

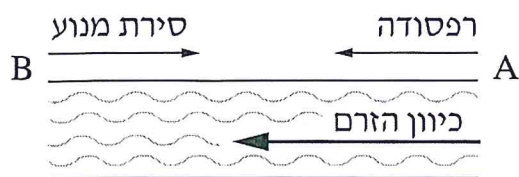
פתרון הבחינה במתמטיקה

קיץ תשע"ז, 2017, מועד ב, שאלון: 35581 עפ"י תכנית הרפורמה ללמידה משמעותית.
שאלון ראשון מ- 5 יח"ל.
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





1. העיירות A ו-B נמצאות על גדת נהר הזרם במהירות קבועה. כיוון הזרם הוא מ-A ל-B. מן העיירה B יצאה סירת מנוע לכיוון העיירה A. הסירה שטה נגד כיוון הזרם. באותו הזמן יצאה רפסודה מן העיירה A לכיוון העיירה B. הרפסודה שטה עם כיוון הזרם.

- מהירות סירת המנוע במים עומדים היא קבועה וגדולה פי 4 ממהירות הזרם של הנהר. מהירות הרפסודה במים עומדים היא אפס. במים זורמים הרפסודה שטה עם הזרם. הסירה והרפסודה נפגשו 3 שעות ו-45 דקות אחרי יציאתן לדרך והמשיכו בדרכן. סירת המנוע הגיעה לעיירה A ומיד הסתובבה ושטה בחזרה לעיירה B. כאשר סירת המנוע הגיעה לעיירה B, הרפסודה הייתה במרחק של 35 ק"מ מן העיירה B.
- א. חשב את מהירות הזרם ואת מהירות סירת המנוע במים עומדים.
- ב. בדרך חזרה לעיירה B פגשה סירת המנוע את הרפסודה בפעם השנייה. כמה זמן עבר מרגע יציאתה של הרפסודה מן העיירה A עד שהסירה והרפסודה נפגשו בפעם השנייה?



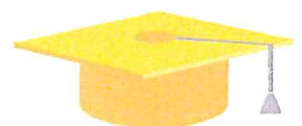
כ נסמן את מהירות הכדור V
 נציב את הנתונים בטבלה הבאה כאשר $q = 15 \mu\text{C}$

מהירות	q	מהירות	q
רפואה	$\left(\frac{15}{4} \cdot V \right)$	V	$\frac{15}{4}$
ס' $B \rightarrow A$	$\left(\frac{45}{4} \cdot V \right)$	$3V$	$\frac{15}{4}$
ס' $B \rightarrow A$	$\frac{15}{4}V - \frac{45}{4}V = 15V$	$3V$	(5)
ס' $A \rightarrow B$	$15V$	$5V$	(3)
רפואה	$15V - 35$	V	$5 + 3 = 8$

$$15V - 35 = 8V \rightarrow V = 5$$

מהירות הכדור $V = 5$

מהירות הס' $4V = 20$



קיבלתי בדיקת בדיקת, סדר הנושא שאלה 5 שאלה
 בשאלה 5 הרכיב של הנושא שאלה 5: $S = V \cdot t = 5 \cdot 5 = 25$
 בדיקת הנושא שאלה 5 שאלה 5
 הרכיב של הנושא שאלה 5

לכן סדר הנושא שאלה 5 שאלה 5
 הרכיב של הנושא שאלה 5

$$25t = 5t + 25$$

$$t = 1 \frac{1}{4} \text{ שעות}$$

לכן סדר הנושא שאלה 5 שאלה 5
 הרכיב של הנושא שאלה 5

$$5 + 1 \frac{1}{4} = 6 \frac{1}{4} \text{ שעות}$$



2. נתונה סדרה כללית a_n .

נסמן ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n .

נתון: $S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}}$ לכל n טבעי. k הוא מספר קבוע.

א. הבע את a_1 ואת האיבר הכללי a_n עבור $n > 1$ באמצעות n ו- k במידת הצורך.

ב. מצא את k שעבורו הסדרה a_n היא סדרה הנדסית. נמק.

נגדיר: $T = a_2^2 + a_5^2 + a_8^2 + \dots$ (סכום ריבועי כל איבר שלישי בסדרה a_n החל ב- a_2).

ג. חשב את T .

