

פתרון הבחינה

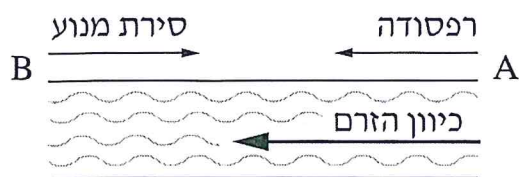
במתמטיקה

קיץ תשע"ז, 2017, מועד ב, שאלונים: 316, 35806
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





1. העיירות A ו-B נמצאות על גדת נהר הזרם במהירות קבועה. כיוון הזרם הוא מ-A ל-B. מן העיירה B יצאה סירת מנוע לכיוון העיירה A. הסירה שטה נגד כיוון הזרם. באותו הזמן יצאה רפסודה מן העיירה A לכיוון העיירה B. הרפסודה שטה עם כיוון הזרם.

- מהירות סירת המנוע במים עומדים היא קבועה וגדולה פי 4 ממהירות הזרם של הנהר. מהירות הרפסודה במים עומדים היא אפס. במים זורמים הרפסודה שטה עם הזרם. הסירה והרפסודה נפגשו 3 שעות ו-45 דקות אחרי יציאתן לדרך והמשיכו בדרכן. סירת המנוע הגיעה לעיירה A ומיד הסתובבה ושטה בחזרה לעיירה B. כאשר סירת המנוע הגיעה לעיירה B, הרפסודה הייתה במרחק של 35 ק"מ מן העיירה B.
- א. חשב את מהירות הזרם ואת מהירות סירת המנוע במים עומדים.
- ב. בדרך חזרה לעיירה B פגשה סירת המנוע את הרפסודה בפעם השנייה. כמה זמן עבר מרגע יציאתה של הרפסודה מן העיירה A עד שהסירה והרפסודה נפגשו בפעם השנייה?



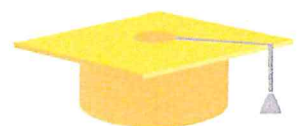
כ נסמן את מהירות הכדור V
 נציב את הנתונים בטבלה הבאה כאשר $q = 15 \mu\text{C}$

מהירות	q	מהירות	W
רפואה	$\left(\frac{15}{4} \cdot V \right)$	V	$\frac{15}{4}$
ס' $B \rightarrow A$	$\left(\frac{45}{4} \cdot V \right)$	$3V$	$\frac{15}{4}$
ס' $B \rightarrow A$	$\frac{15}{4}V + \frac{45}{4}V = 15V$	$3V$	(5)
ס' $A \rightarrow B$	$15V$	$5V$	(3)
רפואה	$15V - 35$	V	$5 + 3 = 8$

$$15V - 35 = 8V \rightarrow V = 5$$

מהירות הכדור $V = 5$

מהירות הס' $4V = 20$



קיבלתי בדיקת בדיקת, סדר הנושא שאלה 5 שאלה
 בשאלה 5 הרישום של הנושא של: $S = V \cdot t = 5 \cdot 5 = 25$
 בדיקת הנושא של הנושא של $5V = 25$
 הרישום של הנושא של 5 .

לכן סדר הנושא של הנושא של 25 ושל
 של הנושא של הנושא של:

$$25t = 5t + 25$$

$$t = 1 \frac{1}{4} \text{ שעות}$$

לכן סך הנושא של הנושא של A
 של הנושא של הנושא של:

$$5 + 1 \frac{1}{4} = 6 \frac{1}{4} \text{ שעות}$$



2. נתונה סדרה כללית a_n .

נסמן ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n .

נתון: $S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}}$ לכל n טבעי. k הוא מספר קבוע.

א. הבע את a_1 ואת האיבר הכללי a_n עבור $n > 1$ באמצעות n ו- k במידת הצורך.

ב. מצא את k שעבורו הסדרה a_n היא סדרה הנדסית. נמק.

נגדיר: $T = a_2^2 + a_5^2 + a_8^2 + \dots$ (סכום ריבועי כל איבר שלישי בסדרה a_n החל ב- a_2).

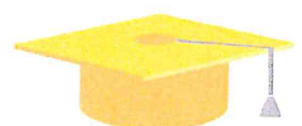
ג. חשב את T .

$$a_1 = S_1 = k - \frac{1}{3^2} = k - \frac{1}{9} \rightarrow \boxed{a_n = k - \frac{1}{9}} \quad \underline{\underline{k}}$$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = \left(k - \frac{1}{3^{n+1}}\right) - \left(k - \frac{1}{3^n}\right) = \\ &= \frac{-1}{3 \cdot 3^n} + \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^{n+1}} \rightarrow \boxed{a_n = \frac{2}{3^{n+1}}} \end{aligned}$$

נראה שאין לסדרה הנדסה היא כי האיבר בין ב' שני איברים סמוכים היא לא קבוע:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}$$



בפרט נראה בין האיבר השני לאיבר הראשון:

$$\frac{1}{3} = q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{2}{3^3}}{k - \frac{1}{9}} = \frac{2}{27k - 3} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{27k - 3}$$

$$27k - 3 = 6$$

$$\boxed{k = \frac{1}{3}}$$

ד נראה שהאיבר כי הסדרה הבנויה מהיחס של איבר של סדרה a_n היא סדרה הנדסית בפרט נראה:

$$q^* = \frac{a_n^2}{a_{n-3}^2} = \left(\frac{a_n}{a_{n-3}} \right)^2 = \left(\frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^{n-2}}} \right)^2 = \frac{1}{27^2}$$

האיבר הראשון בסדרה T הוא a_2^2 :

$$a_1^* = a_2^2 = \left(\frac{2}{3^{2+1}} \right)^2 = \frac{4}{27^2}$$

לפי הסכום האינסופי איברי הסדרה הנדסית מתכנסת:

$$T = \frac{-a_1^*}{q^* - 1} = \frac{\frac{-4}{27^2}}{\frac{1}{27^2} - 1} = \frac{1}{182} \rightarrow \boxed{T = \frac{1}{182}}$$





