

פתרון הבחינה

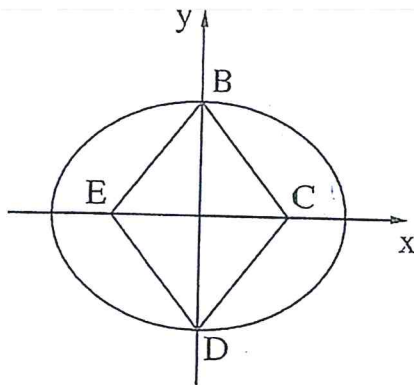
במתמטיקה

קיץ תשע"ז, 2017, שאלונים: 317, 35807
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





1. נתון מעוין BCDE.

הקדקודים B ו-D נמצאים על ציר ה-y,

והקדקודים C ו-E נמצאים על ציר ה-x.

נתון: אורך צלע המעוין הוא 5,

אורך גובהו הוא 4.8,

ואורך האלכסון BD גדול מאורך האלכסון CE.

דרך הקדקודים B ו-D עוברת אליפסה קנונית (ראה ציור), שמוקדה הם הנקודות C ו-E.

א. (1) מצא את השיעורים של קדקודי המעוין.

(2) מצא את משוואת האליפסה.

פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$ חותכת את האליפסה ברביע הראשון בנקודה M.

נתון: שיעור ה-y של M הוא $\sqrt{15}$.

ב. הוכח שמוקד הפרבולה נמצא בנקודה C.

ג. דרך הנקודה E מעבירים ישר המקביל לציר ה-y.

P היא נקודה על הפרבולה שמרחקה מהישר הזה הוא k.

מצא את היחס $\frac{PC}{k}$. הסבר.

א (1) נסמל על סטל במסלול בשני זוויות: זווית אחת 0° והזווית האחרת

האלכסונים, ונסמל ביניהם. נסמל $B(0,5), D(0,-5)$

$C(5,0), E(-5,0)$

$$\frac{2b \cdot 2c}{2} = 5 \cdot 4 \cdot 8$$

$$(1) b \cdot c = 12$$



ע"י משה פייטוויץ' וד"ר יואל גבע

(2) $b^2 + c^2 = 25$ נקבל:

מכאן, שני משוואות עם שני נעלמים:

(1) $\rightarrow$ (2) $\frac{144}{c^2} + c^2 = 25 \rightarrow \cancel{c^2 = 16} \quad c^2 = 9 \rightarrow c = 3$
 $(c < 5)$ $\downarrow$
 $b^2 = 16 \rightarrow b = 4$

לסיכום:

$B(0, 4) \quad C(3, 0)$

$D(0, -4) \quad E(-3, 0)$

(2) מכיוון שהנקודה C היא מוקד האליפסה והמרכז האליפסה

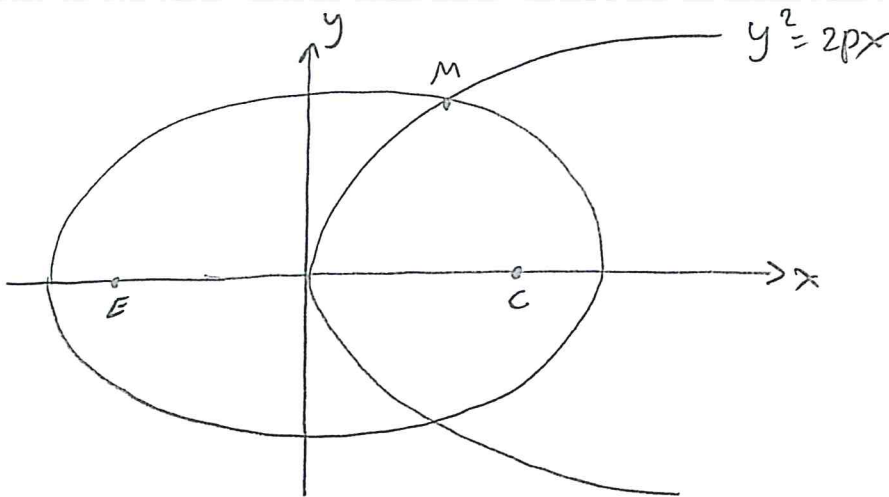
מתקיים: $a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 9 = 25$