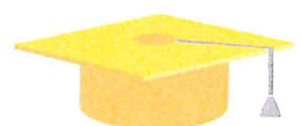
$$a_1 = S_1 = k - \frac{1}{3^2} = k - \frac{1}{9} \rightarrow \boxed{a_n = k - \frac{1}{9}} \quad \underline{\underline{k}}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \left(k - \frac{1}{3^{n+1}}\right) - \left(k - \frac{1}{3^n}\right) =$$

$$= \frac{-1}{3 \cdot 3^n} + \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^{n+1}} \rightarrow \boxed{a_n = \frac{2}{3^{n+1}}}$$

נראה שאין לסדרה הנדסה היא כי היחס בין a_n איברים סמוכים היא תמיד קבוע:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}$$



בפרט נראה בין האיבר השני לאיבר הראשון:

$$\frac{1}{3} = q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{2}{3^3}}{k - \frac{1}{9}} = \frac{2}{27k - 3} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{27k - 3}$$

$$27k - 3 = 6$$

$$\boxed{k = \frac{1}{3}}$$

נראה שיש ביחס בין הסדרה הבנויה להיבדוק. כל איבר בסדרה a_n הוא סדרה הנדסית בסדרה q נמצא:

$$q^* = \frac{a_n^2}{a_{n-3}^2} = \left(\frac{a_n}{a_{n-3}} \right)^2 = \left(\frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^{n-2}}} \right)^2 = \frac{1}{27^2}$$

האיבר הראשון בסדרה T הוא a_2^2 :

$$a_1^* = a_2^2 = \left(\frac{2}{3^{2+1}} \right)^2 = \frac{4}{27^2}$$

לפי הסכום האינסופי איברי הסדרה הנדסית מתכנסת:

$$T = \frac{-a_1^*}{q^* - 1} = \frac{\frac{-4}{27^2}}{\frac{1}{27^2} - 1} = \frac{1}{182} \rightarrow \boxed{T = \frac{1}{182}}$$





3. בקופסה I יש 10 כדורים, כמה מהם כחולים והשאר אדומים, ובקופסה II יש 7 כדורים כחולים ו-3 כדורים אדומים. מוציאים באקראי כדור מקופסה I. אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II. אם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I. שוב מוציאים באקראי כדור מקופסה I, ושוב, אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II, ואם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I. לאחר מכן מוציאים באקראי כדור אחד מקופסה II. א. נתון כי ההסתברות שאחרי שתי ההוצאות מקופסה I יועבר כדור אדום אחד בלבד מקופסה I לקופסה II היא $\frac{19}{36}$. חשב את מספר הכדורים הכחולים שהיו בקופסה I לפני ההוצאה הראשונה. ענה על הסעיפים ב-ג עבור מספר הכדורים הכחולים שחישבת בסעיף א. ב. מהי ההסתברות שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום? ג. ידוע שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום. מהי ההסתברות שאחרי שהוציאו את הכדור האדום מקופסה II נשארו בה שלושה כדורים אדומים בדיוק?

1c $\frac{19}{36} = x - \text{כחולים} - 3 \text{ אדומים}$ בקופסה I

דופסה II :

