

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשע"ז, 2017, שאלונים: 315, 35805
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. נתונה סדרה המקיימת: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 5$ לכל n טבעי.

א. חשב את האיברים a_2 ו- a_3 .

מגדירים סדרה חדשה: $b_n = a_{n+1} - a_n$.

ב. הבע את b_n באמצעות n .

ג. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית, ומצא את ההפרש שלה.

ד. נתון כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n שווה ל- a_5 . מצא את n .

$$a_2 = a_1 + 2 \cdot 1 + 5$$

$n=1$ ≈ 3
כאן הנסיקה! 10

$$a_2 = 0 + 7 = 7$$

$$\boxed{a_2 = 7}$$

$$a_3 = a_2 + 2 \cdot 2 + 5$$

$n=2$ ≈ 3
כאן הנסיקה!

$$a_3 = 7 + 9 = 16$$

$$\boxed{a_3 = 16}$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

$$a_{n+1} = a_n + 2n + 5$$

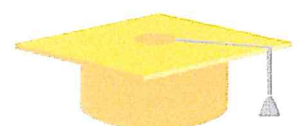
$$a_{n+1} - a_n = 2n + 5$$

כפי הנראה:

אכן!

$$\boxed{b_n = 2n + 5}$$

כאן נחתי





$$b_n = 2n + 5$$

$$b_{n+1} = 2(n+1) + 5$$

$$b_{n+1} = 2n + 2 + 5 = 2n + 7$$

$$b_{n+1} - b_n = 2n + 7 - (2n + 5) = 2$$

הוכחנו שהסדרה היא סדרה חשבונית

$$d = 2$$

הפרש:

$$S_{b_n} = a_5$$

2. גורו

נחשב תחילה את a_4 ו- a_5 :

$$a_4 = a_3 + 2 \cdot 3 + 5 = 16 + 11 = 27$$

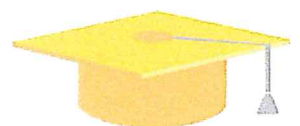
$$a_5 = a_4 + 2 \cdot 4 + 5 = 27 + 13 = 40$$

$$a_5 = 40$$

נחשב את b_1 (בד"כ תוצאה סדירה):

$$b_1 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$$

$$b_1 = 7$$





$$S_{b_n} = \frac{n[2b_1 + (n-1)d]}{2}$$

$$S_{b_n} = a_5 = 40, d=2, b_1=7 \quad \text{ל3 >}$$

$$\frac{n[2 \cdot 7 + (n-1) \cdot 2]}{2} = 40 / 2$$

$$n[14 + 2n - 2] = 80$$

$$n[12 + 2n] = 80$$

$$12n + 2n^2 = 80$$

$$2n^2 + 12n - 80 = 0$$

$$\cancel{n = -10}$$

$$n = 4$$

שם האיברים בסדרה
בסל שלם אחילבי

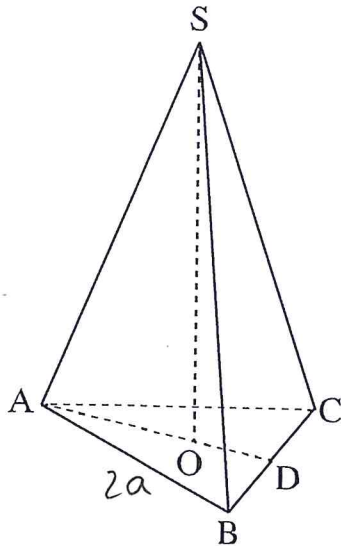
$$\boxed{n=4}$$

פ' > 2





טריגונומטריה במרחב



2. נתונה פירמידה משולשת ישרה SABC

שבסיסה, משולש ABC, הוא שווה צלעות.

נתון: $AB = 2a$.

SO הוא גובה בפירמידה (ראה ציור).

AD הוא הגובה לצלע BC במשולש ABC.

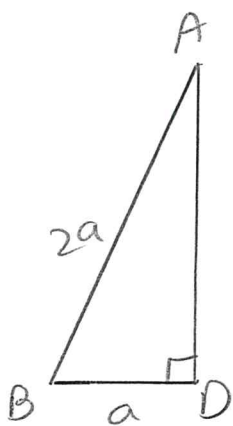
א. הבע באמצעות a את אורך AD.