הצבה במשוואה האליפטית:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$



21



נמצא את הנקודה M ע"י הצבה בשוואת האליפסה:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{15}{16} = 1 \rightarrow x = \frac{5}{4} \rightarrow M\left(\frac{5}{4}, \sqrt{15}\right)$$

נציב ע"י 15 בשוואת הפרבולה ונקבל את פתרון הפרבולה P:

$$15 = 2p \cdot \frac{5}{4} \rightarrow p = 6$$

$$F = \frac{p}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow (3, 0)$$

מוקד הפרבולה מוקד P:

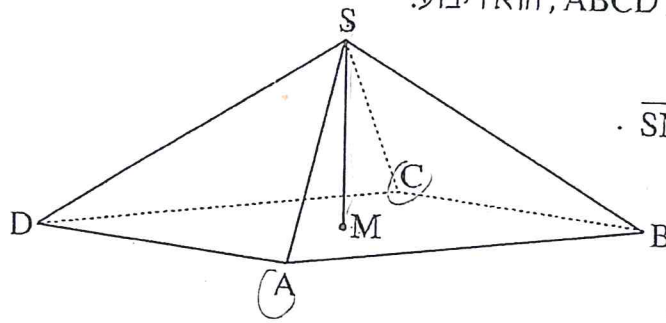
נקודת C היא הנקודה שמצאנו בסעיף א'.

הנקודה C(3,0) בהוצאת הפרבולה, עכשיו במעגל עוזב את E(-3,0) מהצורה הפרבולה, יש זיגור הנקודה E המקבלת ע"י ה-y הוא המעגל של הפרבולה. והמעגל הפרבולה, מהחלק של C נקודת ע"י מהמוקד, שום לאיחוד מהמעגל, עכ"ל: $PC = k$

$$\boxed{\frac{PC}{k} = 1}$$



2. נתונה פירמידה ישרה SABCD, שבסיסה, ABCD, הוא ריבוע.



$$\vec{SM} = \frac{1}{2}\vec{SA} + \frac{1}{2}\vec{SC} \quad \text{M היא נקודה כך ש-}$$

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AC} \quad \text{א. (1) הוכח:}$$

$$\vec{SM} \text{ הוכח ש- } \vec{SM} \text{ מאונך ל- } \vec{AC} \quad \text{(2)}$$

(3) נמק מדוע SM הוא גובה בפירמידה.

נתון: $A(\sqrt{3}, 1, 0)$, $C(-\sqrt{3}, -1, 0)$, הנקודות B ו-D נמצאות במישור $z = 0$ ונפח הפירמידה SABCD הוא 16.

ב. (1) מצא את שיעורי הנקודה M.

(2) מצא את שיעורי הקדקוד S (מצא את שתי האפשרויות).

נסמן את הנקודות שמצאת בתת-סעיף ב(2) ב- S_1 ו- S_2 .

ג. (1) מצא את משוואת המישור AS_1S_2 .

(2) האם נקודה C נמצאת על המישור AS_1S_2 ? נמק.

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= \vec{AS} + \vec{SM} = -\vec{SA} + \frac{1}{2}\vec{SA} + \frac{1}{2}\vec{SC} = \frac{1}{2}(\vec{SC} - \vec{SA}) = \quad \text{א (1)} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}\vec{AC}}} \end{aligned}$$

$$(2) \text{ הפיתויב נתונב פיתויב שיה ולכן } SA = SC$$

בסעיף (1) הוכחנו כי $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ לכן M איננו AC

כן ב- $\triangle SAC$ שיש SM הוא תיכון לבסיס
ותיכון הוא זווית לבסיס ב- $\triangle$ שיש ולכן $\vec{SM} \perp \vec{AC}$





(3) בסוף (1) הראנו כי M אמצע אוקטון AC בבסיס
 הפיגורה הישרי, לכן M אמצע המשולש החוסם את
 הבסיס $ABCD$.