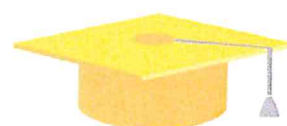
7 - כחול

3 - אדום

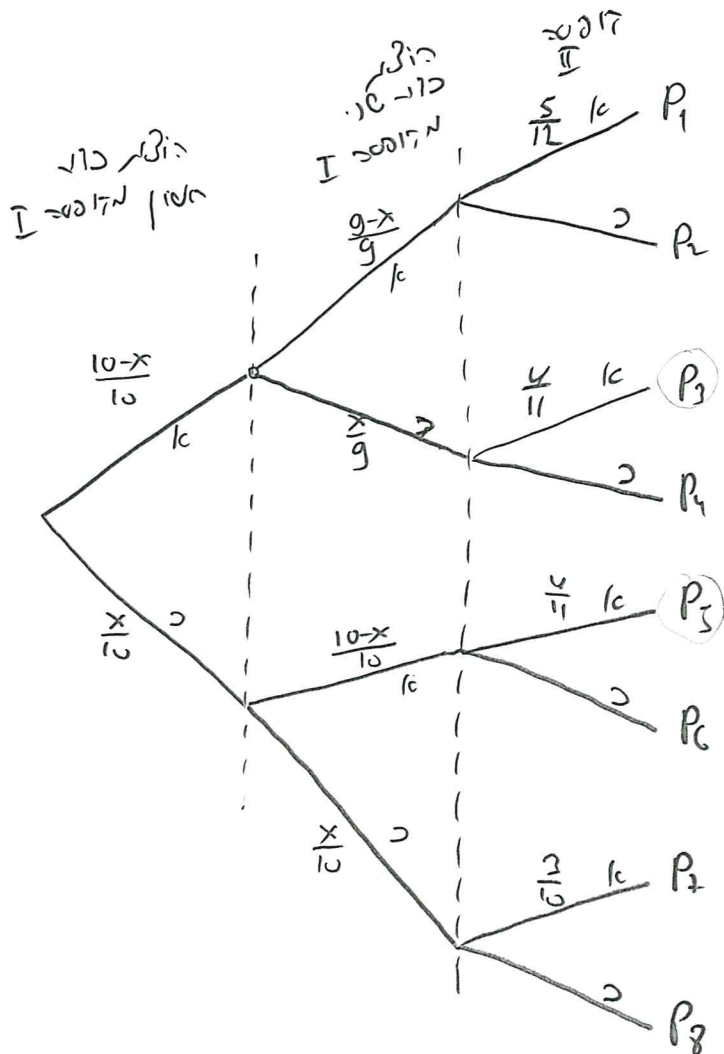
דופסה I :

x - כחול

10 - x - אדום



נניח את פירוש האפשרות בעלת היתאגרות של הבא:



$$\frac{10-x}{10} \cdot \frac{x}{9} + \frac{x}{10} \cdot \frac{10-x}{10} = \frac{19}{36}$$

$$x(10-x) \cdot \frac{19}{900} = \frac{19}{36}$$

$$x(10-x) = 25 \rightarrow 0 = x^2 - 10x + 25 \rightarrow x = 5$$

5 כור-ים בחזו"ם



2 הסתברות לזכות אדום עם יענוף בעל התואר בראש השנה:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{4271}{11880} = 0.3595$$

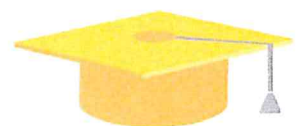
הסתברות לזכות אדום להיפסד II : 0.3595

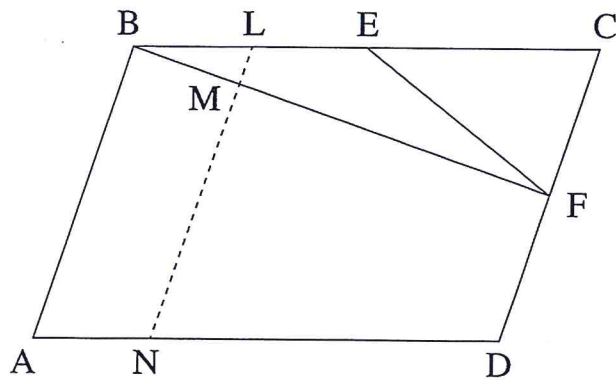
3 נשאל בנושא להסתברות התואר:

$$P\left(\frac{\text{נשאל 3 אדום} / \text{נשאל 3 אדום}}{\text{נשאל 3 אדום}}\right) = \frac{P(\text{נשאל 3 אדום} \cap \text{נשאל 3 אדום})}{P(\text{נשאל 3 אדום})} = \frac{P_3 + P_5}{P(\text{נשאל 3 אדום})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{11}}{\frac{4271}{11880}} = \frac{2280}{4271} = 0.5338$$