3. בקופסה I יש 10 כדורים, כמה מהם כחולים והשאר אדומים, ובקופסה II יש 7 כדורים כחולים ו-3 כדורים אדומים. מוציאים באקראי כדור מקופסה I. אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II. אם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I. שוב מוציאים באקראי כדור מקופסה I, ושוב, אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II, ואם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I. לאחר מכן מוציאים באקראי כדור אחד מקופסה II. א. נתון כי ההסתברות שאחרי שתי ההוצאות מקופסה I יועבר כדור אדום אחד בלבד מקופסה I לקופסה II היא $\frac{19}{36}$. חשב את מספר הכדורים הכחולים שהיו בקופסה I לפני ההוצאה הראשונה. ענה על הסעיפים ב-ג עבור מספר הכדורים הכחולים שחישבת בסעיף א.
- ב. מהי ההסתברות שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום?
- ג. ידוע שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום. מהי ההסתברות שאחרי שהוציאו את הכדור האדום מקופסה II נשארו בה שלושה כדורים אדומים בדיוק?

1c $\frac{19}{36} = x - \text{כחולים} - 3 \text{ אדומים}$ בקופסה I

דפסה II :

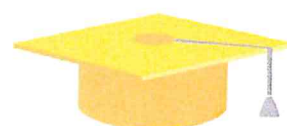
7 - כחול

3 - אדום

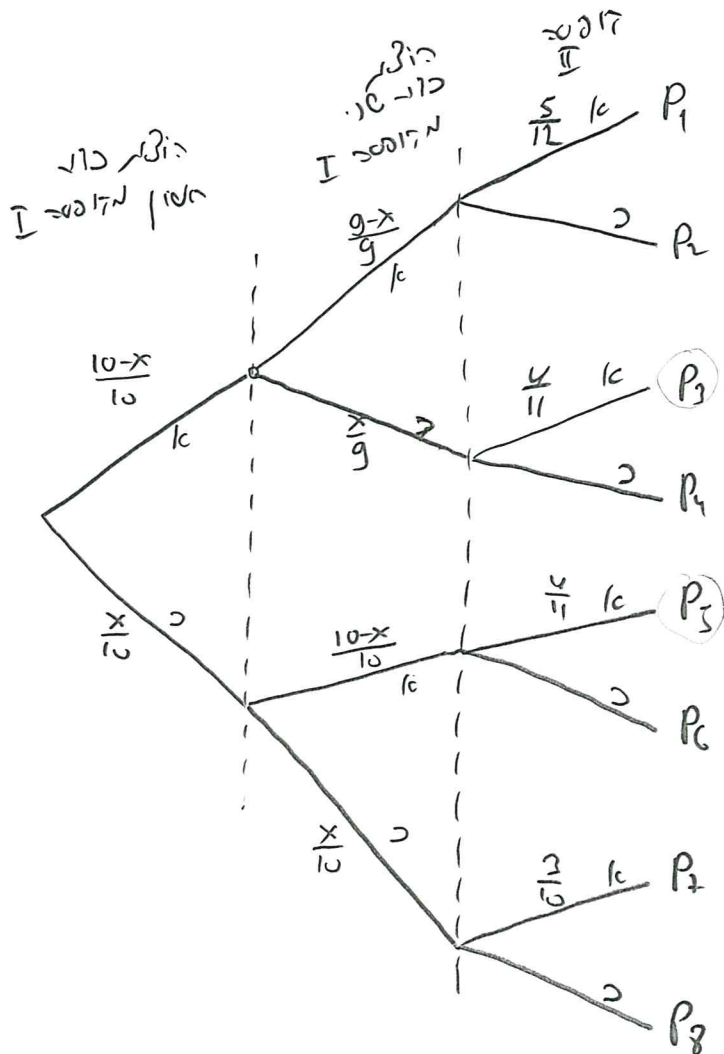
דפסה I :

x - כחול

10 - x - אדום



נניח את פירוק האפשרות בשתי הילאליה של הבא:



$$\frac{10-x}{10} \cdot \frac{x}{9} + \frac{x}{10} \cdot \frac{10-x}{10} = \frac{19}{36}$$

$$x(10-x) \cdot \frac{19}{900} = \frac{19}{36}$$

$$x(10-x) = 25 \rightarrow 0 = x^2 - 10x + 25 \rightarrow x = 5$$

5 כור-ים בחזו"ם



2 הסתברות לזכות אדום עם יענוף בעל התואר בראש השנה:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{4271}{11880} = 0.3595$$

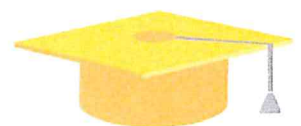
הסתברות לזכות אדום להיבחר: Π : 0.3595

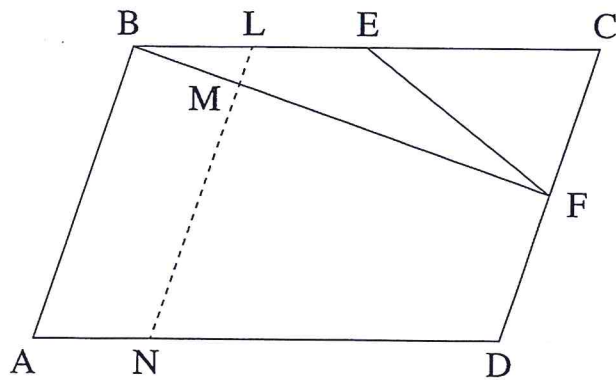
3 נשים בנוסף להסתברות הנ"ל:

$$P\left(\frac{\text{נשים 3 אדומות}}{\text{נשים 3 אדומות}}\right) = \frac{P(\text{נשים 3 אדומות} \cap \text{זכות אדום})}{P(\text{זכות אדום})} = \frac{P_3 + P_5}{P(\text{זכות אדום})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{11}}{\frac{4271}{11880}} = \frac{2280}{4271} = 0.5338$$