בפיגורה ישרי, יש להדגיד את אמצע המשולש החוסם את
 הבסיס הוא האוקטון בפיגורה ישרי. כגיל.

(1) $\cong$ M -אמצע הדיאג AC , לכן:

$$X_M = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2} = 0, \quad Y_M = \frac{1-1}{2} = 0, \quad Z_M = 0 \rightarrow \boxed{M(0,0,0)}$$

(2) נמצא תחילה את שטח הבסיס:

$$\vec{AC} = (2\sqrt{3}, 2, 0) \rightarrow |AC| = \sqrt{12+4} = 4$$

$$S_{ABCD} = \frac{|AC|^2}{2} = 8$$

$$V = \frac{SM \cdot S_{ABCD}}{3} = 16 \rightarrow SM = 6$$

בסיס הפיגורה בלשוני $Z=0$ ו- SM ניצב למישור

לוקחים 6 יחידות, הנקודה M היא הייחסי ולכן

$$\boxed{S(0,0,6) \text{ או } S(0,0,-6)}$$





ל (1) נתון מישור במישור, נמצא מרחק מה היקטור

(a, b, c) הנמצא במישור, נמצא המרחק מה היקטור

1- $\vec{MA}$ הנמצא במישור

מ - אמצע קטע $S_1 S_2$ וכן ש"מ במישור :

$$\vec{MS}_1 = (0, 0, 6) \quad \vec{AM} = (\sqrt{3}, 1, 0)$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 6 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a = -6 \\ -b = -6\sqrt{3} \\ c = 0 \end{matrix} \rightarrow (1, \sqrt{3}, 0)$$

$$x - \sqrt{3}y + d = 0$$

המשוואה הנמצאת מ ש"מ במישור, נמצא $d=0$

$$\boxed{x - \sqrt{3}y = 0}$$

(2) הנקודה c נמצאת על המישור. היא מקיימת

אם נשוואה המישור.



3. א. מצא את המספרים המרוכבים z המקיימים $z^3 = -1$.

נסמן את פתרונות המשוואה מסעיף א ב- z_1, z_2, z_3 .

נתון כי z_2 הוא ממשי.

ב. (1) הראה ש- z_1, z_2, z_3 הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית.

(2) z_1, z_2, z_3 הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית z_n .

מצא את z_5 , האיבר החמישי בסדרה.

ג. (1) z_{13}, z_{14}, z_{15} (האיברים ה-13, ה-14 וה-15 בסדרה z_n שמצאת בסעיף ב)

מיוצגים על ידי הנקודות A, B, C במישור גאוס, בהתאמה.

חשב את שטח המשולש ABC .

(2) L, M, K הן שלוש נקודות במישור גאוס המייצגות שלושה איברים עוקבים

בסדרה z_n .

הסבר מדוע המשולש KLM חופף למשולש שאת שטחו מצאת בתת-סעיף ג(1).

$$z^3 = -1$$

$$z^3 = \text{cis } 180^\circ$$

$$z_k = \text{cis } \frac{180^\circ \pm 360^\circ k}{3} = \text{cis } (60^\circ \pm 120^\circ k)$$

$$z_1 = \text{cis } 60^\circ$$

$$z_2 = \text{cis } 180^\circ$$

$$z_3 = \text{cis } 300^\circ$$



$$q = \frac{z_3}{z_2} = \frac{z_2}{z_1} = \text{cis } 120^\circ \quad (1) \quad \underline{\underline{=}}$$

$$z_5 = z_1 q^4 = \text{cis } 60^\circ \cdot (\text{cis } 120^\circ)^4 = \quad (2)$$

$$= \text{cis } 60^\circ \cdot \text{cis } 480^\circ = \text{cis } 60^\circ \cdot \text{cis } 120^\circ =$$

