = \frac{64}{8} = 8 \rightarrow \boxed{q_3 = 2}$$

$$b_3 = b_1 \cdot q^2$$

$$8 = b_1 \cdot 2^2 \rightarrow \boxed{b_1 = 2}$$





(2) נרצא את  $a_n$  מהסדר הנמוך

$$a_1 = \frac{(2'-1)(2'-1)}{2'} = \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$c_1 = b_1 - a_1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{c_1 = \frac{1}{2}}$$

$$q^2 = \frac{c_2}{c_1} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{q = \frac{1}{2}}$$

$$: a_n = b_n - c_n$$

נשתמש ב-

$$a_1 = b_1 - c_1$$

$$+ \quad a_2 = b_2 - c_2$$

⋮

$$a_n = b_n - c_n$$

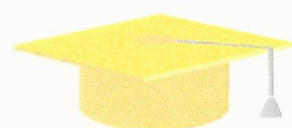
---


$$A_n = B_n - C_n$$

⇕

$$\boxed{C_n = B_n - A_n}$$

כעת.





$$0.9 < B_n - A_n < 1$$

≤ מסלול כי ניתן לשכתב:

$$0.9 < C_n < 1$$

$$0.9 < \frac{\frac{1}{2}[(\frac{1}{2})^n - 1]}{\frac{1}{2} - 1} < 1$$

$$0.9 < 1 - (\frac{1}{2})^n < 1$$

↖ ↗

$$0.9 < 1 - (\frac{1}{2})^n$$

$$1 - (\frac{1}{2})^n < 1$$

$$(\frac{1}{2})^n < \frac{1}{10}$$

$$0 < (\frac{1}{2})^n$$

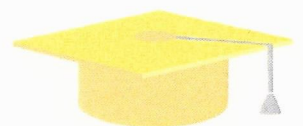
נכון לכל n

$$n=3: (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8} < \frac{1}{10}$$

$$n=4: (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16} < \frac{1}{10} \checkmark$$

כל ע - n של המסלול המאגף גדול

ולכן מתקיים לכל  $n \geq 4$



3.

בבית אבות גדול יש לכמה מן הדיירים קלנועית, ולשאר אין.

אם בוחרים באקראי 9 דיירים מבית האבות הזה, ההסתברות של 4 מהם בדיוק

יש קלנועית גדולה פי 24 מן ההסתברות של 6 מהם בדיוק יש קלנועית.

א. מהי ההסתברות שלדייר שנבחר באקראי יש קלנועית?

ב. בוחרים באקראי 6 דיירים מבית האבות. ידוע שלפחות ל-3 מהם יש קלנועית.

מהי ההסתברות של 4 מהם בדיוק יש קלנועית?

ג. בוחרים באקראי דיירים מבית האבות, בזה אחר זה, עד של-3 מהם בדיוק יש קלנועית.

מהי ההסתברות שייבחרו בדרך זו בדיוק 6 דיירים?

א. נשמע בנוסחה ב-10' להסתברות הבינומל כאלה:  
 $P -$  ההסתברות שלדייר יהיה קלנועית

מהנתון:

$$P_9(4) = 24 P_9(6)$$

$$\binom{9}{4} p^4 (1-p)^5 = 24 \binom{9}{6} p^6 (1-p)^3$$

$$126 (1-p)^2 = 24 \cdot 84 \cdot p^2$$

$$(1-p)^2 = 16 p^2$$

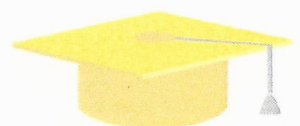
$$1-p = 4p$$

$$p = \frac{1}{5}$$

$$1-p = -4p$$

$$p = \frac{-1}{5}$$

ההסתברות שלדייר יהיה קלנועית  $p = \frac{1}{5}$





2. מהנטי לאספקת החומר:

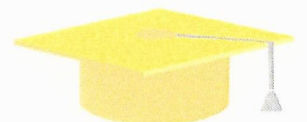
$$P\left(\frac{\text{קניין 4-5} \text{ יש חלום}}{\text{לפניו 5-6} \text{ יש חלום}}\right) = \frac{P(\text{קניין 4} \cap \text{לפניו 3})}{P(\text{לפניו 3})} =$$

$$= \frac{P_6(4)}{1 - (P_6(0) + P_6(1) + P_6(2))}$$

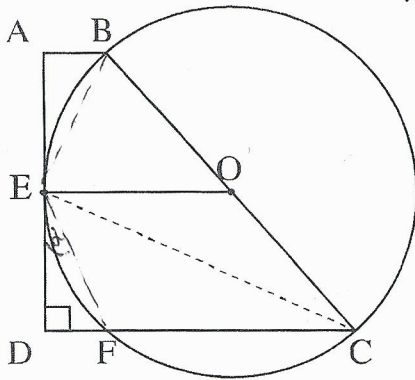
$$= \frac{\binom{6}{4} \cdot 0.2^4 \cdot 0.8^2}{1 - (0.8^6 + 6 \cdot 0.2 \cdot 0.8^5 + \binom{6}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^4)} = \boxed{\frac{16}{103} = 0.15534}$$

3. לחיך ה-5 היחידים נחב כי קניין 2-3 למי יש חלום  
למי לא חלום יש חלום:

$$P_5(2) \cdot p = \binom{5}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^3 \cdot 0.2 = \frac{128}{3125} = \boxed{0.04096}$$



4. נתון מעגל שמרכזו O.

ABCD הוא טרפז ישר זווית ( $\angle ADC = 90^\circ$ ,  $AB \parallel DC$ ).

הצלע AD משיקה למעגל בנקודה E,

והנקודות B ו-C נמצאות על המעגל כך ש-BC הוא קוטר.

הצלע DC חותכת את המעגל בנקודה F, כמתואר בציור.

א. הוכח:  $\angle BCD = 2\angle DEF$ .ב. הוכח:  $\triangle ABE \cong \triangle DFE$ .ג. הוכח:  $BC = DF + DC$ .

פתרון

 $AB \parallel CD$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$ 

AD

משיק בנקודה E

 $EO \perp AD$  $\Downarrow$  $\angle E = \angle D = 90^\circ$  $\Downarrow$  $ED \parallel DC$  $\angle FED = \alpha$  $\angle FED = \angle ECF = \alpha$  $\Downarrow$  $\angle ECF = \angle OEC = \alpha$ 

ניתן

נתון ABCD טרפז ישר זווית

נתון

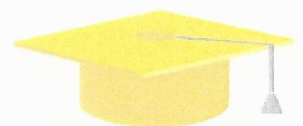
כצ'וס מאונך למשיק בנקודה E

כל המעגל

אם זוויות מתאימות שוות, אז  
הישרים מקבילים

סימון

זוויות ד'ן משיק למעגל

זוויות מתאימות שוות ד'ן  
ישרים מקבילים







נ'מור

אננה



$$AB = DF$$

$$EO = BO = OE$$



EO קא אנצ'ע'ס באכאט



$$EO = \frac{AB + CD}{2}$$



$$2EO = DF + CD$$



$$2EO = BC$$



$$BC = DF + CD$$

הצבה

מש"ל

צאעות שוות בהתאמה

משולשים חופפים

כצ'וס'ם אמצע'ם שווים.

קא'ס ה'וצ'ע אמצע'ם השווים

ומקל'ע'ם ה'וצ'ע

קא'ס אמצע'ם.

קא'ס אמצע'ם באכאט

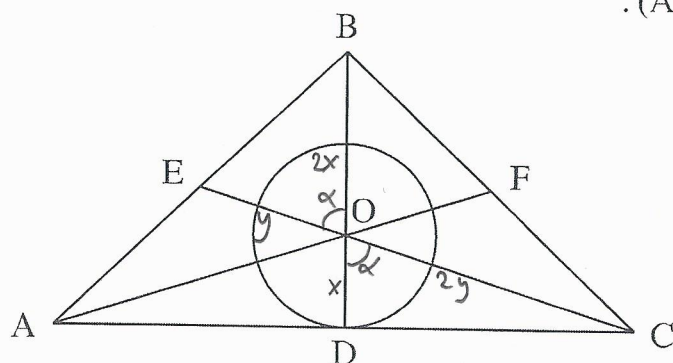
שורה למחצית סכום

ה'וצ'ע'ם

פעולה אמצע'ם + הצבה

קוטר שווה לסך הצ'וס'ם





5.  $ABC$  הוא משולש שווה שוקיים ( $AB = BC$ ).

