

## פתרון הבחינה

# במתמטיקה

קיץ תשע"ז, 2017, שאלונים: 315, 35805  
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.





1. נתונה סדרה המקיימת:  $a_1 = 0$ ,  $a_{n+1} = a_n + 2n + 5$  לכל  $n$  טבעי.
- א. חשב את האיברים  $a_2$  ו- $a_3$ .
- ב. מגדירים סדרה חדשה:  $b_n = a_{n+1} - a_n$ . הבע את  $b_n$  באמצעות  $n$ .
- ג. הוכח שהסדרה  $b_n$  היא סדרה חשבונית, ומצא את ההפרש שלה.
- ד. נתון כי סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה  $b_n$  שווה ל- $a_5$ . מצא את  $n$ .

$$a_2 = a_1 + 2 \cdot 1 + 5 \quad \begin{matrix} n=1 & \geq 3 \\ \text{בכל הנסיעה} & \end{matrix} \quad \underline{\underline{16}}$$

$$a_2 = 0 + 7 = 7$$

$$\boxed{a_2 = 7}$$

$$a_3 = a_2 + 2 \cdot 2 + 5 \quad \begin{matrix} n=2 & \geq 3 \\ \text{בכל הנסיעה} & \end{matrix}$$

$$a_3 = 7 + 9 = 16$$

$$\boxed{a_3 = 16}$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

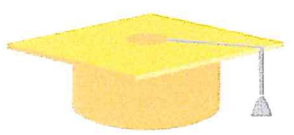
$$a_{n+1} = a_n + 2n + 5 \quad \begin{matrix} \text{רצוי} \\ \text{לפי הנתון} \\ \text{אם כן:} \end{matrix}$$

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 5 \quad \begin{matrix} \text{באמצעות} \end{matrix}$$

$$\boxed{b_n = 2n + 5}$$

למידע על פסיכומטרי  
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
 אל תתפשר עליה.



$$b_n = 2n + 5$$

$$b_{n+1} = 2(n+1) + 5$$

$$b_{n+1} = 2n + 2 + 5 = 2n + 7$$

$$b_{n+1} - b_n = 2n + 7 - (2n + 5) = 2$$

הפרש בין הסדרות הוא 2

$$d = 2$$

הפרש:

$$S_{b_n} = a_5$$

הוא 2

הוא 27, 40, 47, 54, 61, 68, 75

$$a_4 = a_3 + 2 \cdot 3 + 5 = 16 + 11 = 27$$

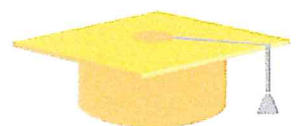
$$a_5 = a_4 + 2 \cdot 4 + 5 = 27 + 13 = 40$$

$$a_5 = 40$$

הוא 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, 51, 55, 59, 63, 67, 71, 75

$$b_1 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$$

$$b_1 = 7$$



$$S_{b_n} = \frac{n[2b_1 + (n-1)d]}{2}$$

$$S_{b_n} = a_5 = 40, d=2, b_1 = 7 \quad \text{ל3 >}$$

$$\frac{n[2 \cdot 7 + (n-1) \cdot 2]}{2} = 40 / 2$$

$$n[14 + 2n - 2] = 80$$

$$n[12 + 2n] = 80$$

$$12n + 2n^2 = 80$$

$$2n^2 + 12n - 80 = 0$$

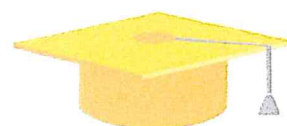
$$\cancel{n = -10}$$

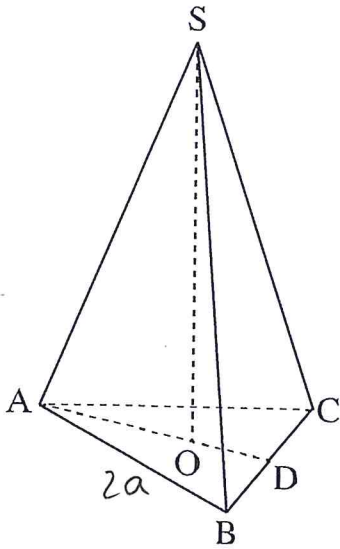
$$n = 4$$

אם האיבר הראשון בסדרה  
הוא שלילי אז תשובה

$$\boxed{n = 4}$$

פ > 0





טריגונומטריה במרחב

2. נתונה פירמידה משולשת ישרה SABC שבסיסה, משולש ABC, הוא שווה צלעות.