ב. נתון כי נפח הפירמידה הוא $\sqrt{3} \cdot a^3$.

הבע באמצעות a את גובה הפירמידה SO.

ג. חשב את גודל הזווית שבין מקצוע צדדי ובין בסיס הפירמידה.

א. כיוון שהמשולש ABC הוא שווה צלעות
הגובה הצלע הוא תיכון
אז $BD = \frac{1}{2}BC = a$



לפי משפט פיתגורס

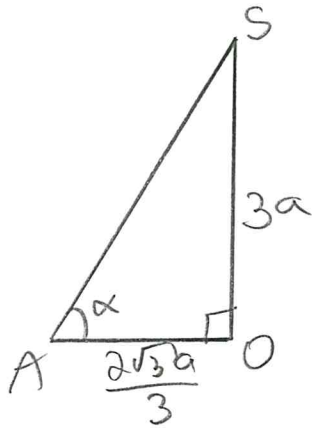
ב. ΔABD :

$$AD^2 = AB^2 - BD^2$$

$$AD^2 = (2a)^2 - a^2 = 3a^2 \quad | \sqrt{}$$

$$AD = \sqrt{3}a$$





נתון: ΔSOA - כ

בדיוק: כסוף כן מכלול:

$$SO = 3a$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{3a}{1}}{\frac{2\sqrt{3}a}{3}}$$

ואכן:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3 \cdot 3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\Downarrow$

$$\alpha = 68.95^\circ$$





3. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x + 4\cos x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.
- מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
 - מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 - מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $f(x)$ העבירו שני אנכים לציר ה- x . חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x ושני האנכים.

$$x = 0$$

k

$$f(0) = 2 \cdot 0 + 4 \cos 0 = 4$$

$$(0, 4)$$

ב. נמצא נקודות קיצון של $f(x)$ — הפונקציה

$$f'(x) = 2 - 4\sin x$$

$$2 - 4\sin x = 0 \quad \text{נמצא נקודות קיצון}$$

$$2 = 4\sin x$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$



$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{במקום הקריאה}$$

$$y = 2 \cdot \frac{\pi}{6} + 4 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3} \approx 4.511$$

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3} \right)$$

$$x = \frac{5\pi}{6} \quad \text{במקום הקריאה}$$

$$y = 2 \cdot \frac{5\pi}{6} + 4 \cos \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3} =$$

$$\approx 1.771$$

$$\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3} \right)$$

חישוב סוג הקיצון

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x		$0 < x < \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6} < x < \pi$
y'		+	-	+
y		↗	↘	↗

$$f'(\frac{\pi}{6}) > 0$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) < 0$$

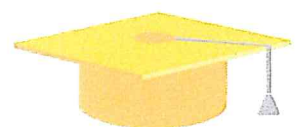
$$f'(\frac{11\pi}{12}) > 0$$

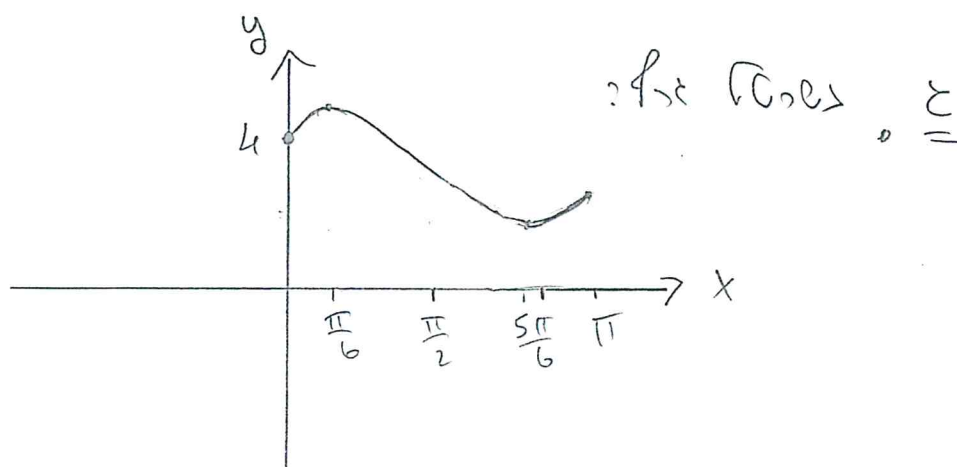
לאסוף את כל הקיצונים במקומות הקריאה:

$$f(0) = 4 \quad \min$$

$$f(\pi) = 2\pi + 4 \cos \pi = 2\pi - 4 \approx 2.283 \quad \max$$

$\min(0, 4)$	$\min(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3})$
$\max(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3})$	$\max(\pi, 2\pi - 4)$





נחשב שטח:

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2x + 4\cos x) dx = x^2 + 4\sin x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$S = \left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 + 4\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + 4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$\frac{25\pi^2}{36} + \frac{4}{2} - \frac{\pi^2}{36} - \frac{4}{2} = \frac{2\pi^2}{3} \approx 6.58$$





4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{a}{e^{2x} - 10e^x}$. a הוא פרמטר שונה מאפס.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המאונכת לציר ה- x .
 נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y היא $(0, -\frac{1}{9})$.
 ב. מצא את a .
 הצב בפונקציה $f(x)$ את a שמצאת בסעיף ב וענה על הסעיפים ג-ד.
 ג. (1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.
 (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 (3) האם לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם ציר ה- x ? נמק.
 (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ד. מצא את התחום שבו $f(x) < 0$ וגם $f'(x) < 0$.

$$e^{2x} - 10e^x = 0$$

א' (1) תחום ההגדרה:

$$e^x(e^x - 10) = 0$$

$$e^x = 0 \quad e^x - 10 = 0$$

אין פתרון

$$e^x = 10$$

$$x = \ln 10$$

אכן, הפונקציה מאפסת ב- $x = \ln 10$!

$$x \neq \ln 10$$

$$(x \neq 2.302)$$

(2) אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x : $x = \ln 10$



נמצא את a עבור נקודה $(0, -\frac{1}{9})$ בנקודה זו

אם a הוא

$$-\frac{1}{9} = \frac{a}{e^{2 \cdot 0} - 10e^0}$$

$$-\frac{1}{9} = \frac{a}{-9} \quad | \cdot (-9)$$

$$\boxed{-1 = a}$$

נמצא את a עבור נקודה $(1, \frac{1}{e^2 - 10e})$

נמצא את הנקודה הזו:

$$f'(x) = \frac{-1(2e^{2x} - 10e^x)}{(e^{2x} - 10e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2e^{2x} + 10e^x}{(e^{2x} - 10e^x)^2}$$

נמצא את הנקודה הזו:

$$\frac{-2e^{2x} + 10e^x}{(e^{2x} - 10e^x)^2} = 0$$

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.

אל תתפשר עליה.



למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

$$-2e^{2x} + 10e^x = 0$$

$$2e^x(-e^x + 5) = 0$$

$$2e^x = 0$$

$$e^x = 0$$

אין פתרון

$$-e^x + 5 = 0$$

$$e^x = 5$$

$$x = \ln 5$$

נחשב את הערך של y : $y = \frac{1}{e^{2\ln 5} - 10e^{\ln 5}}$

$$y = -\frac{1}{25}$$

$$(\ln 5, -\frac{1}{25})$$

נמצא את כל הקיצונים:

	$\ln 5$	$\ln 10$	
x	$x < \ln 5$	$\ln 5 < x < \ln 10$	$\ln 10 < x$
y'	+	-	-
y	→	→	→

$$f'(\ln 2) > 0$$

$$f''(\ln 7) < 0$$

$$f'(\ln 11) < 0$$



$$\boxed{\max(\ln 5, -\frac{1}{25})}$$

בקיצור הן יצאנו?