CE, AF ו- BD הם תיכונים במשולש,

הנחתכים בנקודה  $O$  (ראה ציור).

א. הוכח:  $S_{\Delta BOE} = S_{\Delta COD}$ .

מעגל שמרכזו O משיק לצלע AC

בנקודה D.

נתון כי שטח העיגול שווה לשטח המשולש AOC .

ב. חשב את גודל הזווית ACE.

ג. הבע את אורך הקטע OE באמצעות רדיוס המעגל.

$OD = x$ ,  $OE = y$  - מרכז  
 $OB = 2x$ ,  $OC = 2y$  - נק' מפגש  
 תיכון ביחס  $2:1$ .

isf is the first pass - \*BOE = \*DOC = 2

$$\begin{cases} S_{\Delta POE} = \frac{1}{2} \cdot y \cdot 2x \cdot \sin \alpha = x \cdot y \cdot \sin \alpha \\ S_{\Delta COO} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2y \cdot \sin \alpha = x \cdot y \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

e-vo  $S_{\Delta \text{BoG}} = S_{\Delta \text{cor}}$  ghe gitec pcon

(אפשר לפרוט מילולית כי 3 העיכובים מולקולרם של ה- $\Delta$  בלבד)  
(8-6 שם זה נראה)



$$S_0 = S_{\Delta AOC} \quad \text{שטחיות} \quad \underline{\underline{2}}$$

$$\pi R^2 = \frac{R \cdot AC}{2}$$

$$(\angle \text{הזווית} - \angle \text{הזווית} = R)$$

$$AC = 2 \cdot CD \quad \text{כי } BD \text{ נקודה ביניים}$$

$$\pi R = \frac{2CD}{2} \rightarrow \pi R = CD \quad *$$

$$** \quad \frac{R}{OC} = \tan \angle DCE \quad : \Delta ODC \quad \text{ע"פ}$$

הצבה \*\*

$$\frac{R}{\pi R} = \tan \angle DCE \rightarrow \angle DCE = 17.66^\circ$$

$$\angle ACE = \angle DCE = 17.66^\circ$$

$$\frac{R}{OC} = \sin \angle PCO$$

$$: \Delta ODC \quad \text{ע"פ} \quad \underline{\underline{2}}$$

$$\frac{R}{OC} = \sin 17.66^\circ$$

$$OC = \frac{R}{\sin 17.66^\circ} = 3.3R$$

$$OE = \frac{1}{2} OC = 1.648R$$





$$S_0 = S_{\triangle AOC}$$

נניח:  $\cong$

$$R - x = R - x \quad \text{נניח}$$

$$\pi R^2 = \frac{R \cdot AC}{2}$$

$$AC = 2CD \quad \text{כי } BD \text{ תיכון}$$

$$\pi R = \frac{2CD}{2} \rightarrow \pi R = CD,$$

$\downarrow$

$$\frac{CD}{R} = \pi$$

$$\frac{CD}{R} = \tan \alpha \quad \text{כפי: } \triangle ODC$$

$$\pi = \tan \alpha \rightarrow \alpha = 72.34^\circ$$

$$\angle ACE = \angle OCD = 90^\circ - 72.34^\circ = 17.66^\circ$$

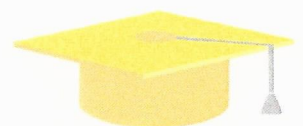
$$17.66^\circ$$

$$\frac{R}{OC} = \cos \alpha$$

$$\triangle ODC \quad \text{כפי} \quad \cong$$

$$OC = \frac{R}{\cos \alpha} = \frac{R}{\cos 72.34^\circ} = 3.3 R$$

$$OE = \frac{1}{2} OC = 1.648 R$$







6. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+24}}$ .

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).  
 (3) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.  
 (4) מצא את את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).  
 (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתונה הפונקציה  $g(x)$  המקיימת:  $g(x) = f(x+5)$ .

