

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשע"ז, 2017, מועד ב, שאלונים: 317, 35807
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. נתונה הנקודה $A(20, 0)$.

B היא נקודה שנמצאת על ציר ה- y ואינה ראשית הצירים.

דרך הנקודה B מעבירים ישר, ℓ_1 , המקביל לציר ה- x .

דרך ראשית הצירים, O , מעבירים ישר, ℓ_2 , שמאונך לישר AB .

הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 נחתכים בנקודה C .

א. הוכח שהמקום הגאומטרי של הנקודות C הנבנות כמתואר נמצא על פרבולה,

ומצא את משוואתה.

ב. D היא נקודה כלשהי הנמצאת על הפרבולה שאת משוואתה מצאת בסעיף א.

הנקודה F היא מוקד הפרבולה.

נתון הישר $x = k$. $k < 0$ הוא פרמטר.

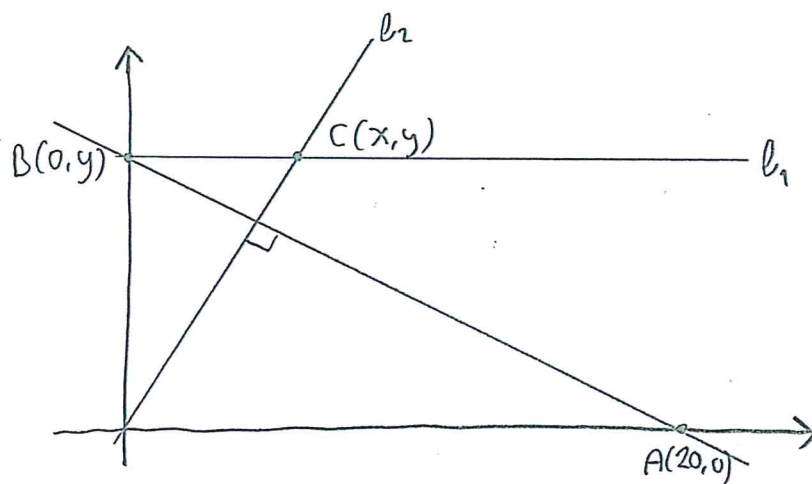
דרך הנקודה D העבירו ישר המקביל לציר ה- x וחותך את הישר $x = k$ בנקודה N .

קיים ערך של k שעבורו כל משולש NDF שנבנה כמתואר הוא שווה שוקיים.

(1) מצא את הערך של k . נמק.

(2) נתון: הנקודה D נמצאת ברביע הראשון.

מצא את שיעורי הנקודה D שעבורה המשולש NDF הוא שווה צלעות.



$C(x, y)$ נסמן $\underline{k}$





לנתון כי AB של -1 של ניצבים, מכאן שפונקציה שווה -1 :

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

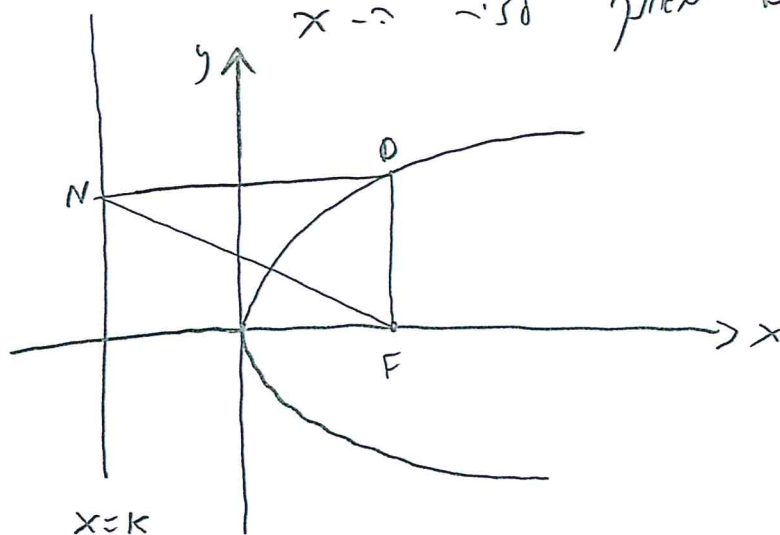
$$\frac{y-0}{0-20} \cdot \frac{y-0}{x-0} = -1 \rightarrow \boxed{y^2 = 20x}$$

ב (1) נראה : שני הנקודות היחידות שיכולות להיות שוות לכך
בזווית של קוטר DF ו- DN .