נתון:  $AB = 2a$ .

SO הוא גובה בפירמידה (ראה ציור).

AD הוא הגובה לצלע BC במשולש ABC.

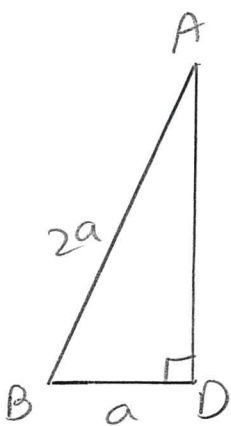
א. הבע באמצעות a את אורך AD.

ב. נתון כי נפח הפירמידה הוא  $\sqrt{3} \cdot a^3$ .

הבע באמצעות a את גובה הפירמידה SO.

ג. חשב את גודל הזווית שבין מקצוע צדדי ובין בסיס הפירמידה.

א. כיוון שהשולש ABC הוא שווה צלעות  
הגובה הצלע הוא תיכון  
אז  $BD = \frac{1}{2}BC = a$



לשרש במשולש הריבועים

ב -  $\Delta ADB$  :

$$AD^2 = AB^2 - BD^2$$

$$AD^2 = (2a)^2 - a^2 = 3a^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\boxed{AD = \sqrt{3}a}$$



$S = \frac{BC \cdot AD}{2}$  קב. שטח - הכנסים היסוד:

$S = \frac{2a \cdot \sqrt{3}a}{2} = \sqrt{3}a^2$

$V = \frac{S_{ABC} \cdot SO}{3}$

אזכור:

$\sqrt{3}a \cdot \sqrt{3}a^3 = \frac{\sqrt{3}a^2 \cdot SO}{3} \cdot 3$

$3\sqrt{3}a^3 = \sqrt{3}a^2 SO \quad | : \sqrt{3}a^2$

$3a = SO$

$3a$

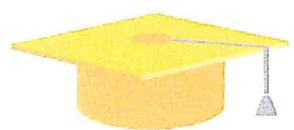
ע"כ היטל בין מקבילת צדדים לבסיס  $\triangle SAO$  הוא אנכי

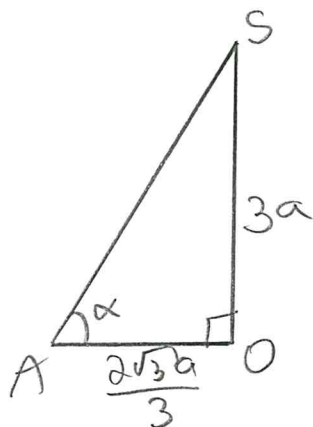
מש"כ:  $O$  נק' אמצע ספגל התריבוע

כ-  $\triangle ABC$  אזכור:

$AO = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}a$

$AO = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$





ΔSOA - ק - נתון :

בזווית כחולה  $\hat{=}$  כחולה :

$$SO = 3a$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3a}{\frac{2\sqrt{3}a}{3}}$$

ואכן :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3a \cdot 3}{2\sqrt{3}a} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\Downarrow$

$$\alpha = 68.95^\circ$$



3. נתונה הפונקציה  $f(x) = 2x + 4\cos x$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .
- א. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
  - ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
  - ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
  - ד. מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה  $f(x)$  העבירו שני אנכים לציר ה- $x$ . חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , ציר ה- $x$  ושני האנכים.