הסתברות שנשאל 3 אדום
אם יזיח שזיזו כזה אדום

0.5338


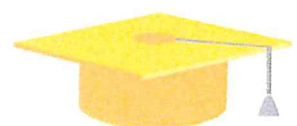
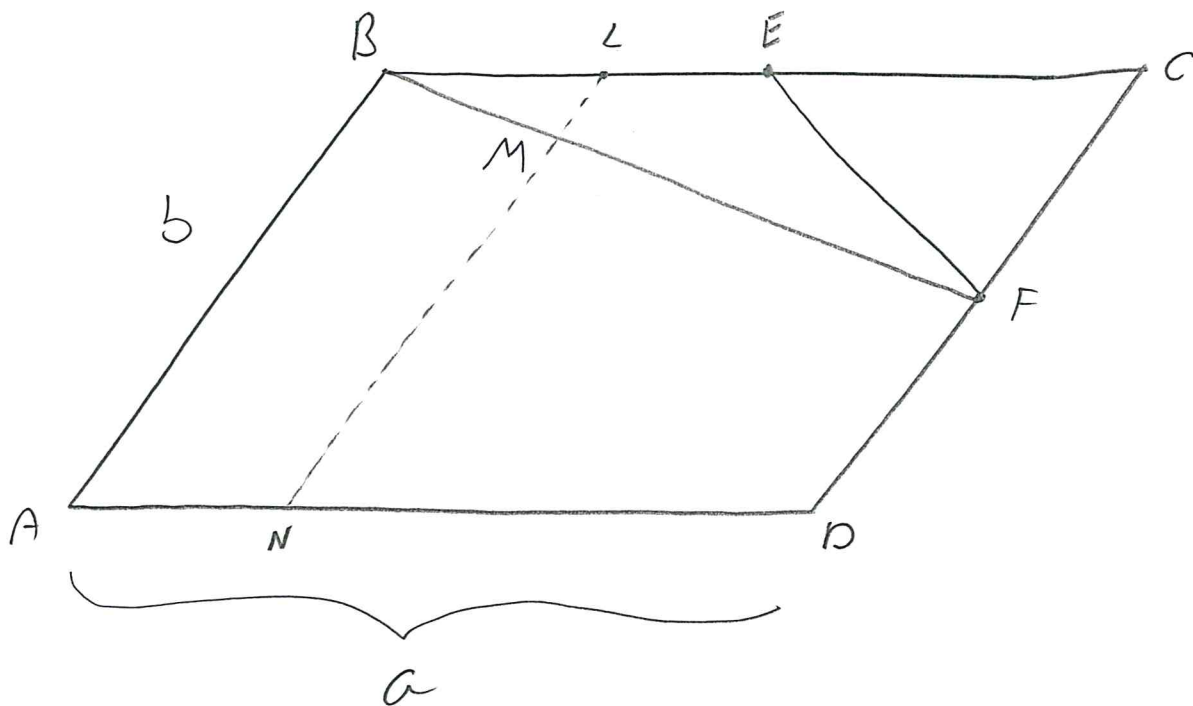


4. המרובע ABCD הוא מקבילית.
 הזווית A היא זווית חדה.
 הנקודה E היא אמצע הצלע BC
 והנקודה F היא אמצע הצלע CD
 (ראה ציור).

א. שטח המשולש ECF הוא S.
 הבע את שטח המקבילית ABCD
 באמצעות S. נמק את תשובתך.

ב. הנקודה L היא אמצע הקטע BE.
 דרך הנקודה L העבירו ישר המקביל ל-AB וחותך את BF ואת AD
 בנקודות M ו-N בהתאמה.
 חשב את היחס $\frac{LM}{MN}$.

ג. נתון $BE = EF$.
 האם אפשר לחסום את המרובע ABFD במעגל? נמק את קביעתך.



תיכון

$$\begin{aligned} & \text{BC זלע אהרע E} \quad (1) \\ & \text{CD זלע אהרע F} \\ & \text{ABCD מקביל} \\ & S_{\triangle CEF} = S \end{aligned}$$

סימון

יזכר מהולדון F ב-Δ
 והצע לאהרע זלע שמשו, לפי (1)
 תיכון מתקן ב Δ לפני סימון
 שוו שטח + סימון

$$AB = b, AD = a \quad (2)$$

$$\triangle BCF \text{ תיכון } FE \quad (3)$$

$$S_{\triangle BEF} = S_{\triangle ECF} = S \quad (4)$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle CBF} &= S_{\triangle BEF} + S_{\triangle ECF} = \\ &= S + S = 2S. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\triangle BCD \text{ תיכון } BF \quad (6)$$

$$S_{\triangle BDF} = S_{\triangle BCF} = 2S \quad (7)$$

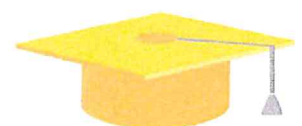
$$S_{\triangle BCD} = 2S + 2S = 4S \quad (8)$$

$$BC = AD \quad (9)$$

$$AB = CD \quad (10)$$

יזכר מהולדון B ב-Δ
 והצע לאהרע זלע שמשו, לפי (1)
 תיכון מתקן ב Δ לפני סימון
 שוו שטח + סימון (5)