נסביר מדוע אין לנו אתה של נקודה במישור שיכולה להיות
שווה לכל בזווית של קוטר DF .

נסתכל על הנקודה F בו $x_D = x_F$

במצב זה DF מאונך לציר x



במקרה זה $\triangle MDF$ הינו ישר זווית

כן e NF הינה במשולש זה

ולכן $NF \neq MD$, $NF \neq FD$

לכן NF לא יכול להיות שוק במשולש שיהיה שוק

ולכן, האפשרות היחידה לדיוק $\triangle$ שיש עבור כל הזווית
 של D היא כאשר $MD = DF$

נמצא את הערך של a עבורו: $DF = DN$:

להגדרת הפונקציה, כל נקודה D שעל ציר MD נקבעה
 שמתקיים למחוקק שכל a מתקנה להגדרת

לכן $DF = DN$ כאשר $a = x$ הינו השווה של הפונקציה

ולכן $k = -\frac{p}{2}$

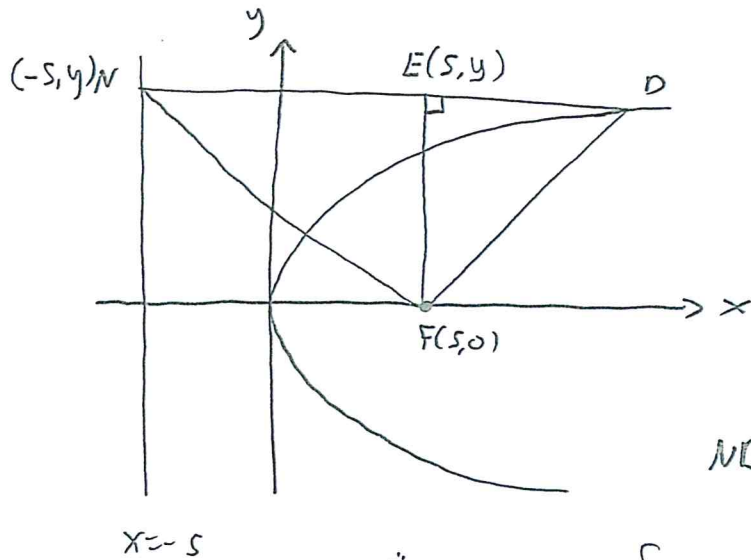
לפי משוואת הפונקציה $y^2 = 20x$ $\rightarrow$ $k = -5$





(2) למשל שיהיה נקודה F במישור $DF=DN$

כ' $NF=DF$



במצב זה אנך FE לבס ND

הוא גם תיכון - תיכון הוא זוויה 90° ב Δ ש

$$EN = ED$$

$$x_E - x_N = x_D - x_E$$

$$5 + 5 = x_D - 5$$

$$x_D = 15$$

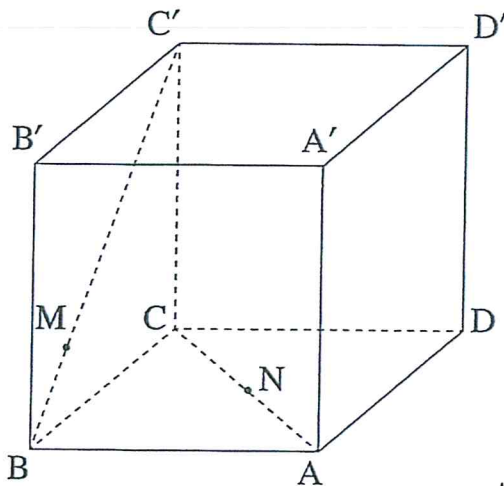
הצבה במשוואת הפרבולה $y^2 = 20x$

$$y^2 = 20 \cdot 15 \Rightarrow y = \pm 10\sqrt{3}$$

$$D(15, 10\sqrt{3})$$

הנק' D נמצאת בהיפוך הימני:





2. נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$.