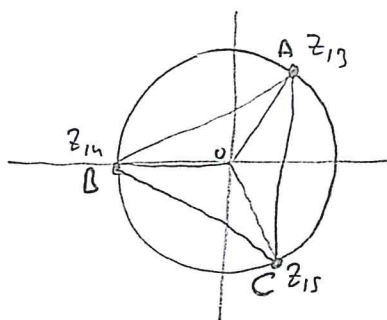
$$= \text{cis } (60^\circ + 120^\circ) = \text{cis } 180^\circ = \underline{\underline{-1}}$$

$$q^3 = (\text{cis } 120^\circ)^3 = \text{cis } 360^\circ = 1 \quad (1) \quad \underline{\underline{=}} \quad \text{נשים } \delta > \text{כ} \cdot$$

$$z_{13} = z_1 q^{12} = z_1 (q^3)^4 = z_1 \cdot 1 = z_1 = \text{cis } 60^\circ$$

$$z_{14} = z_{13} \cdot q = \text{cis } 60^\circ \cdot \text{cis } 120^\circ = \text{cis } 180^\circ$$

$$z_{14} = z_{13} \cdot q = \text{cis } 180^\circ \cdot \text{cis } 120^\circ = \text{cis } 300^\circ = \text{cis } (-60^\circ)$$



$$S_{\Delta} = 3 \cdot S_{\Delta OAB} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin 120^\circ$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}}{4}}}$$

(2) מכיוון ש $q^3 = 1$ (הראנו בסעיף 1-2), כל 3 איברים בסדרה

הם שלוש האיברים הראשונים בס. ולכן הנקודות K, L, M
 הן נקודות A, B, C והכאן ה-6 הם חופפים.





4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^{x^2} - 2x}{e^{x^2}}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.
 (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 (4) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
 (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

היעזר בתשובותיך על סעיף א וענה על סעיף ב.

- ב. (1) הסבר מדוע הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x .
 (2) מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, ומה סוגן? נמק את תשובתך.
 (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
 (4) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
 נמק את תשובתך.
 (5) הוסף לסרטוט של גרף הפונקציה $f(x)$ סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.





(3) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה ע"י הצבה בקווים הקריצון בטבלה הבאה:

x		$-\frac{1}{\sqrt{e}}$		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	
$f'(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$x < -\frac{1}{\sqrt{e}}, x > \frac{1}{\sqrt{e}}$: עלייה $-\frac{1}{\sqrt{e}} < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$: ירידה

(4) הפונקציה מוגדרת על x , לכן אין לה אסימפטוטה אנכית. נמצא את האסימפטוטה האופקית:

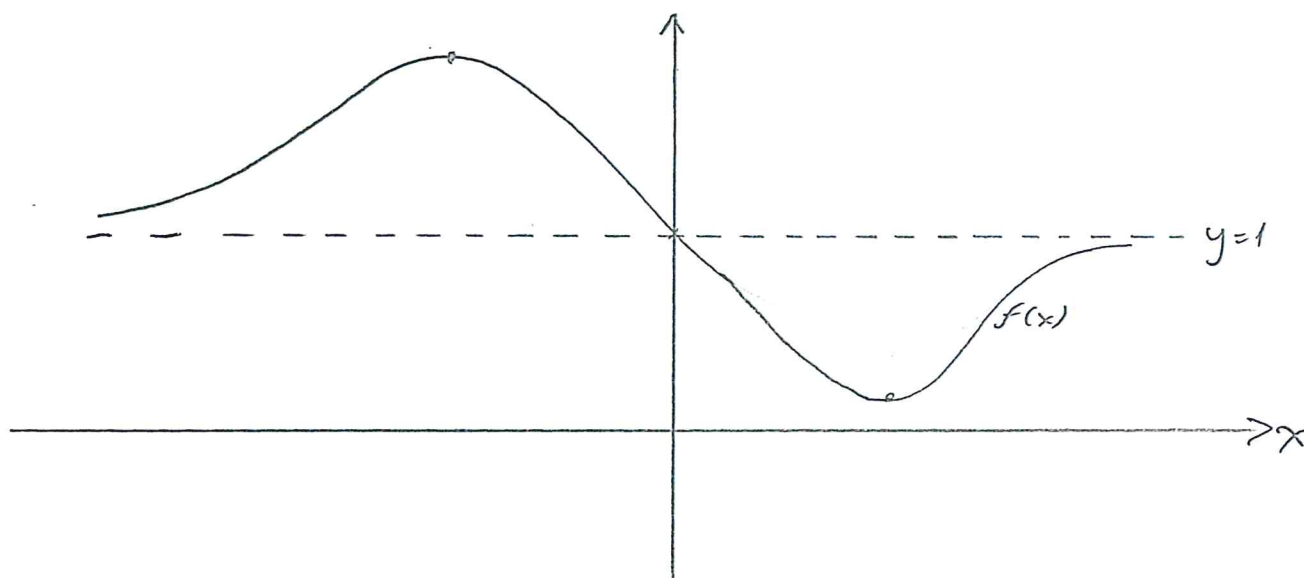
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2x}{e^{x^2}} \right) = 1 - 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2x}{e^{x^2}} \right) = 1 + 0 = 1$$