- ב. (1) הוכח ש-  $g(x)$  היא פונקציה אי-זוגית.  
 (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .  
 ג. הסבר מדוע לכל  $1 < a < b$  מתקיים השוויון:  $\int_a^b g(x) dx = \int_{a+5}^{b+5} f(x) dx$ .

$$x^2 - 10x + 24 > 0$$

(1) ל



נציג את הפירוק למכפלה (נמצא את המצאם):

$$x < 4 \text{ או } x > 6$$

(2) חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = f(0) = \frac{0-5}{\sqrt{24}} = -1.02 \rightarrow (0, -1.02)$

חיתוך עם ציר ה- $x$ :  $0 = \frac{x-5}{\sqrt{\quad}} \rightarrow x=5$   
 נחיל למצאם המאונך.





$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+24}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = 1 \quad \boxed{y=1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+24}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = -1 \quad \boxed{y=-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+24}} = -\infty \rightarrow \boxed{x=4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+24}} = \infty \rightarrow \boxed{x=6}$$

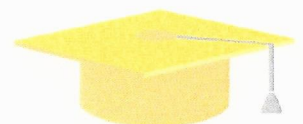
(4) נמצא את הנקודות בהן הפונקציה היא קיצון מקומי:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2-10x+24} - (x-5) \frac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+24}}}{x^2-10x+24} =$$

$$= \frac{x^2-10x+24 - (x-5)^2}{(x^2-10x+24)^{3/2}} = \frac{x^2-10x+24 - x^2+10x-25}{(x^2-10x+24)^{3/2}}$$