$$x = 0$$

$$k$$

$$f(0) = 2 \cdot 0 + 4 \cos 0 = 4$$

$$(0, 4)$$

הפונקציה היא קיצון

$$f'(x) = 2 - 4\sin x$$

$$2 - 4\sin x = 0$$

$$2 = 4\sin x$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$



במקרה הראשון:  $x = \frac{\pi}{6}$

$$y = 2 \cdot \frac{\pi}{6} + 4 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3} \approx 4.511$$

$$\left( \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3} \right)$$

במקרה השני:  $x = \frac{5\pi}{6}$

$$y = 2 \cdot \frac{5\pi}{6} + 4 \cos \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3} =$$

$$\approx 1.771$$

$$\left( \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3} \right)$$

חישוב סוג הקיצון

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
y'		+	-	+
y		↗	↘	↗

$$f'(\frac{\pi}{6}) > 0$$

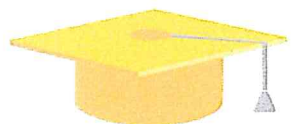
$$f'(\frac{\pi}{2}) < 0$$

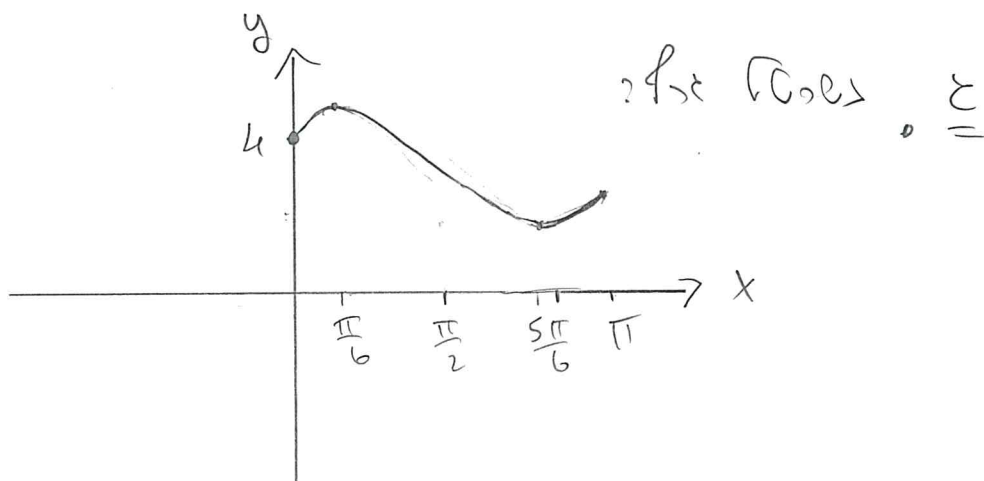
$$f'(\frac{11\pi}{12}) > 0$$

במקרה הראשון:  $f(0) = 4$  min

$$f(\pi) = 2\pi + 4 \cos \pi = 2\pi - 4 \approx 2.283 \text{ max}$$

$\min(0, 4)$	$\min(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3})$
$\max(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3})$	$\max(\pi, 2\pi - 4)$





$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2x + 4\cos x) dx = x^2 + 4\sin x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$

נחשב עתה

$$S = \left( \left( \frac{5\pi}{6} \right)^2 + 4\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) - \left( \left( \frac{\pi}{6} \right)^2 + 4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) =$$

$$= \frac{25\pi^2}{36} + \frac{4\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi^2}{36} - \frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{24\pi^2}{36} \approx 6.58$$



4. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{a}{e^{2x} - 10e^x}$ . הוא פרמטר שונה מאפס.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- (2) מצא את האסימפטוטה של הפונקציה  $f(x)$  המאונכת לציר ה- $x$ .
- נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $y$  היא  $(0, -\frac{1}{9})$ .
- ב. מצא את  $a$ .
- הצב בפונקציה  $f(x)$  את  $a$  שמצאת בסעיף ב וענה על הסעיפים ג-ד.
- ג. (1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבע את סוגה.
- (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .
- (3) האם לגרף הפונקציה  $f(x)$  יש נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ ? נמק.
- (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ד. מצא את התחום שבו  $f(x) < 0$  וגם  $f'(x) < 0$ .