הסתברות ששלו 3 אדומות,
אם יזיח שזכה בזה אדום

0.5338


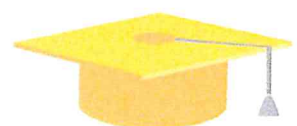
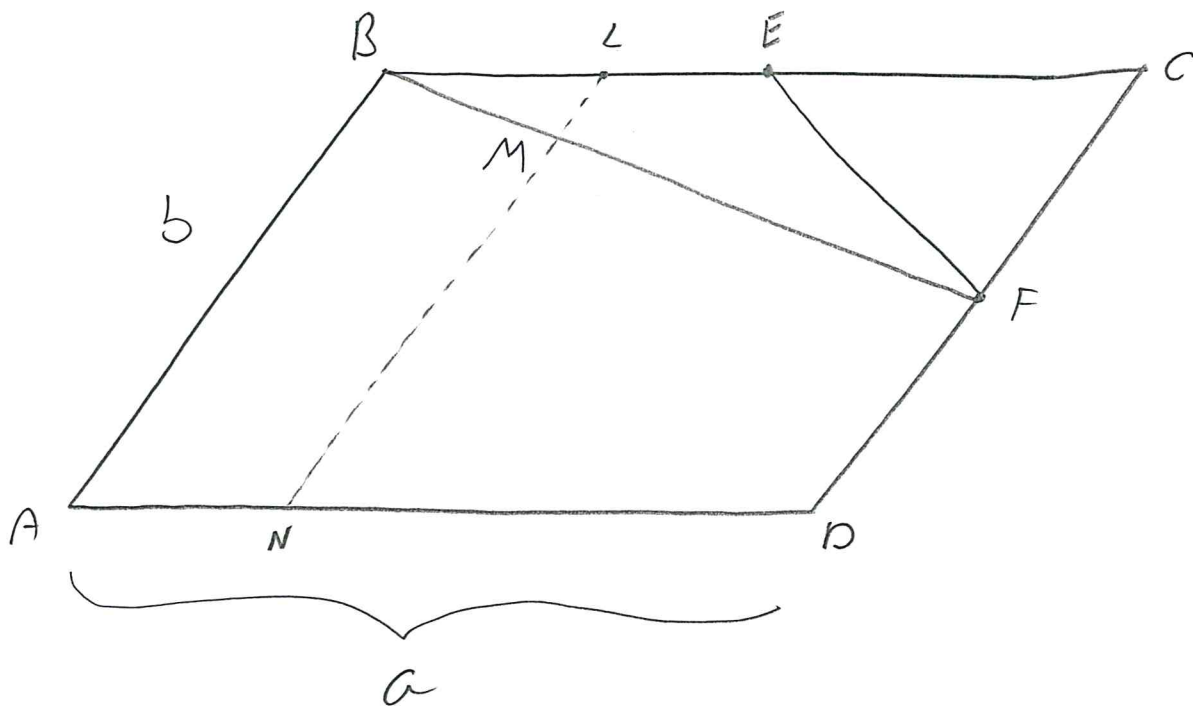


4. המרובע ABCD הוא מקבילית.
 הזווית A היא זווית חדה.
 הנקודה E היא אמצע הצלע BC
 והנקודה F היא אמצע הצלע CD
 (ראה ציור).

א. שטח המשולש ECF הוא S.
 הבע את שטח המקבילית ABCD
 באמצעות S. נמק את תשובתך.

ב. הנקודה L היא אמצע הקטע BE.
 דרך הנקודה L העבירו ישר המקביל ל-AB וחותך את BF ואת AD
 בנקודות M ו-N בהתאמה.
 חשב את היחס $\frac{LM}{MN}$.

ג. נתון $BE = EF$.
 האם אפשר לחסום את המרובע ABFD במעגל? נמק את קביעתך.



תיכון

סימון

יזכר מהזקוק F ב-Δ
ומהצ לאמצע הצלע שמאל, לפי (1)
תיכון מתוך ש Δ לפני ש
שני שטח + סימון

יזכר מהזקוק D ב-Δ
ומהצ לאמצע הצלע שמאל, לפי (1)
תיכון מתוך ש Δ לפני ש
שטח + שניה (5)

צלעות נגזרות במקביל שווה זו
לזו, שניה (1)
צלעות נגזרות במקביל שווה זו לזו,
שניה (1)

BC צלע E אמצע (1)
CD צלע F אמצע
ABCD מקביל

$$S_{\triangle CEF} = S$$

$$AB = b, AD = a \quad (2)$$

$$\triangle BCF \sim \triangle FEF \quad (3)$$

$$S_{\triangle BEF} = S_{\triangle ECF} = S \quad (4)$$

$$S_{\triangle CDF} = S_{\triangle BEF} + S_{\triangle ECF} = S + S = 2S. \quad (5)$$

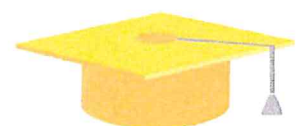
$$\triangle BCD \sim \triangle BCF \quad (6)$$

$$S_{\triangle BDF} = S_{\triangle BCF} = 2S \quad (7)$$

$$S_{\triangle BCD} = 2S + 2S = 4S \quad (8)$$

$$BC = AD \quad (9)$$

$$AB = CD \quad (10)$$





כל שווה לעצמו

לפי משפט חסימה 33.3

שורה (9) (10) (11)

זכר חוספה, לכן שווה שטח
+ שורה (8)

נניח

כלומר שווה במידות, מקבילות זו לזו

כלל המעבר לשוויון (15) - (16)

דלג. ישים מקבילים, מקבילים זה לזה

נניח $\angle$ אולם BE וסימון.