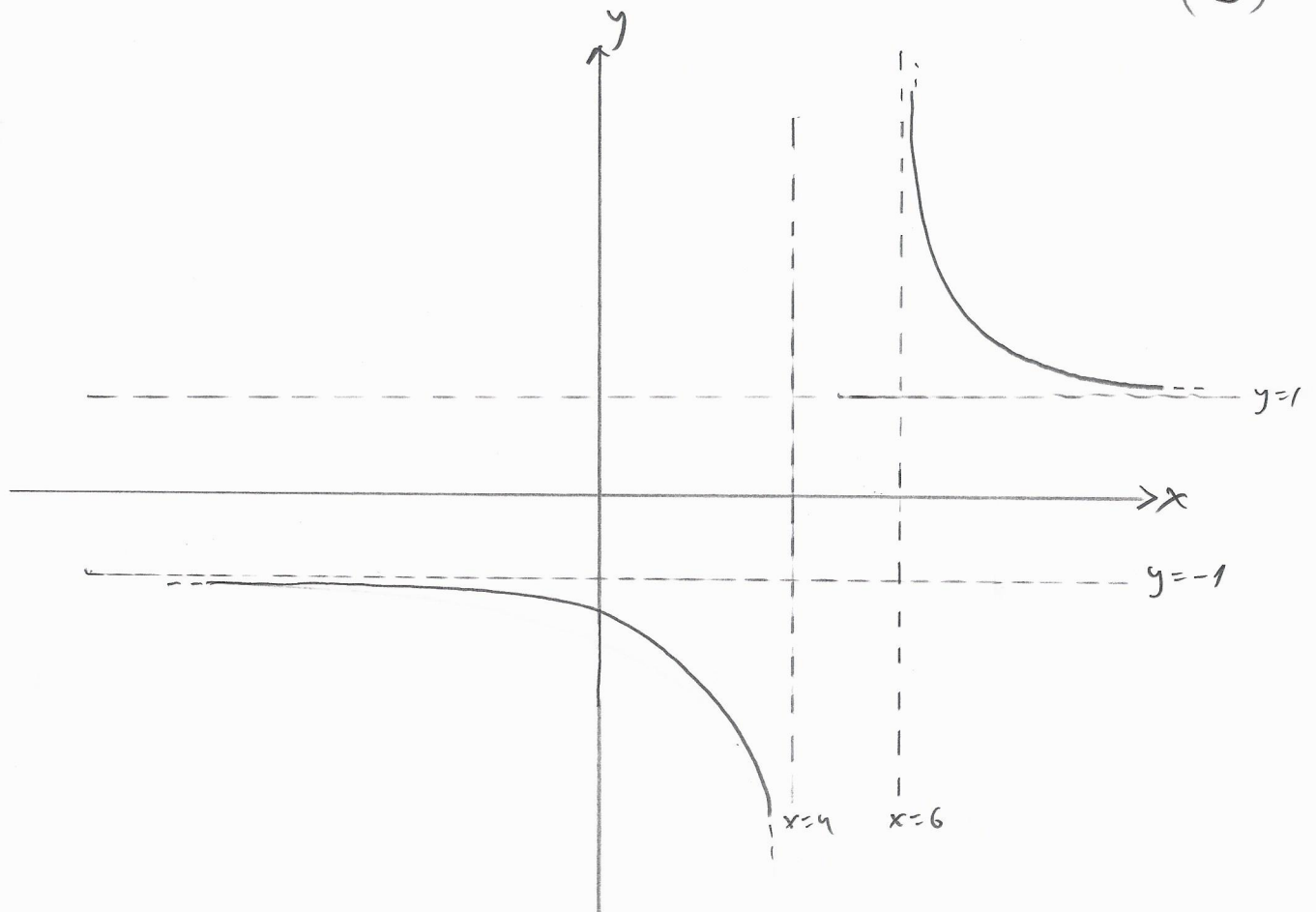
$$= \frac{-1}{(x^2-10x+24)^{3/2}} < 0$$

לכן הפונקציה  $f$  היא קיצון מקומי של  $x$  בנקודה  $x=5$ .



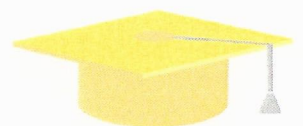
דבר :  
 תחום יחיד :  $x > 6$  או  $x < 4$   
 תחום שלילי : אין

(5)