נסמן: $\vec{CC'} = \underline{w}$, $\vec{CD} = \underline{v}$, $\vec{CB} = \underline{u}$.

נתון: $\vec{BM} = t \vec{BC'}$, $\vec{AN} = s \vec{AC}$.

א. מצא את היחס $\frac{s}{t}$ שעבורו MN מקביל

למישור $AA'B'B$ ($t \neq 0$).

נתון: $t = \frac{1}{4}$, $s = \frac{1}{2}$.

ב. חשב את הזווית שבין MN ובין המישור ABCD.

ג. מהו המצב ההדדי של הישרים AB ו-MN? נמק.

$$\vec{BM} = t(-\underline{u} + \underline{w})$$

כ נגזרים:

$$\vec{AN} = s(-\underline{u} - \underline{v})$$

$$\vec{MN} = \vec{MB} + \underline{v} + \vec{AN} = t\underline{u} - t\underline{w} + \underline{v} - s\underline{u} - s\underline{v} =$$

$$\vec{MN} = (t-s)\underline{u} + (1-s)\underline{v} - t\underline{w}$$

כדי שהוקטור $\vec{MN}$ יהיה מקביל למישור $AA'B'B$

נניח לאפס את המקדם של הווקטור $\underline{u}$

וכן $\vec{MN}$ יהיה קולונינרי ל- $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ בלבד:

$$t-s=0 \rightarrow t=s \rightarrow \boxed{\frac{s}{t} = 1}$$





ק נציב את הקוביה במערכת צירים כך שהדוולר C נמצא במישור xy והקוביה CC' - CD CB ע"פ צירי המישור:

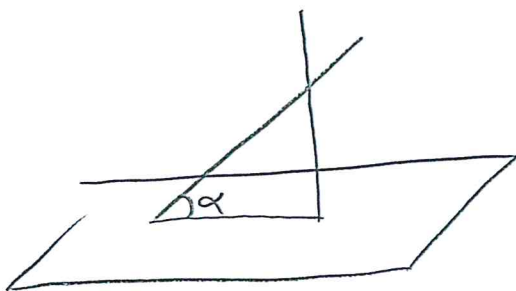
$$\underline{u} = (a, 0, 0) \quad \underline{v} = (0, a, 0) \quad \underline{w} = (0, 0, a)$$

ההצבה היא במישור xy : MN (בדיוק $t = \frac{1}{4}$, $s = \frac{1}{2}$)

$$N(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, 0)$$

$$MN: (\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, 0) + k(-\frac{1}{4}a, \frac{1}{2}a, -\frac{1}{4}a)$$

$$(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, 0) + k(-1, 2, -1)$$



הכיוון בין ישר ומישור α

שוק לצוות שכן היא לא

היא על המישור.

לפי משפט הנורמל הווקטור הנ"ל למישור יהיו הווקטור $\vec{n}$ ולכן $(0, 0, 1)$ נ"ל למישור:

$$\sin \alpha = \frac{|(0, 0, 1) \cdot (-1, 2, -1)|}{|(0, 0, 1)| \cdot |(-1, 2, -1)|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \boxed{\alpha = 24.09^\circ}$$





ל נקרא את ההצגה האלגורית של משוואת הישר AB :

$$AB: (a, 0, 0) + p(0, 1, 0)$$

ונקרא את המרחב ההדדי בין הישר AB ל- MM
ספרי פיתון מעגל המשוואות שלהם:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}a - k \\ p = \frac{1}{2}a + 2k \\ 0 = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}a \\ p = \frac{1}{2}a \end{cases} \rightarrow a = 0$$

$$0 = -k \rightarrow k = 0$$

לכן מעגל המשוואות אינם פתורים וקטגוריית הכיוון
באגף השני, לכן הישרים מקבילים

נאמנה שיאומטרי - הנדסאות A, B, M ו- N אינן
באותו המישור ולכן המרחב ההדדי
ביחיד האפשרי הוא שהישרים
מקבילים.