ע(2). תחומי פתירה: $x < \ln 5$

תחומי פתירה: $\ln 5 < x < \ln 10, \ln 10 < x$

ע(3) בחלק בקיצור חילוק עם צי x :

$$y = 0$$

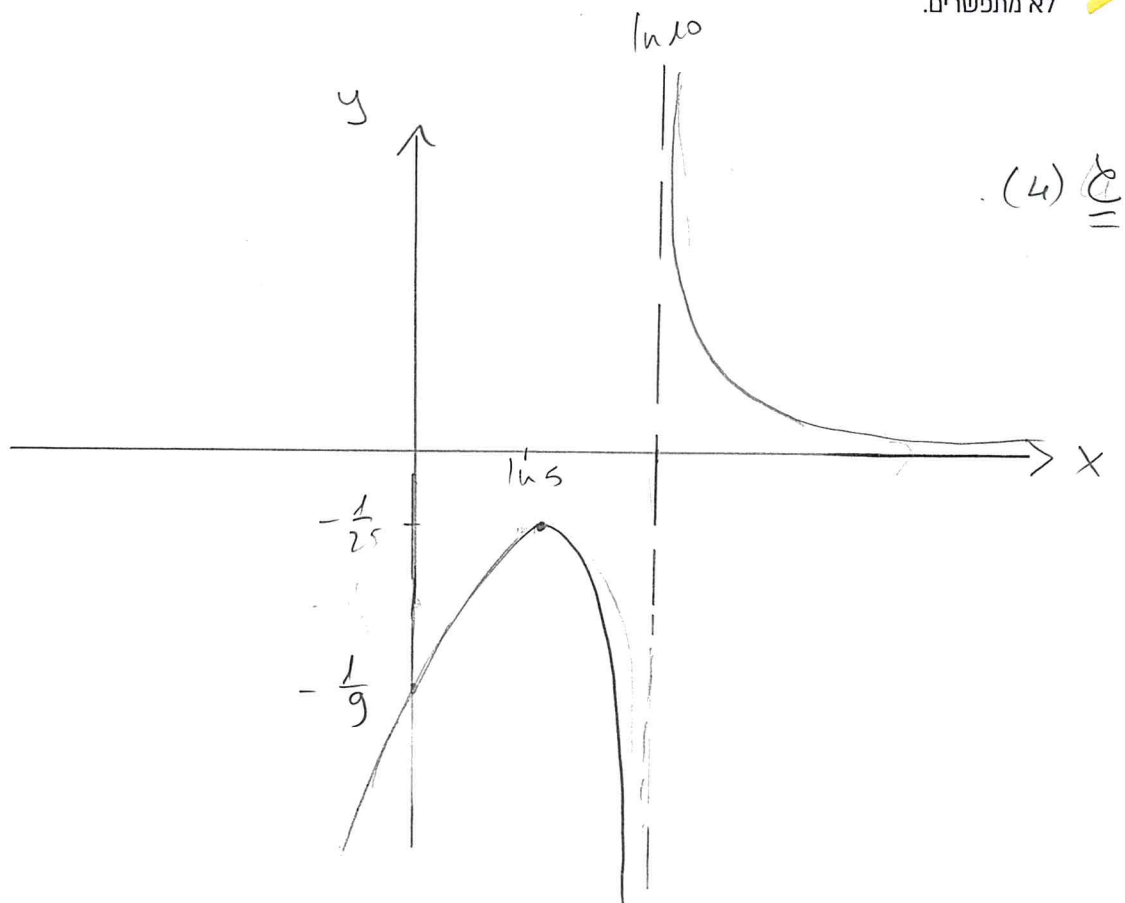
$$0 = \frac{1}{e^{2x} - 10e^x} \cdot (e^{2x} - 10e^x)$$

$$0 = 1$$

סוף לקה

אין בקיצור חילוק עם צי x .



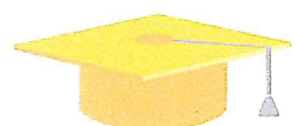


2. נחשב את הפונקציה $f(x)$ ב-400 (1) $f'(x)$ $\ln 10 < x$, $\ln 5 < x < \ln 10$ $f'(x) < 0$

נחשב את $f(x)$ ב-400 $\ln 10 < x < \ln 10$ $f(x) < 0$

אז $f(x) < 0$ $f'(x) < 0$ $\ln 5 < x < \ln 10$

$$\ln 5 < x < \ln 10$$



5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{2+2x}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- מצא את האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המאונכת לציר ה- x .
- מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
- מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $-f(x)$.