א (1) תחום ההגדרה:

$$e^{2x} - 10e^x = 0$$

$$e^x(e^x - 10) = 0$$

$$e^x = 0 \quad e^x - 10 = 0$$

אין פתרון

$$e^x = 10$$

$$x = \ln 10$$

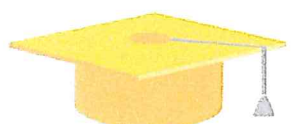
אכן, הוא קצב מאגרי בולט:

$$x \neq \ln 10$$

$$(x \neq 2.302)$$

(2) אסימפטוטה מאונכת לציר ה- $x$ :

$$x = \ln 10$$



נמצא נקודת קיצון של הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{e^{2x} - 10e^x}$  בנקודה  $(0, -\frac{1}{9})$  כאשר  $a$  הוא

$$-\frac{1}{9} = \frac{a}{e^{2 \cdot 0} - 10e^0}$$

$$-\frac{1}{9} = \frac{a}{-9} \quad | \cdot (-9)$$

$$\boxed{-1 = a}$$

נמצא נקודת קיצון של הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{e^{2x} - 10e^x}$  בנקודה  $(a, -\frac{1}{9})$  כאשר  $a$  הוא

נמצא נקודת קיצון של הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{e^{2x} - 10e^x}$  בנקודה  $(a, -\frac{1}{9})$  כאשר  $a$  הוא

$$f'(x) = \frac{-1(2e^{2x} - 10e^x)}{(e^{2x} - 10e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2e^{2x} + 10e^x}{(e^{2x} - 10e^x)^2}$$

$$\frac{-2e^{2x} + 10e^x}{(e^{2x} - 10e^x)^2} = 0$$

נמצא נקודת קיצון של הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{e^{2x} - 10e^x}$  בנקודה  $(a, -\frac{1}{9})$  כאשר  $a$  הוא



$$-2e^{2x} + 10e^x = 0$$

$$2e^x(-e^x + 5) = 0$$

$$2e^x = 0$$

$$-e^x + 5 = 0$$

$$e^x = 0$$

$$e^x = 5$$

כ"ף, 0-2

$$x = \ln 5$$

נחשב את ערך הפונקציה ב- $x = \ln 5$ :  

$$y = \frac{1}{e^{2 \ln 5} - 10e^{\ln 5}}$$

$$y = -\frac{1}{25}$$

$$\left(\ln 5, -\frac{1}{25}\right)$$

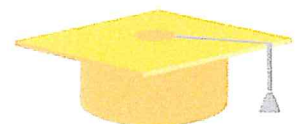
נבדוק את סוג הקיצון:

	$x < \ln 5$	$\ln 5 < x < \ln 10$	$x > \ln 10$
$y'$	+	-	-
$y$	→	→	→

$$f'(\ln 2) > 0$$

$$f''(\ln 7) < 0$$

$$f'(\ln 11) < 0$$



$$\max(\ln 5, -\frac{1}{25})$$

דקלטר הק' ציון?

ע(2). תחומי פ'ה:

$x < \ln 5$   
 $\ln 5 < x < \ln 10, \ln 10 < x$   
 תחומי ק'ה:

הגדרת הפונקציה:  $y = \ln(x) - \frac{1}{25x}$

ע(3) ג'חלב דקלטר חילוק עם צ'ה X:

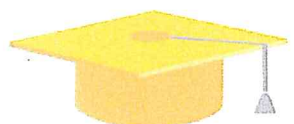
$$y = 0$$

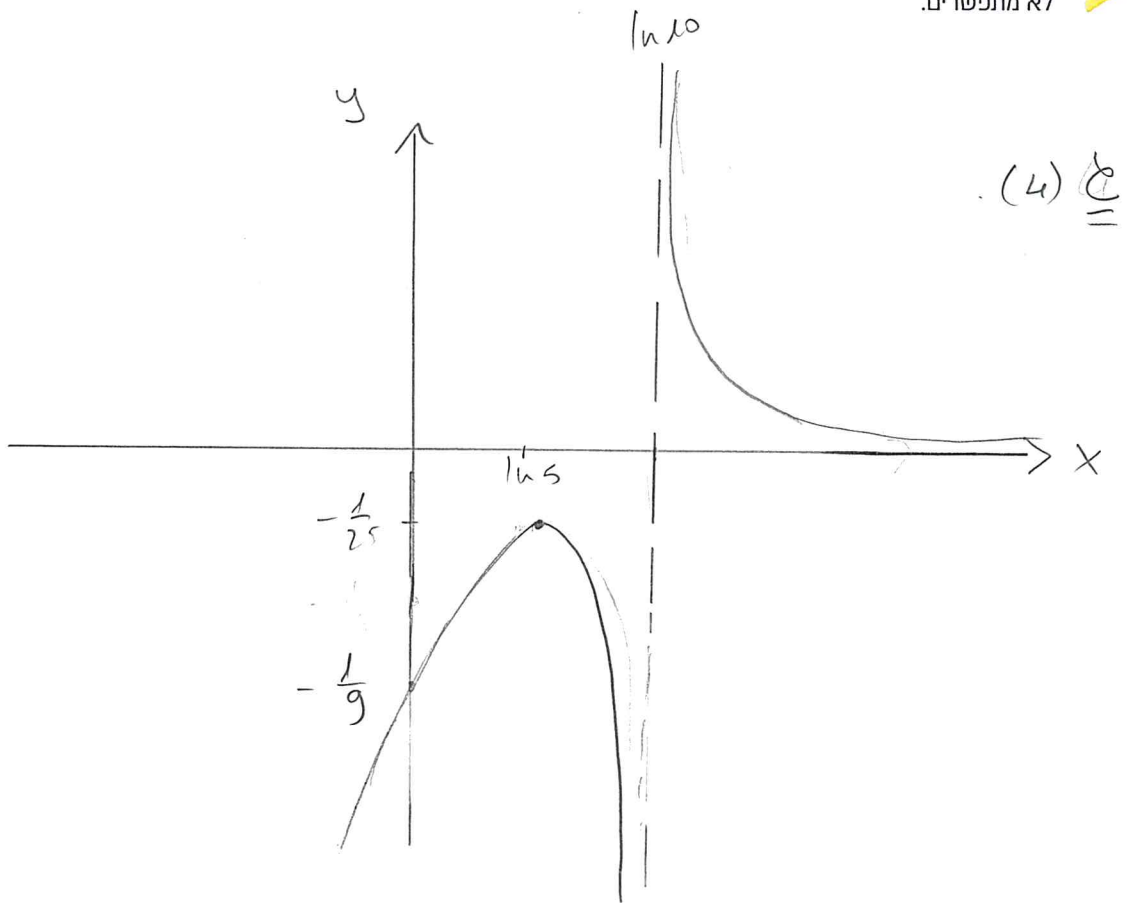
$$0 = \frac{1}{e^{2x} - 10e^x} \cdot (e^{2x} - 10e^x)$$

$$0 = 1$$

פ'ה לק'ה

אין דקלטר חילוק צ'ה X





2. נחשב את הנגזרת ב-10 ו-5  
 $f'(x) < 0$  עבור  $\ln 5 < x < \ln 10$ ,  $\ln 10 < x$

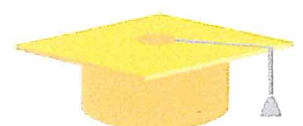
נחשב את הנגזרת ב-10 ו-5  
 $f(x) < 0$  עבור  $\ln 5 < x < \ln 10$

אכן  $f(x) < 0$  ו-  $f'(x) < 0$  עבור  $\ln 5 < x < \ln 10$

$\ln 5 < x < \ln 10$

נמידע על פסיכומטרי  
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
 אל תתפשר עליה.





5. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{2+2x}$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. מצא את האסימפטוטה של הפונקציה  $f(x)$  המאונכת לציר ה- $x$ .
- ג. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).
- ד. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבע את סוגה.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $-f(x)$ .