$y = 1$



(5)



2 (1) נמצאים $f(x) \neq 0$ כל x (ניתן להוטרב גט-טול) ולכן אין ערך של x בהאנסט של כלמכס של $g(x)$ ומכאן מוגדר כל x .

(2) תנאי הכרחי לקיצון פנימי: $g'(x) = 0$

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \rightarrow g'(x) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} = 0 \rightarrow f'(x) = 0$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad : \quad \text{מסלול 2-א}$$



כאשר לפונקציה $f(x)$ יש נקודה מקסימום לפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

יש נקודה מינימום לפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 7.031\right) \max$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0.538\right) \min$$

(3) נגזרת של תחומי העלייה ויציאה של הפונקציה ע"י הצבה
נקודות הקיצון בלפני הבאים :

x		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$g'(x)$	$\rightarrow$		$\rightarrow$		$\rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{תחומי עלייה}$$

$$x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad x > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{תחומי ירידה}$$





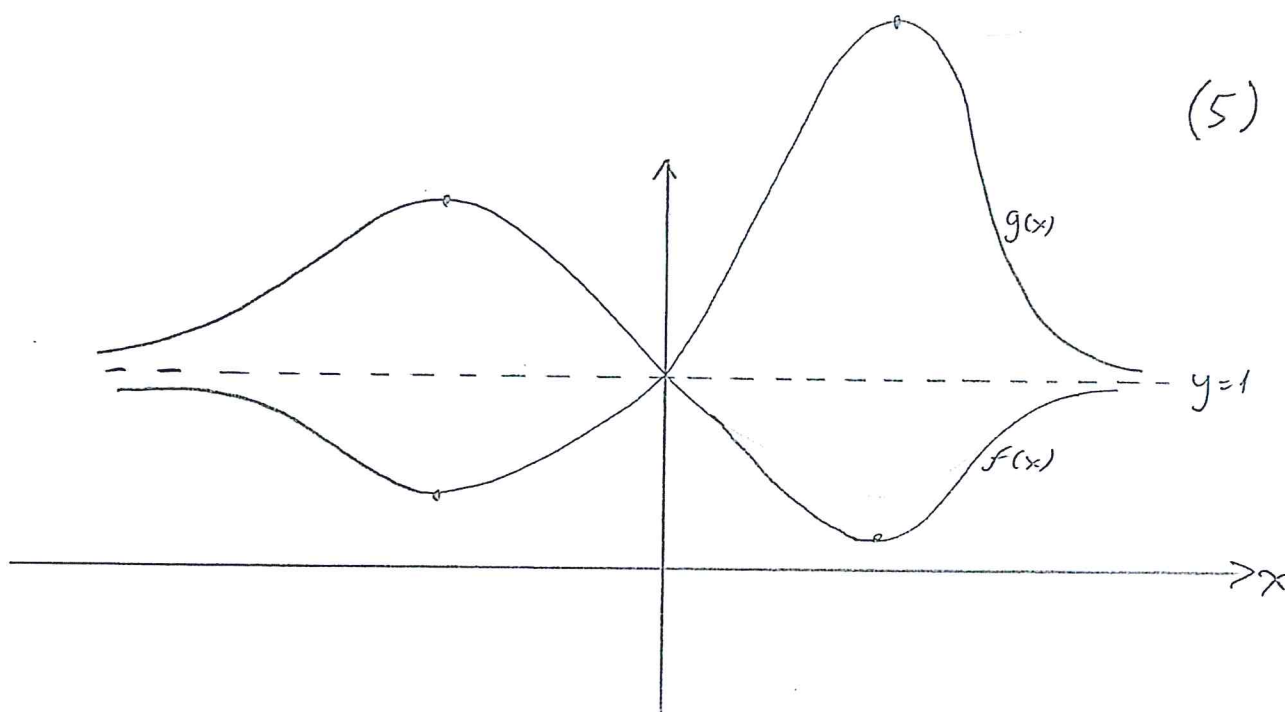
(4) $g(x)$ מוגדר על x , לבן אין לב אינסופיות אנכי