א. תחום ההגדרה: $1+x > 0$ ו- $2+2x \neq 0$

$x > -1$ ו- $2 \neq -2x$: -2

$x > -1$ ו- $-1 \neq x$

אסימפטוטה: $x > -1$

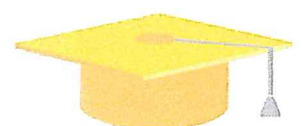
ב. אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x : $x = -1$

ג. נחשב נקודת חיתוך עם ציר ה- y :

$x = 0$

$f(0) = \frac{\ln(1+0)}{2+2 \cdot 0} = 0$

$(0, 0)$



למשל נק' אחר חיתוך ב- $x=0$:

$$y=0$$

$$0 = \frac{\ln(1+x)}{2+2x} \quad | \cdot (2+2x)$$

$$0 = \ln(1+x)$$

$$e^0 = 1+x$$

$$0 = x$$

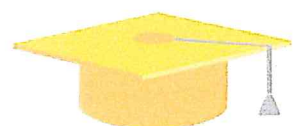
$$(0, 0)$$

$(0, 0)$ נק' אחר החיתוך ב- $x=0$

2. שיטת נק' אחר הקיצון:

$$f'(x) = \frac{\frac{2+2x}{1+x} - 2\ln(1+x)}{(2+2x)^2} \quad \text{בכור אחר הפונקציה:}$$

$$f'(x) = \frac{2 - 2\ln(1+x)}{(2+2x)^2}$$



נשאלה אחר הנגזרת 0-1: הפרויקט:

$$\frac{2 - 2 \ln(1+x)}{(2+2x)^2} = 0 \quad | \cdot (2+2x)^2$$

$$2 - 2 \ln(1+x) = 0$$

$$2 = 2 \ln(1+x) \quad | : 2$$

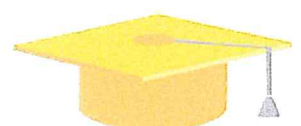
$$1 = \ln(1+x)$$

$$e = 1+x$$

$$e-1 = x$$

נחשב אחר אורך ה-y: $y = \frac{\ln(1+e-1)}{2+2(e-1)} = \frac{1}{2e} \approx 0.184$