שורה (2) - (15)

$$BD = DB \quad (11)$$

$$\triangle BCD \cong \triangle DAB \quad (12)$$

$$S_{\triangle BAD} = S_{\triangle DAB} = 4S \quad (13)$$

$$S_{ABCD} = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle BAD} = \quad (14)$$

$$= 4S + 4S = 8S$$

$$\boxed{S_{ABCD} = 8S} \quad \text{כנ"ס א'}$$

$$\angle N \parallel BA \quad (15)$$

$$BE \text{ אולם } \angle \quad (16)$$

$$AB \parallel CD \quad (16)$$

$$\angle N \parallel CB \quad (17)$$

$$\angle M \parallel CF \quad (18)$$

$$BL = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} BC = \frac{1}{4} a \quad (19)$$





שורה ① ו-②

לפי המשפט הזווית אלכסון חלף

בשורה ① $LM \parallel CF$ שורה (18)

בשורה ② של שורה (20) (19)

חלפים מקבילים, מקבילים, מקבילים זה לזה
נכון

שהוא נגזר ממשפטים, לכן
מקבילים, שורה (23) ו- (24)
נגזר ממשפטים, מקבילים זה לזה

המשפט של שורה (20) ו- (26)

$$CF = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} b \quad (20)$$

$$\frac{BL}{BC} = \frac{LM}{CF} \quad (21)$$

$$\frac{\frac{1}{4}a}{a} = \frac{LM}{\frac{1}{2}b} \quad (22)$$

$$LM = \frac{1}{8}b$$

$$BL \parallel AN \quad (23)$$

$$AB \parallel LN \quad (24)$$

$$ABLN \text{ מקבילים} \quad (25)$$

$$LN = AB = b \quad (26)$$

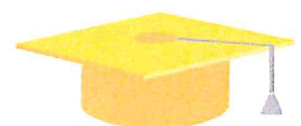
$$MN = LN - LM = \quad (27)$$

$$= b - \frac{1}{8}b = \frac{7}{8}b$$

$$\frac{LM}{MN} = \frac{\frac{1}{8}b}{\frac{7}{8}b} = \frac{1}{7} \quad (28)$$

$$\boxed{\frac{LM}{MN} = \frac{1}{7}}$$

כנראה
סוף כי





נתון + סימון שווה (1) - (2)

נתון + סימון

משנה (29) - (30)

אלמ ב-ד, היכון עקלע שוב
 ערצי מהכלע, אתי כלע נא היין
 היי ב-ד יס-נוי

נוי יס-ד ב-ד יס-נוי

משנים ענוי סלוח.

נתון

לפי שווה (34) - (35)

$$BE = EC = \frac{1}{2} BC \quad (29) \quad \cong$$

$$BE = EF = \frac{1}{2} BC \quad (30)$$

$$EF = \frac{1}{2} BC \quad (31)$$

$$\triangle BFC \text{ יס-נוי} \quad (32)$$

$$\angle BFC = 90^\circ \quad (33)$$

$$\angle BFD = 90^\circ \quad (34)$$

$$\angle A \text{ נוי חרע} \quad (35)$$

$$\angle BFD + \angle A < 180^\circ \quad (36)$$

$$\text{סכום נוי נרז, לוי שוב} \quad (37)$$

ד-180 לכן לא נתיין

חטום מרובע נ-חוק משל

נניח סוף ז



5. ABCD הוא טרפז חסום במעגל ($AB \parallel DC$).

נתון: $AB = a$, $CD = b$ ($a < b$).

$\angle C = 60^\circ$.

א. הבע את שוקי הטרפז, BC ו-AD, באמצעות a ו-b.

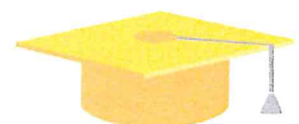
נתון: $a = 4$, אורך האלכסון BD הוא $4\sqrt{7}$.

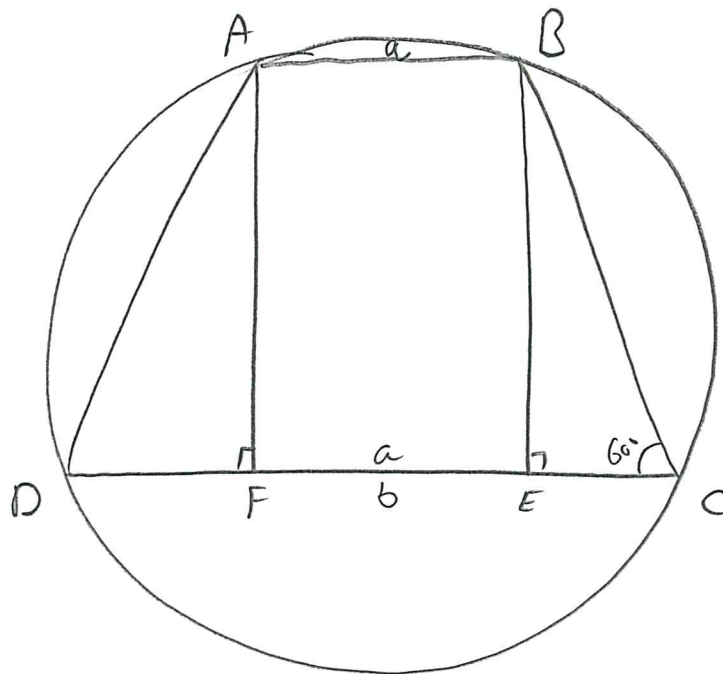
ב. חשב את b.

ג. (1) R הוא רדיוס המעגל החוסם את הטרפז. מצא את R.

(2) הסבר מדוע אפשר לחסום מעגל בטרפז ABCD.

(3) r הוא רדיוס המעגל החסום בטרפז. מצא את r.