3. במעגל שמרכזו בראשית הצירים במישור גאוס חסום משולש שווה צלעות ABC. הקדקוד A מתאים למספר המרוכב $z_1 = a - \sqrt{3} \cdot a \cdot i$ ($a > 0$) הוא פרמטר ממשי). נתון: הקדקוד B נמצא ברביע הראשון.
- א. הבע באמצעות a את המספרים המרוכבים z_2 ו- z_3 המתאימים לקדקודים B ו- C בהתאמה.
- נתון: $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$.
- ב. מצא את a .
- ג. המספר z_1^{6n+5} מתאים לנקודה P במישור גאוס. n הוא מספר שלם.
- הנקודה O היא ראשית הצירים. הראה שהנקודה B נמצאת על הקרן OP.





5

$$A \rightarrow z_1 = a - \sqrt{3}ai, \quad a > 0$$

a $\sqrt{3}a$

$$B \rightarrow \text{כנף } I \text{ ה}$$

$\triangle ABC$
 $\parallel$
 $\rightarrow \sqrt{3}$

1k

$$z_1 = a - \sqrt{3}ai$$

$$r = \sqrt{a^2 + (\sqrt{3}a)^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$$

$$\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}a}{a} = -\sqrt{3}$$

$$\theta = -60 + 180^\circ$$

$$\theta = 300^\circ \quad (\text{כנף } IV \text{ ה } A)$$

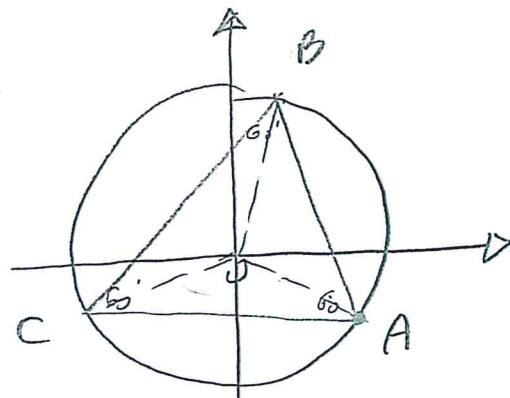
$$\underline{A} \quad \boxed{z_1 = 2a \operatorname{cis} 300^\circ}$$

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$\angle COA = \angle AOB = \angle BOC = 120^\circ$$

$$r_A = r_B = r_C = 2a$$





$$\theta_c = -60^\circ - 120^\circ = -180^\circ = 180^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$C: \boxed{z_3 = 2a \operatorname{cis} 180^\circ} \rightarrow z_3 = -2a$$

$$\theta_B = 180 - 120 = 60^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$B: \boxed{z_2 = 2a \operatorname{cis} 60^\circ} \rightarrow z_2 = a + \sqrt{3}a$$

$$z_3 = \frac{z_1^3}{4} \quad \text{נניח}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{7} \quad z_1^3 &= (2a \operatorname{cis} 300^\circ)^3 = 8a^3 \operatorname{cis} (900^\circ) = \\ &= 8a^3 \operatorname{cis} (900^\circ - 2 \cdot 360^\circ) = 8a^3 \operatorname{cis} 180^\circ \end{aligned}$$

$$2a \operatorname{cis} 180^\circ = \frac{8a^3 \operatorname{cis} 180^\circ}{4} \quad / : \operatorname{cis} 180^\circ$$

$$2a = 2a^3 \quad / : 2$$

$$a - a^3 = 0$$





$$a(1 - a^2) = 0$$

$$\downarrow$$

$$a \neq 0$$

$$a > 0$$

$$\rightarrow$$

$$1 - a^2 = 0$$

$$a^2 = 1$$

$$\boxed{a = 1}$$

$$a \neq -1$$

$$a > 0$$

Ⓒ $P: z_1^{6n+5}$ של n

$$(2 \text{ cis } 300) ^{6n+5} = 2^{6n+5} \cdot (\text{cis } 300)^{6n} \cdot (\text{cis } 300)^5 =$$