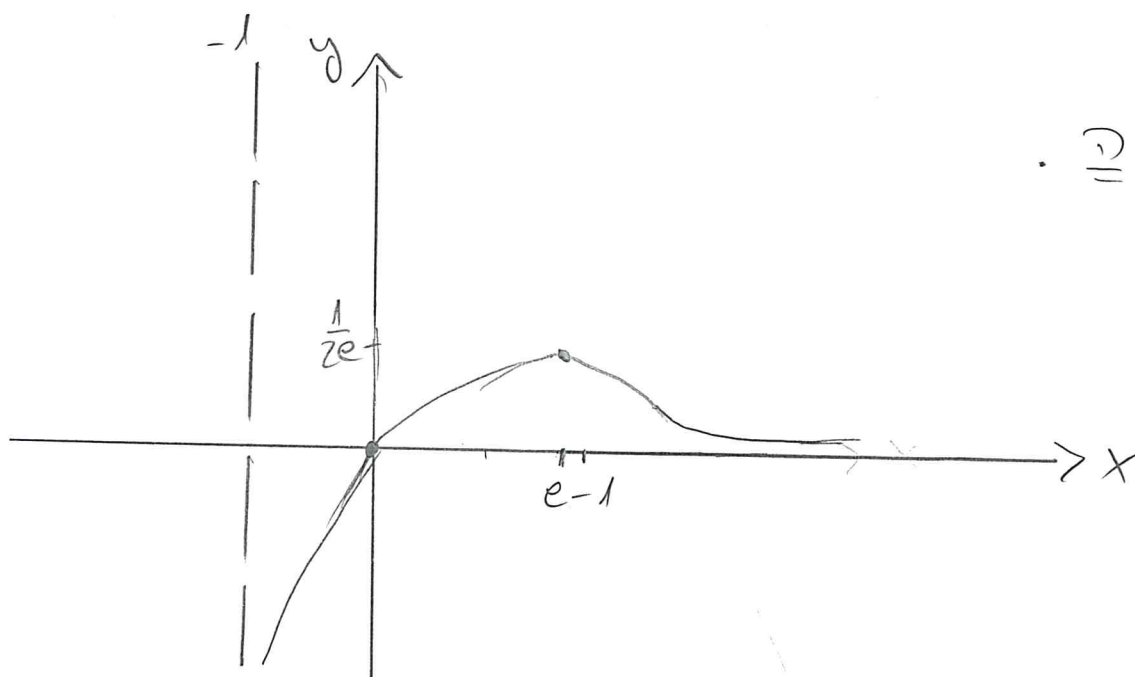
המשלש בנקודת: $(e-1, \frac{1}{2e})$

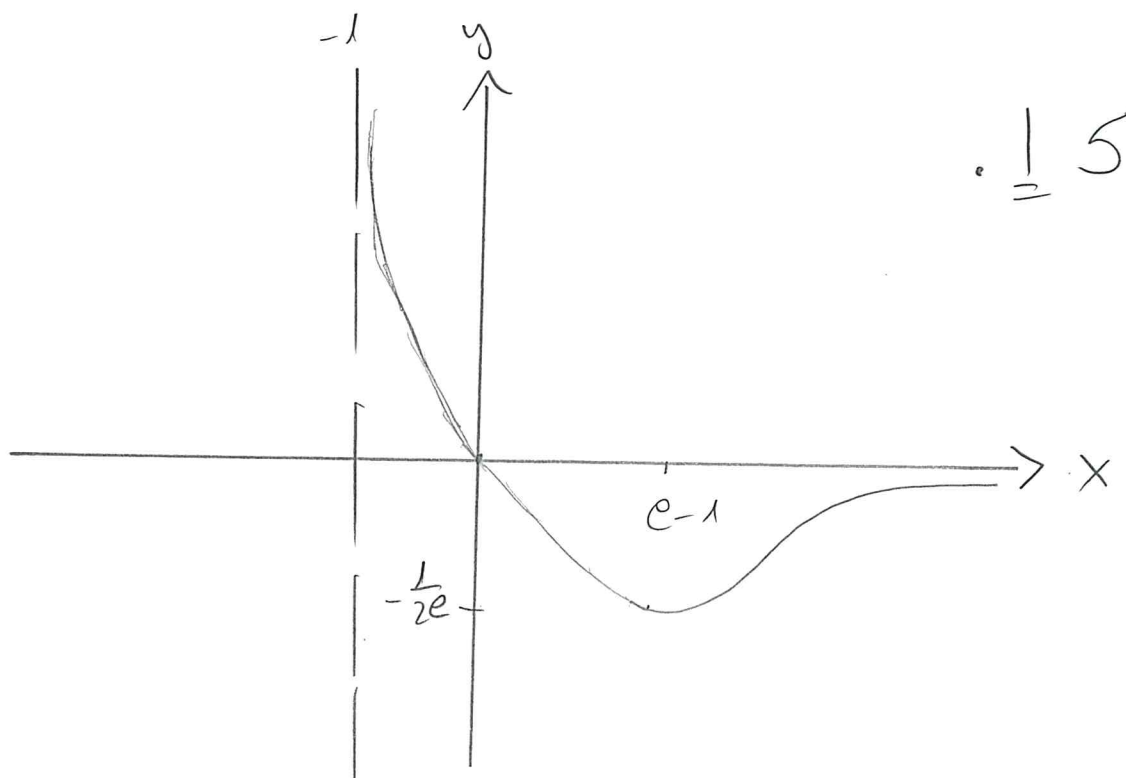


הקיצון? סוג אחר

	-1	$e-1$
x	$-1 < x < e-1$	$e-1 < x$
y'	$+$	$-$
y	$\nearrow$	$\searrow$

הקיצון? $\max(e-1, \frac{1}{2e})$





$\frac{1}{2}e$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