צלעות נגדיות במקביל שוו זה
 לפי, שוו (1)
 צלעות נגדיות במקביל שוו זה לפי,
 שוו (1)





כל שווה לעצמו

לפי משפט חסימה 33.3

שורה (9) (10) (11)

זוג חופפים, לכן שווה שטח
+ שורה (8)

נניח

כלומר שני הקדקודים מקבילים זה לזה

כלל המעבר לשוויון (15) - (16)

דלג. יש לה מקבילים, מקבילים זה לזה

נניח $\angle$ אולם BE וסימון.

שורה (2) - (15)

$$BD = DB \quad (11)$$

$$\triangle BCD \cong \triangle DAB \quad (12)$$

$$S_{\triangle BAD} = S_{\triangle DAB} = 4S \quad (13)$$

$$S_{ABCD} = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle BAD} = \quad (14)$$

$$= 4S + 4S = 8S$$

$$\boxed{S_{ABCD} = 8S} \quad \text{כנ"ס א'}$$

$$\angle N \parallel BA \quad (15)$$

$$BE \text{ זווית} \quad (16)$$

$$AB \parallel CD$$

$$\angle N \parallel CB \quad (17)$$

$$\angle M \parallel CF \quad (18)$$

$$BL = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} BC = \frac{1}{4} a \quad (19)$$



שורה ① ו-②

לפי המשפט הזווית אלכסון

בשורה ① $LM \parallel CF$ שורה ②

בשורה ③ שורה ④ ו-⑤

הזוויות הקטנות, הזוויות
הגדולות

שורה ⑥ שורה ⑦
שורה ⑧ שורה ⑨ ו-⑩
שורה ⑪ שורה ⑫

בשורה ⑬ שורה ⑭ ו-⑮

$$CF = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} b \quad (20)$$

$$\frac{BL}{BC} = \frac{LM}{CF} \quad (21)$$

$$\frac{\frac{1}{4}a}{a} = \frac{LM}{\frac{1}{2}b} \quad (22)$$

$$LM = \frac{1}{8}b$$

$$BL \parallel AN \quad (23)$$

$$AB \parallel LN \quad (24)$$

$$ABLN \text{ מלבן} \quad (25)$$

$$LN = AB = b \quad (26)$$

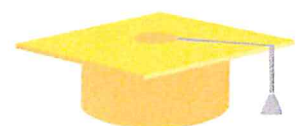
$$MN = LN - LM = \quad (27)$$

$$= b - \frac{1}{8}b = \frac{7}{8}b$$

$$\frac{LM}{MN} = \frac{\frac{1}{8}b}{\frac{7}{8}b} = \frac{1}{7} \quad (28)$$

$$\boxed{\frac{LM}{MN} = \frac{1}{7}}$$

כנראה
שגוי





נתון + סימון שווה (1) - (2)

נתון + סימון

משנה (29) - (30)

אלמ ב-ד, היכון עקלע שוב
 ערצי מהלע, אתי בלע כו היי
 היי ב-ד יס זוו

זוו יס ב-ד יס זוו

משלים עזוו סלוח.

נתון

לפי שווה (34) - (35)

$$BE = EC = \frac{1}{2} BC \quad (29) \quad \parallel$$

$$BE = EF = \frac{1}{2} BC \quad (30)$$

$$EF = \frac{1}{2} BC \quad (31)$$

$$\triangle BFC \text{ יס זוו} \quad (32)$$

$$\angle BFC = 90^\circ \quad (33)$$

$$\angle BFD = 90^\circ \quad (34)$$

$$\angle A \text{ זוו חזק} \quad (35)$$

$$\angle BFD + \angle A < 180^\circ \quad (36)$$

$$\text{סכום זוו זרז, זרז, זרז} \quad (37)$$

$$\angle - 180^\circ \text{ לכן לא נתי}$$

חטום מרובע כח חזק משל

כח חזק



5. ABCD הוא טרפז חסום במעגל ($AB \parallel DC$).

נתון: $AB = a$, $CD = b$ ($a < b$).