א.  $1+x > 0$  אם  $2+2x \neq 0$  הזכרנו:  $x > -1$

$x > -1$  אם  $2 \neq -2x$   $\div: -2$

$x > -1$  אם  $-1 \neq x$

$x > -1$  אי-אפשר:

ב. אי-אפשר  $x = -1$  מאחר שציר ה- $x$   $x = -1$

ג. נחשב נקודת חיתוך  $x = 0$   $y = 0$

$x = 0$

$f(0) = \frac{\ln(1+0)}{2+2 \cdot 0} = 0$

$(0, 0)$



לחשוב לקצטר חיתוך ב- $x=0$ :

$$y=0$$

$$0 = \frac{\ln(1+x)}{2+2x} \cdot (2+2x)$$

$$0 = \ln(1+x)$$

$$e^0 = 1+x$$

$$0 = x$$

$$(0, 0)$$

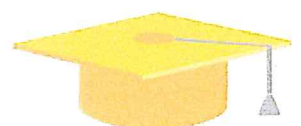
$(0, 0)$  לקצטר החיתוך בציר  $x$

2. שיטת לקצטר הקיצון!

$$f'(x) = \frac{\frac{2+2x}{1+x} - 2\ln(1+x)}{(2+2x)^2}$$

בכור אתר הפוא-קציה:

$$f'(x) = \frac{2 - 2\ln(1+x)}{(2+2x)^2}$$



נשאלה אחר הנגזרת 0-1: הפתרון:

$$\frac{2 - 2 \ln(1+x)}{(2+2x)^2} = 0 \quad | \cdot (2+2x)^2$$

$$2 - 2 \ln(1+x) = 0$$

$$2 = 2 \ln(1+x) \quad | :2$$

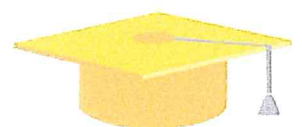
$$1 = \ln(1+x)$$

$$e = 1+x$$

$$e-1 = x$$

נחשב אחר אורך ה-y:  $y = \frac{\ln(1+e-1)}{2+2(e-1)} = \frac{1}{2e} \approx 0.184$

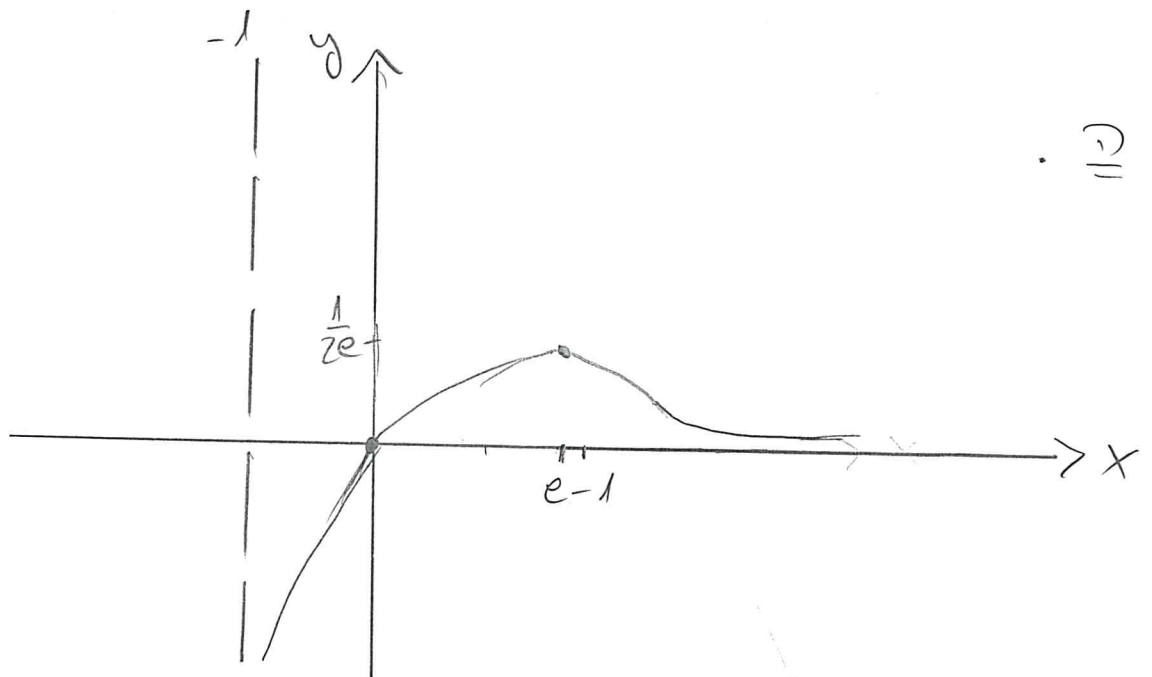
המשלשלה אפקטיוון:  $(e-1, \frac{1}{2e})$