 5. א

$AD = BC$ - חסוב במשולש ADC כי $AD = BC$ שווים

$BE + AF$ - כי AF ו- BE הם מידות היתר

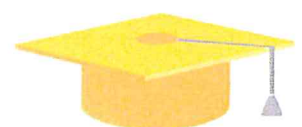
3.3.3 $\triangle AFD \cong \triangle BEC$ - שני משולשים

$DF = CE$ - נגזר מהמשולשים AFD ו- BEC כי הם חופפים שווים

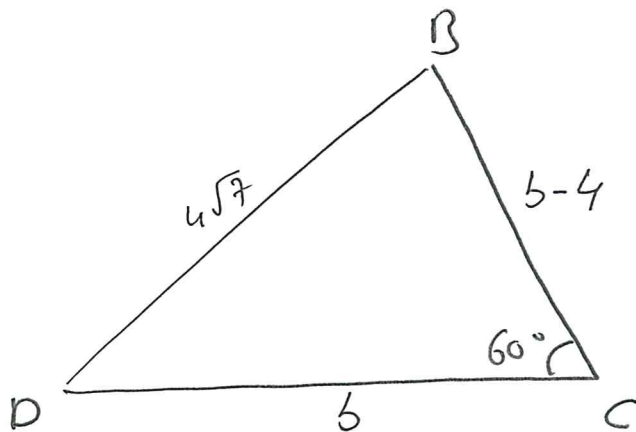
$DF = CE = \frac{b-a}{2}$ - היתר של AD ו- BC

$\angle ECB = 30^\circ$ - היתר של $\triangle BEC$ כי $\angle BEC = 180^\circ$

$BC = 2EC$ - בעזרת $\triangle BEC$ שווה, היתר של $\triangle BEC$ כי $\angle ECB = 30^\circ$
 שווה ל- BC מהיתר.



$$AD = BC = b - a \quad : \text{ע"כ}$$



211

 ע"פ משל חוסמוסק : $\triangle ABC$

$$(4\sqrt{7})^2 = b^2 + (b-4)^2 - 2 \cdot b \cdot (b-4) \cdot \cos 60^\circ$$

$$112 = 2b^2 + 16 - 8b - b(b-4)$$

$$112 = 2b^2 + 16 - 8b - b^2 + 4b$$

$$0 = b^2 - 4b - 96$$

$$b = 12$$

~~$$b = -8$$~~



ל (1) ע"פ משפט הסינוסים $\triangle BDC$:

$$\frac{BD}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow \boxed{R = 6.11}$$

(2) הגנאי לחסמל מעל במחיצה הוא כי סכום כללי
 נגזיר שוב לסכום כללי נגזיר:

$$AB + CD = AD + BC$$

$$a + b = (b - a) \cdot 2$$

$$3a = b$$

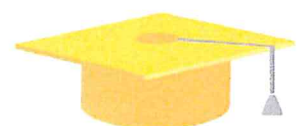
$$3 \cdot 4 = 12 \Rightarrow 12 = 12$$

קיבלנו משפט אחר $\triangle ABCD$ ניתן לחסום מעל במחיצה

(3) אנחנו חסמים שוב על ידי חסום

$$\frac{BE}{BC} = \sin 60^\circ \quad \triangle BEC \quad \text{ע"פ}$$

$$\frac{2r}{b-a} = \sin 60^\circ \Rightarrow \frac{2r}{12-4} = \sin 60^\circ \Rightarrow \boxed{r = 2\sqrt{3}}$$



6. נתונה הפונקציה $f(x) = a - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$. a הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה- x .

ב. מצא את a .

הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x) + k|$.

ידוע שגרף הפונקציה $g(x)$ משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $f(x)$.

מצא את k (מצא את שתי האפשרויות). נמק את תשובתך.



$$f(x) = a - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} \quad (6)$$

תחום ההגדרה (1) (7)

$$x-2 \neq 0$$

$$\boxed{x \neq 2}$$

אסימטות (2)

אופקית	אנכית
$x \rightarrow \pm\infty \quad y \rightarrow a$ $y = a$	$x = 2$ מאפס יקרא האכנה

$\frac{A}{(x-2)^n} \rightarrow 0$

נק' קיצון (3)

$$f'(x) = \frac{2}{(x-2)^2} - \frac{2(x-2)}{(x-2)^4} = 0 \quad / \cdot (x-2)^4 > 0$$

$$2(x-2)^2 - 2(x-2) = 0 \quad / : 2$$

$$(x-2)^2 - (x-2) = 0$$

$$(x-2)[x-2-1] = 0$$



$$(*) \quad (x-2)(x-3)=0$$

$$\begin{array}{ccc} \swarrow & & \searrow \\ x \neq 2 & & x = 3 \end{array}$$

לפי המילים
יהיה עכבה

$$f(3) = a - \frac{2}{3-2} + \frac{1}{(3-2)^2} = a - 2 + 1 = a - 1$$

$(3, a-1)$ "חשופה"

כ"ף ק' צין

	$x < 2$	2	$2 < x < 3$	3	$x > 3$
x	(0)		(2.5)		(4)
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

$(*)$ נציב במשוואה
של f' כי
המשוואה חלוקה
לכל x מחוץ
ההספקה

$$f'(0) > 0 \quad f'(2.5) < 0 \quad f'(4) > 0$$

$$\boxed{(3, a-1) \text{ מינימום}}$$

(1) $x < 2$: בן עולה עובר ; $x > 3$: בן יורד עובר ; $2 < x < 3$: בן עולה עובר ;