$$= 2^{6n+5} \cdot (\text{cis } 1800^\circ)^n \cdot \text{cis } (1500^\circ) =$$

$$= 2^{6n+5} \cdot (\text{cis } 360 \cdot 5)^n \cdot \text{cis } (360 \cdot 4 + 60^\circ)$$

$$= 2^{6n+5} \cdot 1^n \cdot \text{cis } 60^\circ$$

$$= 2^{6n+5} \text{ cis } 60^\circ$$

B: $z_2 = 2 \text{ cis } 60^\circ \Rightarrow$ OP קיין על ציר



4. נתונה הפונקציה $g(x) = 2x^2 + c$. c הוא פרמטר.
 הפונקציה $f(x)$ מוגדרת כך: $f(x) = e^{g(x)}$.
 הגרפים של פונקציות הנגזרת, $f'(x)$ ו- $g'(x)$, נחתכים בנקודה ששיעור ה- x שלה הוא 2.
- א. מצא את c .
 ב. (1) הוכח ש- $f'(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.
 (2) מצא את שיעורי כל הנקודות שבהן הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו- $g'(x)$ חותכים זה את זה.
 (3) עבור אילו ערכי x $f'(x) > g'(x)$?
 (4) סרטט סקיצה של הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו- $g'(x)$ באותה מערכת צירים.
- ג. נתון: $M(2, 8)$, $N(-2, -8)$.
 MN הוא אלכסון של מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים.
 הראה שגרף הפונקציה $f'(x)$ מחלק את המלבן לשני חלקים שווים בשטחם.





$$\textcircled{4} \quad g(x) = 2x^2 + C$$

$$\text{נכון: } f'(2) = g'(2)$$

$$f(x) = e^{g(x)}$$

$$\textcircled{10} \quad g'(x) = 4x$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$$

$$g'(2) = 4 \cdot 2 = 8$$

$$f'(2) = g'(2) \cdot e^{g(2)}$$

$$g(2) = 2 \cdot 2^2 + C = 8 + C$$

$$f'(2) = 8 \cdot e^{8+C}$$

$$8 \cdot e^{8+C} = 8$$

נשאל האם זה נכון?

$$e^{8+C} = 1$$

$$8 + C = 0$$

$$\boxed{C = -8}$$





$$f(x) = e^{2x^2 - 8}$$

$$g(x) = 2x^2 - 8$$

(2)

נמצא $f'(x)$

(1)