למידע על פסיכומטרי  
 ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**





2 (1) כדי להוכיח כי פונק' היא אי-זוגית

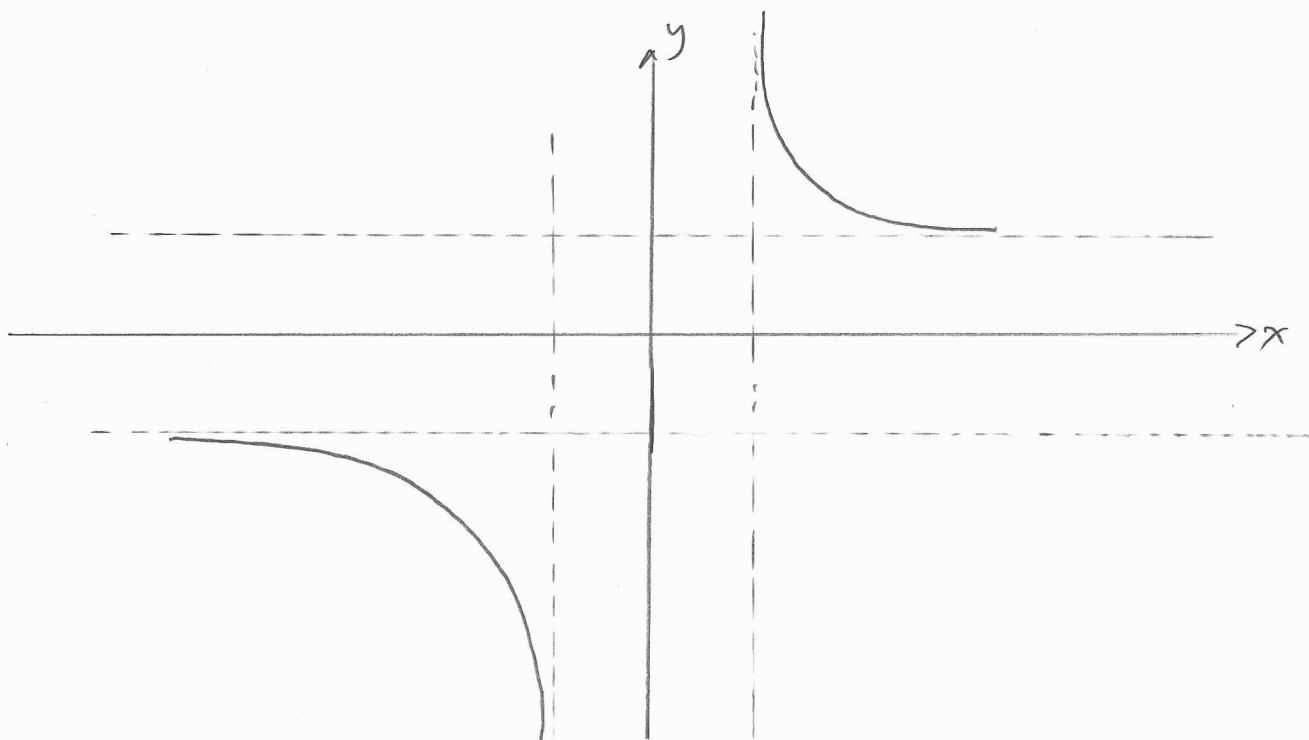
נראה כי מתקיים  $g(-x) = -g(x)$

$$g(-x) = f(-x+5) = \frac{(-x+5)-5}{\sqrt{(-x+5)^2-10(-x+5)+24}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$g(x) = f(x+5) = \frac{x+5-5}{\sqrt{(x+5)^2-10(x+5)+24}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

לכן,  $g(-x) = -g(x)$  אי-זוגית.

(2)  $g(x) = f(x+5)$  - הסט שאלה 5 יחידה של  $f(x)$ :



לַ עַם בְּ-2 שְׁנֵי הַאֲנֵלִיּוֹת מִיִּצְיָה אֶל אֵלֶּיזָבֶת.  
 מִכִּיּוֹן שְׁפוּקָתָם שָׁפָה הָאֵל הַזֶּה אֶל הַשְּׁפוּקָה נֶאֱסַף 5 יִזְקֵי  
 שְׁמַיִם, אֵם הַשְּׁפוּקָה אֶל הַאֲנֵלִיּוֹת מִיִּצְיָה בְּ-5 יִזְקֵי שְׁמַיִם  
 בְּהִמְלָאָה. וְכֵן הַאֲנֵלִיּוֹת שׁוֹיִם.







7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$ .

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.  
 (3) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).  
 ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ .  
 ג. נתון:  $0 < a < \frac{\pi}{2}$ .  
 השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , הישר  $x = a$  וציר ה- $x$  שווה ל-1.  
 מצא את  $a$ .

$$\cos x \neq 0$$

(1) ל

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

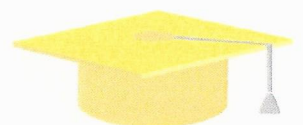
$$f(0) = \frac{2 \sin 0}{\cos^3 0} = 0 \rightarrow (0, 0)$$

(2)

$$f(x) = 0 \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = \pi k \rightarrow (\pi k, 0)$$

(3) אסימפטוטה אנכית במקל כטל שאלפס כלכלס :

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$





(4) אף גדולי. כלים - חיובי נקבל ע"י סימן הנגזרת:

$$f'(x) = \frac{2\cos x \cdot \cos^3 x - 2\sin x \cdot 3 \cdot \cos^2 x \cdot (-\sin x)}{\cos^6 x} =$$