נתון: $f(x)$ נשקף לזכ x



$(3,0)$ נק' ההסקה

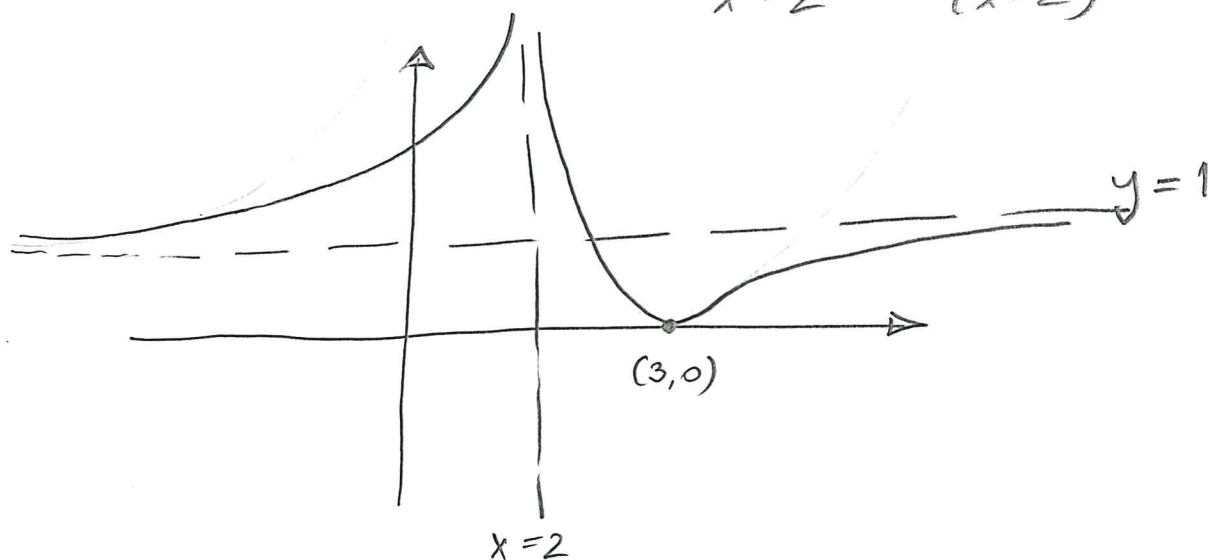
שפ'ג נק' קיצון



$$a-1=0$$

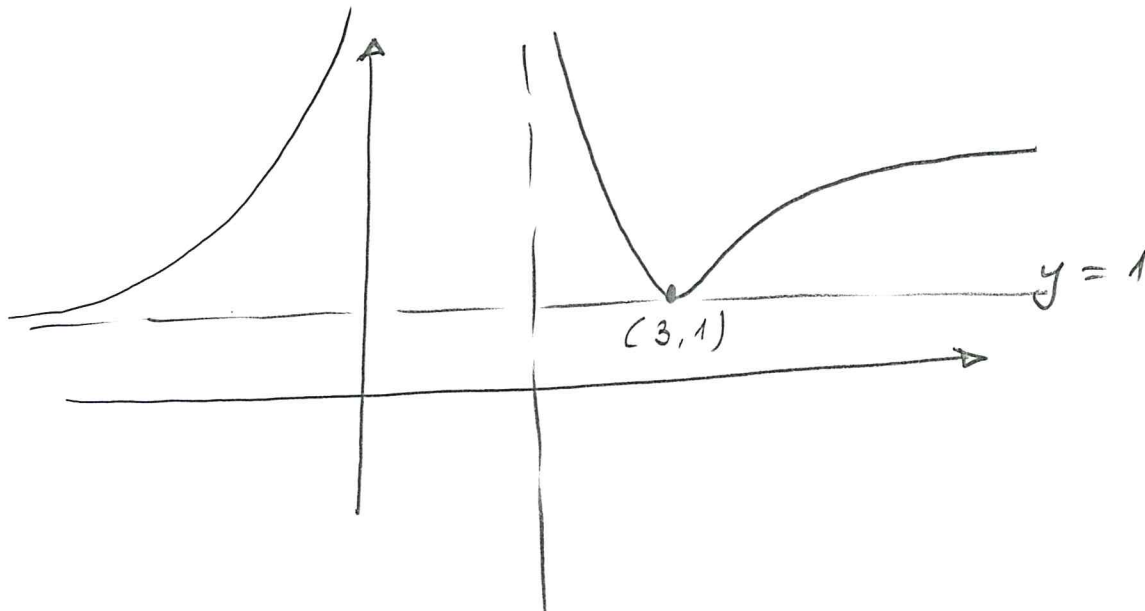
$$\boxed{a=1}$$

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$$



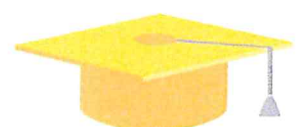
$$g(x) = |f(x) + k|$$

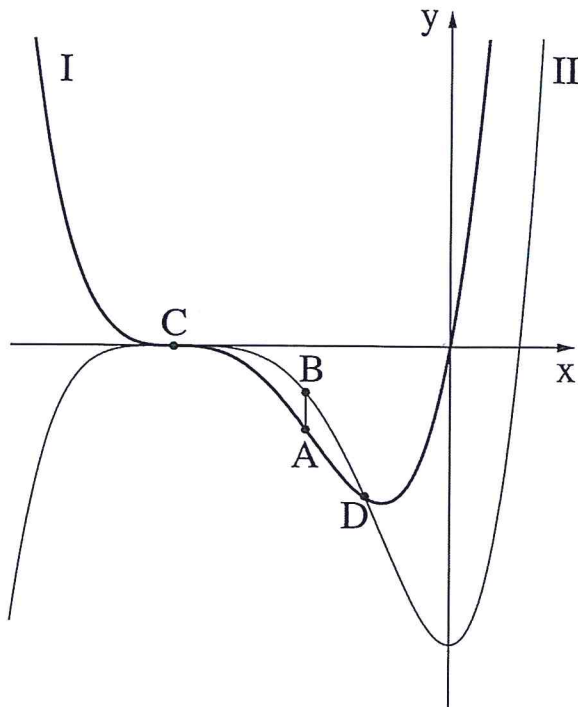
3

 $y=1$ נשקף $g(x)$

 $x=2$ $f(3)=0$ כי קיזם

$$g(3) = |f(3) + k| = 1 \Rightarrow |k| = 1$$

$$k = 1 \quad k = -1$$





7. לפניך הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$.

א. התאם בין הגרפים I ו-II

לבין הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$. נמק.

נתון: $f'(x) = x(x+b)^3$, $b > 1$ הוא פרמטר.

לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול ב- $x = -1$.

ב. מצא את b .

C ו-D הן נקודות החיתוך

של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$

בתחום $x < 0$, כמתואר בציור.