$$f'(x) = 4x e^{2x^2 - 8}$$

$$f'(-x) = 4 \cdot (-x) \cdot e^{2(-x)^2 - 8} = -4x e^{2x^2 - 8}$$

$$f'(-x) = -f'(x)$$

 $\Downarrow$

$$\text{נמצא } f(x)$$

$$\text{נק' מ'ריון } f'(x) \text{ ו- } f(x) \quad (2)$$

$$f'(x) = 4x e^{2x^2 - 8}$$

$$g'(x) = 4x$$

$$4x = 4x e^{2x^2 - 8}$$

$$4x(1 - e^{2x^2 - 8}) = 0$$

$$\swarrow$$

$$x = 0$$

$$\rightarrow 1 - e^{2x^2 - 8} = 0$$

$$e^{2x^2 - 8} = 1$$

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$





$$g'(0) = 4 \cdot 0 = 0 \quad (0, 0)$$

$$g'(2) = 4 \cdot 2 = 8 \quad (2, 8)$$

$$g'(-2) = 4(-2) = -8 \quad (-2, -8)$$

$$(3) \quad f'(x) > g'(x) ?$$

$$f'(x) - g'(x) > 0$$

$$4x e^{2x^2-8} - 4x > 0$$

$$4x(e^{2x^2-8} - 1) > 0$$

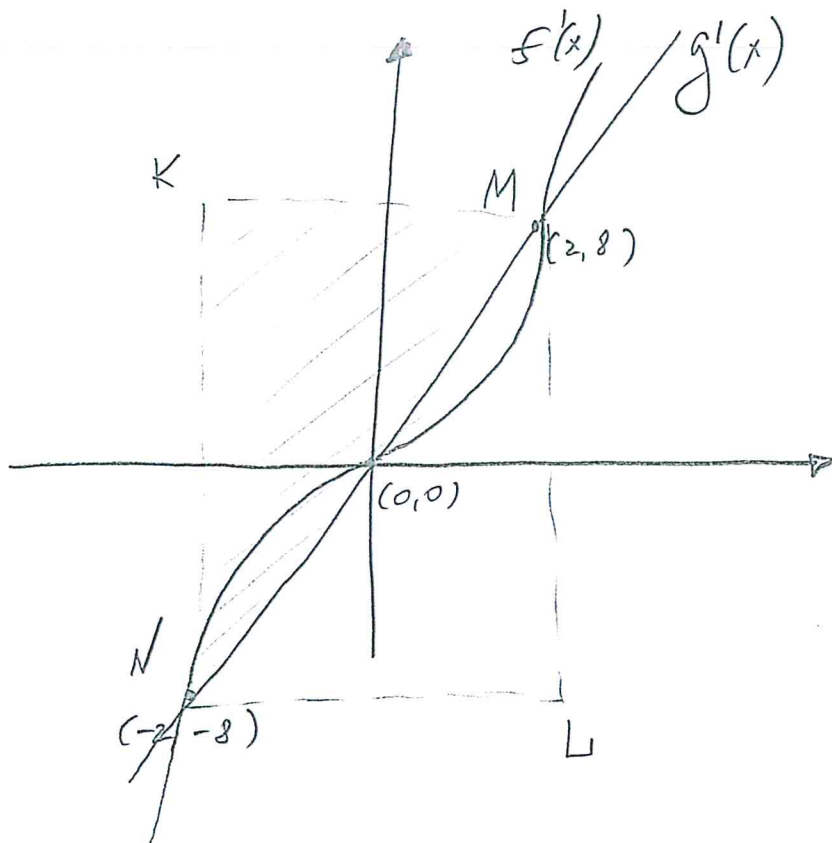
	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
x	(-3)	(-1)	(1)	(3)
$f' - g'$	$-$	$+$	$-$	$+$

$-2 < x < 0 \quad \text{ו} \quad x > 2$





(4)



Ⓒ $M(2,8) \quad N(-2,8)$

$\int_{-2}^2 f'(x) dx = f(2) - f(-2)$
 $\quad \quad \quad KM \parallel X \quad KN \parallel Y \quad NL \parallel X \quad ML \parallel Y$
 $\quad \quad \quad \Downarrow$
 $\quad \quad \quad y=8 \quad x=-2 \quad y=-8 \quad x=2$

$$S_1 = S_{MKNL}$$

$$S_1 = \int_{-2}^2 (8 - f'(x)) dx = 8x - f(x) \Big|_{-2}^2 =$$

$$= 2(8 \cdot 2 - f(2)) - (-2)(8 \cdot (-2) - f(-2)) =$$

$$= 16 - e^{2 \cdot 2^2 - 8} + 16 + e^{2 \cdot (-2)^2 - 8} = 32$$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



$$S_{\int_1^N} = (2 - (-2))(8 - (-8)) = 64$$

↓

$$S_2 = S_{NML} = S_{\int_1^N} - S_1 = 64 - 32$$

$$S_2 = 32$$

↓

$$S_1 = S_2$$



5. נתונה הפונקציה $f(x) = x + m \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)$. m הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון.

ב. (1) מצא את תחום הערכים של m .

(2) הבע את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ באמצעות m , וקבע את סוגה.

ג. הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ושיעוריה אינם תלויים ב- m .

(1) מצא את שיעורי הנקודה P .

(2) מצא את הערך של m שעבורו הנקודה P היא נקודת מינימום של הפונקציה $f(x)$.

הצב את m שמצאת בתת-סעיף ג(2) וענה על הסעיפים ד-ה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{f(x) - x}{x}$. חשב את $\int_1^e g(x) dx$.