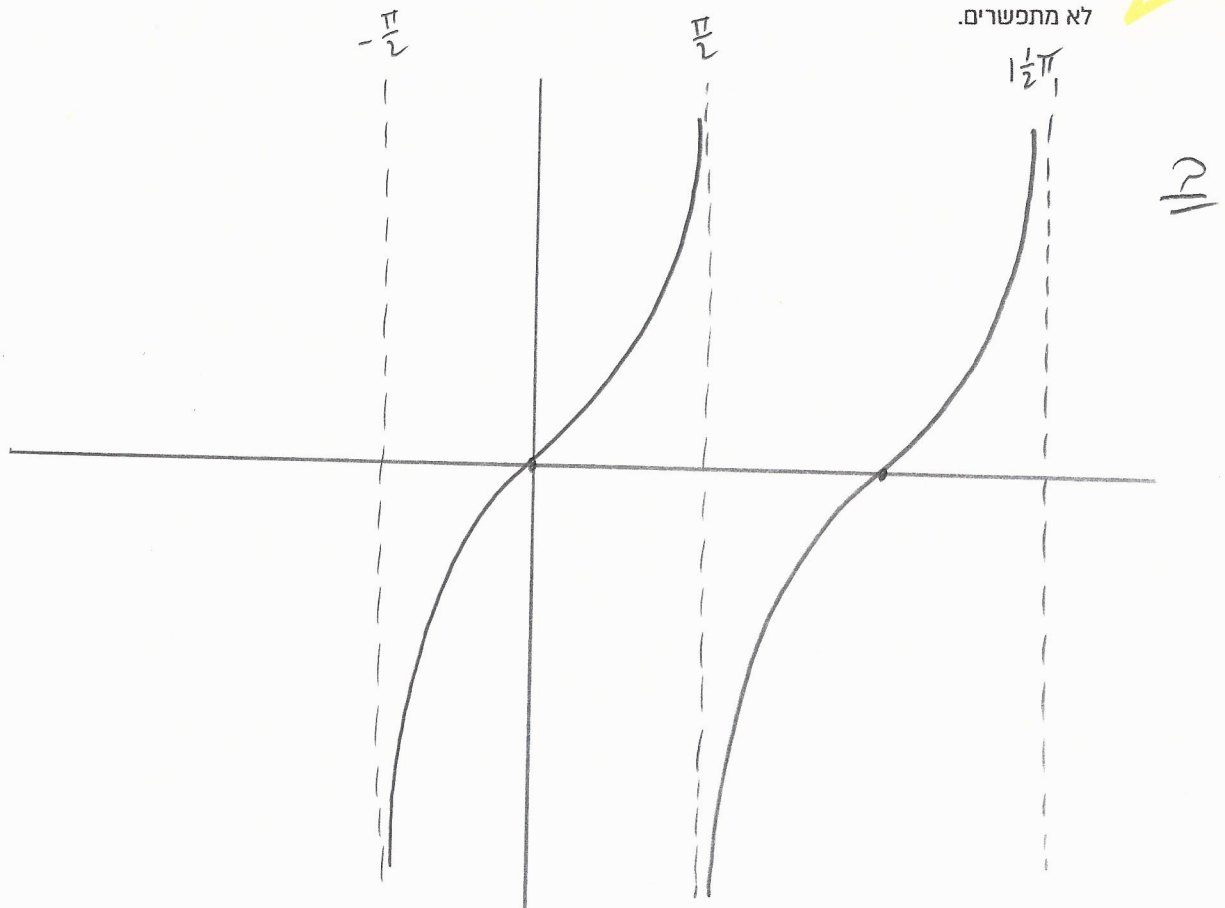
$$= \frac{2\cos^4 x + 6\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^6 x} = \frac{2\cancel{\cos^2 x}(\cos^2 x + 3\sin^2 x)}{\cos^4 x} =$$

$$= \frac{2(\cos^2 x + 3\sin^2 x)}{\cos^4 x} > 0$$

הנגזרת חיובית, לפי א גרדוק, הפאריס.

|                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>גדולי. כלים: <math>x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k</math></p> <p>גדולי. חיובי: אין</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------|





$$\int_0^a \frac{2 \cdot \sin x}{\cos^3 x} dx = 1$$

נניח שגורם אינטגרל זה חזק

$$\cos x \equiv u \quad -\sin x \cdot dx = du$$

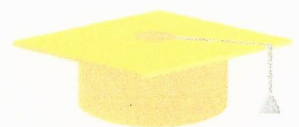
$$dx = \frac{-du}{\sin x}$$

$$\int \frac{2 \cdot \sin x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{2 \cdot \sin x}{u^3} \cdot \frac{-du}{\sin x} = -2 \int \frac{1}{u^3} du =$$

$$= -2 \int u^{-3} du = -2 \frac{u^{-2}}{-2} = \frac{1}{u^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.





$$\int_0^a \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} dx = \frac{1}{\cos^2 x} \Big|_0^a = 1. \quad \text{למכאן:}$$

$$\frac{1}{\cos^2 a} - \frac{1}{\cos^2 0} = 1$$

$$\frac{1}{\cos^2 a} - 1 = 1$$

$$\frac{1}{\cos^2 a} = 2$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}$$

$$\cos a = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\cos a = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$a = \frac{1}{4}\pi + 2\pi k$$