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים I ו-II

בהתאמה, כך שהישר AB מאונך לציר ה- x .

נתון: $x_C < x_A < x_D$,

$x_C = -4$,

$x_D = 1 - \sqrt{5}$.

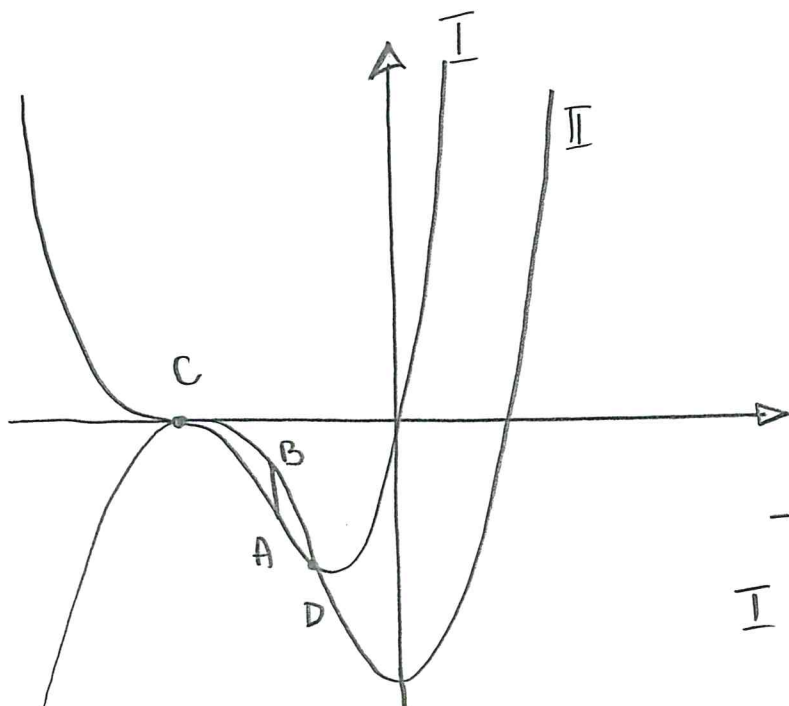
ג. מצא את שיעור ה- x של הנקודות A ו-B שעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי

(אפשר לפתור את הסעיף בלי למצוא את הפונקציה $f(x)$).



(7)

(k)



התמונה חלוקה לשלוש אזורים I, II, III
 בהם אנו מחפשים נקודות קיצון של f(x)

	$x < x_c$	$x = x_c$	$x > x_c$	$x = 0$	$x > 0$
I	+	0	-	0	+
II	↗	max	↘	min	↗

 $\Downarrow$

$f'(x)$ - I , $f(x)$ - II

$$f'(x) = x(x+b)^3, \quad b > 1$$

(2)

f'(x) יש נק' כיתה $x = -1$

 $\Downarrow$

$$f''(-1) = 0$$

$$f''(x) = 1(x+b)^3 + 3(x+b)^2 \cdot x$$

$$(b-1)^3 + 3 \cdot (-1) \cdot (b-1)^2 = 0$$

$$(b-1)^2 [b-1-3] = 0$$

$$(b > 1) \quad b \neq 1$$

$$b-4=0 \Rightarrow$$

$$b = 4$$





$$AB \parallel \gamma$$

$$X_C < X_A < X_D$$

$$X_C = -4$$

$$X_D = 1 - \sqrt{5} = -1.24$$

$$g(x) = \left. \begin{array}{l} \text{הנקודה} \\ \text{AB} \end{array} \right\} \text{הנקודה}$$

$$g(x) = f(x) - f'(x)$$

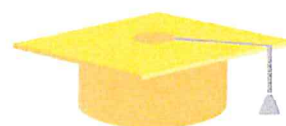
$$g'(x) = f'(x) - f''(x)$$

$$f'(x) = x(x+4)^3$$

$$f''(x) = (x+4)^3 + 3(x+4)^2 \cdot x$$

$$f''(x) = (x+4)^2 [x+4 + 3x]$$

$$f''(x) = (x+4)^2 (4x+4)$$





$$f'(x) = x(x+4)^3 - (x+4)^2(4x+4) = 0$$

$$(x+4)^2 [x(x+4) - 4x - 4] = 0$$

$$(x+4)^2 (x^2 - 4) = 0$$

$$\downarrow$$

$$x+4=0$$

$$x \neq -4$$

$$\Rightarrow x^2 = 4$$

$$x \neq 2$$

$$x = -2$$

$$-4 < x < 1 - \sqrt{5}$$

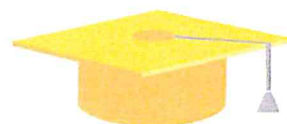
$$f''(x) = (x^2 - 4)' = 2x$$

$$f''(-2) = 2 \cdot (-2) < 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = -2 \text{ מקסימום}$$

$$x_A = x_B = -2$$



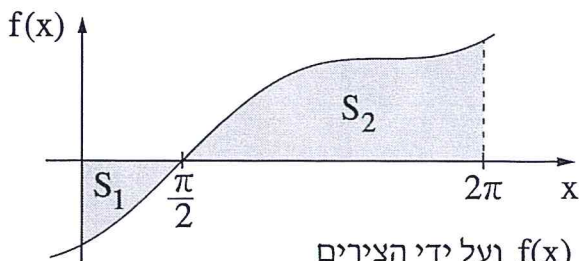
8. $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x .

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y בחלקו השלילי.

נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x היא $(\frac{\pi}{2}, 0)$ (ראה ציור).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הצירים ועל ידי הישר $x = 2\pi$

(השטח האפור בציור) שווה ל- $10\pi^2 + 16$.



נתון גם: $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 8\pi^2$.

א. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים

(השטח S_1 המסומן בציור).