5

$$f(x) = x + m \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

k

תחום ההגדרה

$$\frac{1}{x} > 0$$

$$\boxed{x > 0}$$

2

(1)

נמוך: $f'(x) = e' \cdot x' \cdot \ln' \cdot x'$

$$f'(x) = 1 + m \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = 1 - \frac{m}{x}$$

$$1 - \frac{m}{x} = 0 \quad | \cdot x > 0$$

$$x - m = 0$$

$$x = m$$

כז' שלמה

היה פתרון, m צל'ן
אלו ש בתחום ההגדרה

$$\boxed{m > 0} \quad x > 0 \quad \text{ולכן}$$

$$(f''(x) = \frac{m}{x^2} \text{ ולכן ב } x = m \text{ נקודה קיצונית})$$



(2)

$$f(m) = m + m \cdot \ln \frac{1}{m} = m + m \cdot \ln m^{-1}$$

$$f(m) = m - m \ln m = m(1 - \ln m)$$

$$f''(x) = \frac{m}{x^2}$$

$$f''(m) = \frac{m}{m^2} = \frac{1}{m} > 0$$

$$(m, m(1 - b_m)) \quad \text{D.W.'N}$$

Q

ρ 'nile pl

$m \approx \rho^{1/3} \rho^{1/6}$

$$m \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad sk$$

$$m \neq 0 \quad \ln \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{1}{x} = e^0$$

$$x = 1$$

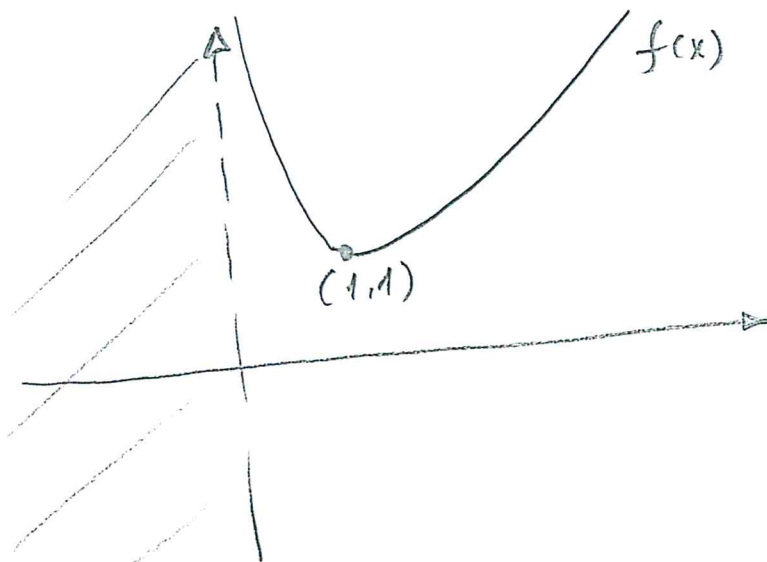
$$f(1) = 1 + 0 = 1$$

$$P(1,1)$$

(2) $P(1,1)$ מינימום (2) סעיף ב' נק' מינימום היא
 $(m, m(1-\ln m))$
 ב'3 שנק' P תכלה נק' מינימום
 ב'3 נק' $m=1$

$$m=1$$

(3) $f(x) = x + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$



(ה) $g(x) = \frac{f(x) - x}{x} = \frac{x + \ln\left(\frac{1}{x}\right) - x}{x} = -\frac{\ln x}{x}$

$$\int_1^e g(x) dx = \int_1^e \left(-\frac{\ln x}{x}\right) dx$$





$$u = \ln x$$

נכנס
ההצבה

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$dx = x du$$

$$\int_1^e \left(-\frac{\ln x}{x} \right) dx = \int_1^e -\frac{u}{x} \cdot x du =$$

$$= \int_1^e -u du = -\frac{u^2}{2} = -\frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e =$$

$$= e \left(-\frac{\ln^2 e}{2} \right) - 1 \left(-\frac{\ln^2 1}{2} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + 0 = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