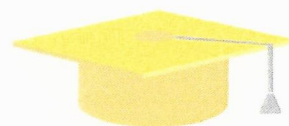
$$a = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$$

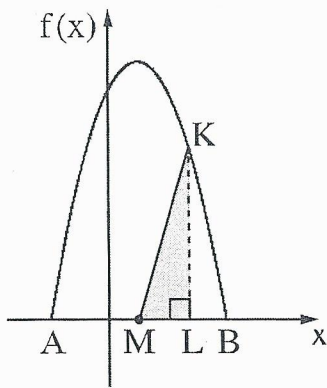
$$a = -\frac{1}{4}\pi + 2\pi k$$

$$a = -\frac{3}{4}\pi + 2\pi k$$

$$a = \frac{1}{4}\pi$$

במסוף העמוד :





8. בציר שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = -x^2 + 2x + c$  בתחום האי-שליליות שלה.

A ו-B הן נקודות החיתוך של הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ .

נתון:  $x_B = 2t$ ,  $x_A = -t$  ( $t > 0$ ).

א. מצא את  $t$  ואת  $c$ .

M היא נקודת החיתוך של ציר הסימטריה של הפרבולה עם ציר ה- $x$ .

K היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה  $f(x)$  מעל לציר ה- $x$ .

מהנקודה K הורידו אנך לציר ה- $x$ , החותך את הקטע AB בנקודה L.

ב. מצא עבור אילו שיעורי  $x$  של הנקודה K שטח המשולש KLM הוא מקסימלי.

מצא את שני הפתרונות האפשריים.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

1c למציאת  $c$  :  $f(-t) = 0$  וגם  $f(2t) = 0$

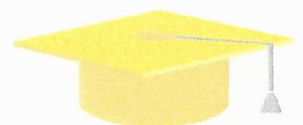
$$\begin{cases} 0 = -(-t)^2 + 2(-t) + c \\ 0 = -(2t)^2 + 2 \cdot 2t + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -t^2 - 2t + c \\ 0 = -4t^2 + 4t + c \end{cases}$$

$$0 = 3t^2 - 6t$$

$$\cancel{t=0} \quad \boxed{t=2} \rightarrow \boxed{c=8}$$

$t=0$  אינו פתרון







2 נקודות על הקו  $M$  :

$$X_M = X_{\text{מית}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$$

מכאן :

$$K(x, f(x))$$

נסמן את הק' ב  $x$

לכן נקח את  $\triangle KLM$  בעמוד  $x > 1$  :

$$S(x) = \frac{ML \cdot KL}{2} = \frac{(x-1) \cdot f(x)}{2} = \frac{(x-1)(-x^2+2x+8)}{2}$$

$$S'(x) = \frac{1}{2} [1(-x^2+2x+8) + (x-1)(-2x+2)] = \frac{1}{2} [-x^2+2x+8-2x^2+2x+2x-2]$$

$$= \frac{1}{2} [-3x^2+6x+6]$$

נשווה  $S' = 0$  : נקודות קיצון פנימי :

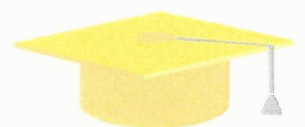
$$-3x^2+6x+6=0$$

$$-x^2+2x+2=0 \rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 1+\sqrt{3} \\ x = 1-\sqrt{3} \end{array}}$$

נראה ש  $x = 1+\sqrt{3}$  הוא הנקודה המקסימלית כי בנקודה הזו יש את המ"מ :

$$S'' = \frac{1}{2} (-6x+6) = -3x+3 \quad S''(1+\sqrt{3}) < 0 \rightarrow \text{מקסימום}$$





אם היינו פותרים בצורה זולה כישר  $x < 1$   
 היינו מקבלים פונקציה משהי השווה לאינסוף פונקציה המשהי  
 שקיבלנו עבור  $x > 1$ ,  
 ואז היינו מקבלים נקודה מקסימום כישר  $x = 1 - \sqrt{3}$ .

לסיכום: שטחי ה- $x$  של הנקודה  $x$  שבעצמים  
 שטח  $\triangle KLM$  הוא מקסימלי הם:

$$\begin{aligned} x &= 1 + \sqrt{3} \\ x &= 1 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