נמצא את האינטגרל באופן קצר:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{f(x)} \right) = \frac{1}{f(\infty)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \right) = \frac{1}{f(-\infty)} = \frac{1}{1} = 1$$





5. נתונה הפונקציה $h(x) = \frac{x+3}{x}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של $h(x)$.

ב. מצא את התחום שבו $h(x) > 0$.

בתחום שבו $h(x) > 0$ נתונה הפונקציה $f(x)$ המקיימת: $f'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$.

נתון שגרף הפונקציה $f(x)$ עובר דרך הנקודה $(3, \ln 2)$,

וידוע שלפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית אחת.

ג. מצא את הפונקציה $f(x)$.

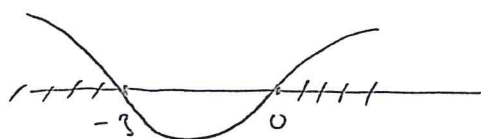
ד. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

⌋
תחום ההגדרה $x \neq 0$

$$\frac{x+3}{x} > 0 \quad \text{⌋}$$



→

$$x < -3, x > 0$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{h'(x)}{h(x)} dx = \ln(h(x)) + C. \quad \text{⌋}$$

נמצא את קבוע האינטגרל C ע"י הצבת הנקודה $(3, \ln 2)$





$$\ln(h(3)) + C = \ln 2$$

$$\ln 2 + C = \ln 2 \rightarrow C = 0$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x}\right)$$

2 נמצאים אסימפטוטים אנכיים:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{x+3}{x} \right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \left(\ln \frac{x+3}{x} \right) = -\infty$$

$$\begin{array}{c} x=0 \\ x=-3 \end{array}$$

נמצאים אסימפטוט אופקי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{x+3}{x} \right) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln \frac{x+3}{x} \right) = \ln 1 = 0$$

$$\rightarrow y=0$$

3 נמצאים נקודות קיצון, אלו נקודות הפונקציה:

$$f'(x) = \frac{\frac{1 \cdot x - (x+3) \cdot 1}{x^2}}{\frac{x+3}{x}} = \frac{-3}{x^2} \cdot \frac{x}{x+3} = \frac{-3}{x(x+3)}$$

הפונקציה אין נקודות קיצון, $f'(x) \neq 0$.





נבדוק את סימן הנגזרת בתחומי ההגדרה:

$$x < -3: f'(-4) = \frac{-3}{(-4)(-1)} < 0 \rightarrow \text{יחידה}$$

$$x > 0: f'(1) = \frac{-3}{1 \cdot 4} < 0 \rightarrow \text{יחידה}$$

בפונקציה יורדת על א בתחום ההגדרה:

תחום יחידה: $x < -3$, $x > 0$

תחום עליה: אין