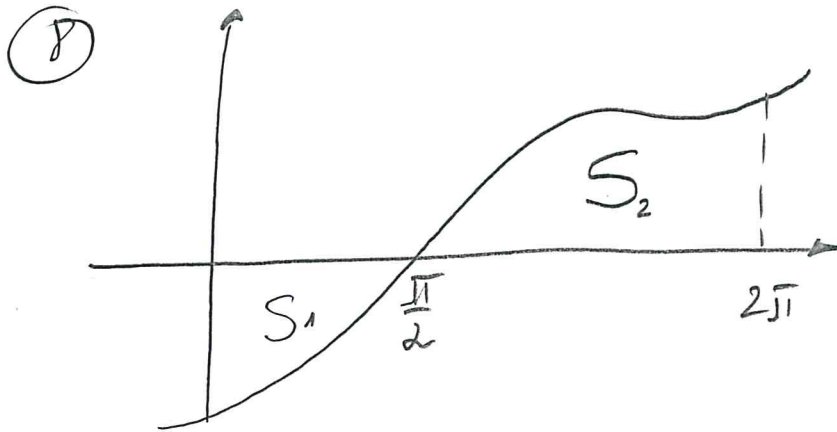
הפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$. נתון: $F(0) = 0$.

ב. מצא את $F(\frac{\pi}{2})$.

נתון: $f'(x) = 8 \sin x + 8$.

ג. מצא את $f(x)$.





$$I \quad S_1 + S_2 = 10\pi^2 + 16 \quad \underline{\text{נכון}}$$

$$II \quad \int_0^{2\pi} f(x) dx = 8\pi^2$$

$$F'(x) = f(x) \quad \text{ב'טווח}$$

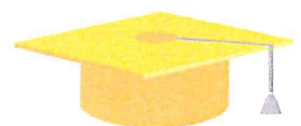
$$I \quad S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} f(x) dx =$$

$$= -F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(0) + F(2\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -2F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(0) + F(2\pi) = 10\pi^2 + 16$$

$$II \quad \int_0^{2\pi} f(x) dx = F(2\pi) - F(0) = 8\pi^2$$

$$F(2\pi) = F(0) + 8\pi^2$$



נמצא את I

$$-2F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(0) + F(0) + 8\pi^2 = 10\pi^2 + 16$$

$$-2F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2F(0) = 2\pi^2 + 16 \quad /:(2)$$

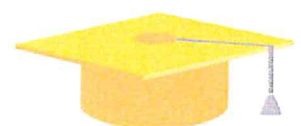
$$-F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(0) = \pi^2 + 8$$

$$\Downarrow$$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -f(x) dx = -F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(0)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{S_1 = \pi^2 + 8}$$



$$\textcircled{2} \quad F'(x) = f(x)$$

$$F(0) = 0$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$$

$$-F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(0) = \pi^2 + 8$$

כך נקרא

$$-F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0 = \pi^2 + 8$$

$$\boxed{F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi^2 - 8}$$

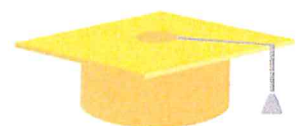
$$\textcircled{3} \quad f'(x) = 8 \sin x + 8$$

$$f(x) = \int (8 \sin x + 8) dx = -8 \cos x + 8x + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow -8 \cos \frac{\pi}{2} + 8 \cdot \frac{\pi}{2} + C = 0$$

$$C = -4\pi$$

$$\boxed{f(x) = -8 \cos x + 8x - 4\pi}$$



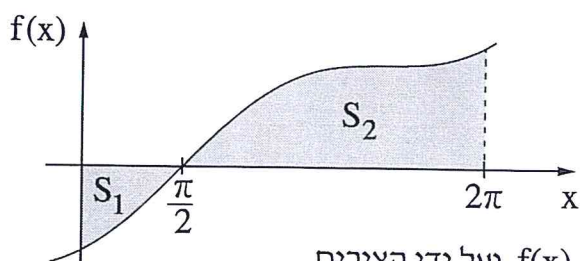
8. $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x .

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y בחלקו השלילי.

נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x היא $(\frac{\pi}{2}, 0)$ (ראה ציור).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הצירים ועל ידי הישר $x = 2\pi$

(השטח האפור בציור) שווה ל- $10\pi^2 + 16$.



נתון גם: $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 8\pi^2$.

א. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים

(השטח S_1 המסומן בציור).

הפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$. נתון: $F(0) = 0$.

ב. מצא את $F(\frac{\pi}{2})$.

נתון: $f'(x) = 8 \sin x + 8$.

ג. מצא את $f(x)$.



א. השטח הזור הוא סופר השטחים:

$$S_1 + S_2 = 10\pi^2 + 16 \quad (1)$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) = 8\pi^2 \quad \text{נח/נ/}:$$

האינטגרל למעלה הוא הפוס השטחים:

$$S_2 - S_1 = 8\pi^2 \quad (2)$$

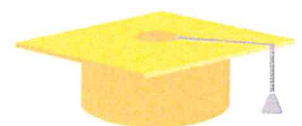
נכונות אלה הן נכונות:

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = 10\pi^2 + 16 \\ S_2 - S_1 = 8\pi^2 \end{cases} \quad / -$$

↓

$$2S_1 = 2\pi^2 + 16$$

$$\boxed{S_1 = \pi^2 + 8}$$



$$F(0) = 0$$

ב. נר' / ט'

: '1' פ' 0' 8'

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -f(x) dx = \pi^2 + 8$$

$$-F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(0) = \pi^2 + 8$$

$$\boxed{F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi^2 - 8}$$

$$f'(x) = 8 \sin x + 8$$

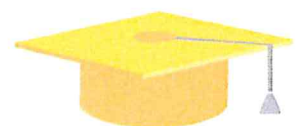
ד. נ' / ט'

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (8 \sin x + 8) dx$$

$$f(x) = -8 \cos x + 8x + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$0 = -8 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 8 \cdot \frac{\pi}{2} + C$$



$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ C = -4\pi \\ \Downarrow \end{array}$$

$$f(x) = -8\cos x + 8x - 4\pi$$