הקיצון? סוג אחר סוג

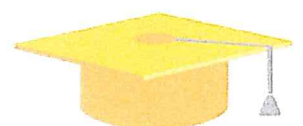
$x$	$-1$	$-1 < x < e-1$	$e-1 < x$
$y'$	/ / / / /	+	-
$y$	/ / / / /	↗	↘

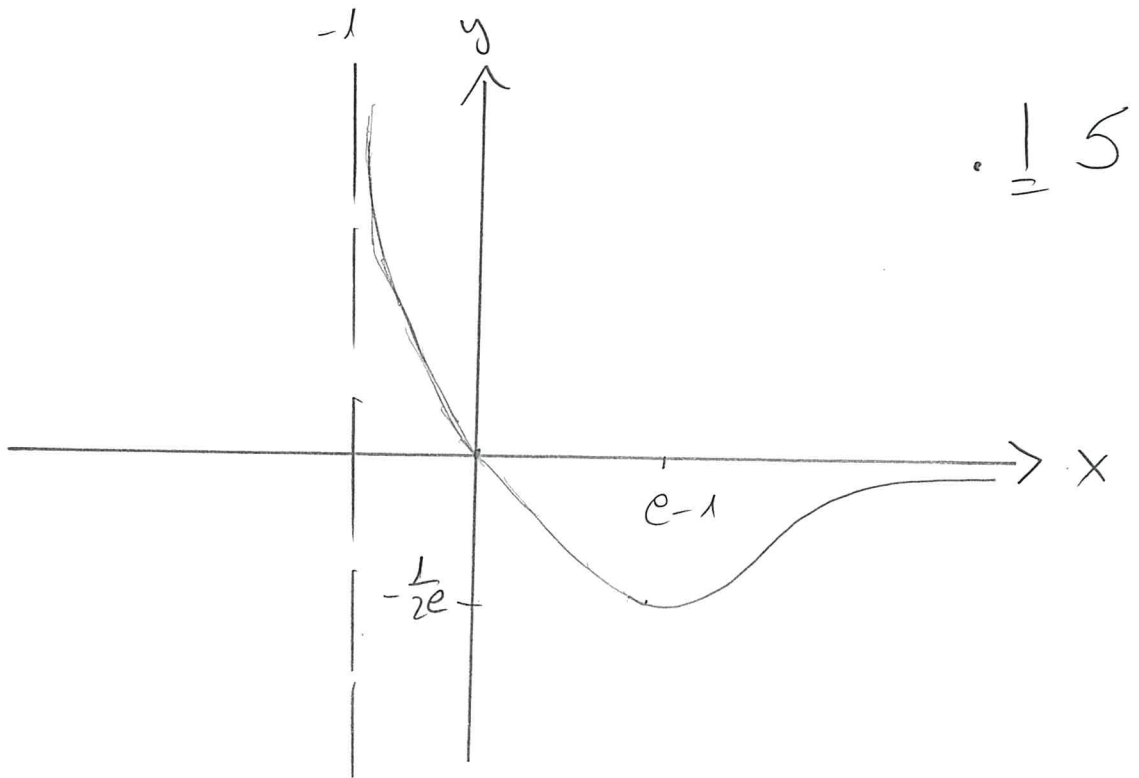
$\max(e-1, \frac{1}{2e})$  הקיצון? קיצו



למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.





למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.