$\angle C = 60^\circ$.

א. הבע את שוקי הטרפז, BC ו-AD, באמצעות a ו-b.

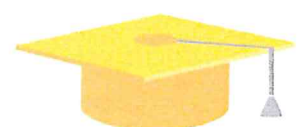
נתון: $a = 4$, אורך האלכסון BD הוא $4\sqrt{7}$.

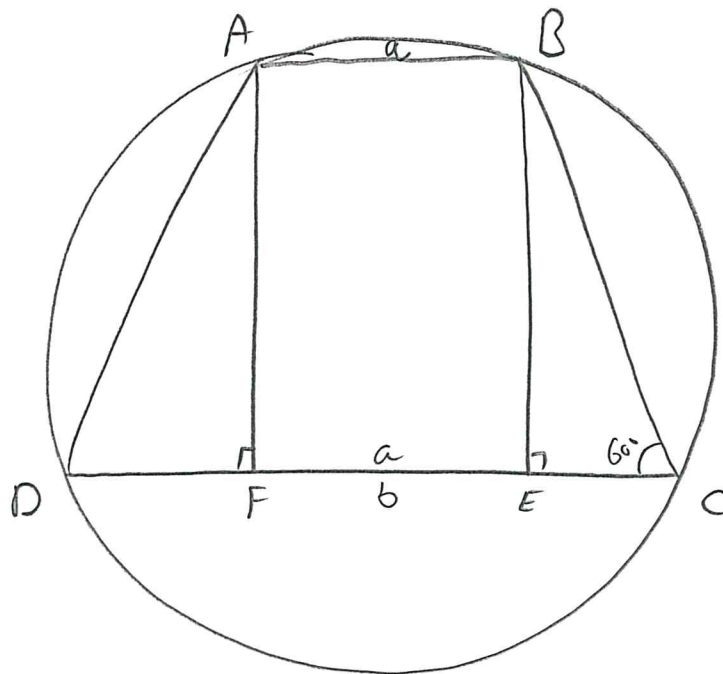
ב. חשב את b.

ג. (1) R הוא רדיוס המעגל החוסם את הטרפז. מצא את R.

(2) הסבר מדוע אפשר לחסום מעגל בטרפז ABCD.

(3) r הוא רדיוס המעגל החסום בטרפז. מצא את r.




 5. א

$AD = BC$ - חסוב במשולש כינו חסוב שווה

$BE + AF$ - כינור וזהה מודולריות חסוב

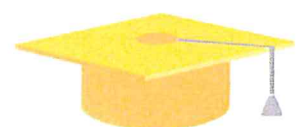
3.3.3 $\triangle AFD \cong \triangle BEC$ - דפי משפט

$DF = CE$ - צלעות מתאימות במשולשים חופפים שווה זה לשו.

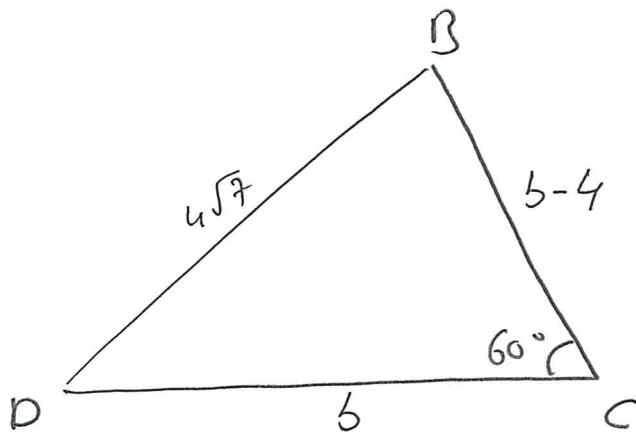
$DF = CE = \frac{b-a}{2}$ - זהבא על בסיס חסוב.

$\angle ECB = 30^\circ$ - האמה ד - 180° ב $\triangle BEC$

$BC = 2EC$ - בעדי ד יש צוויר, הצלע מול הצוויר 30°
 שוב לחצי מהמה.



$$AD = BC = b - a \quad : \text{ע"כ}$$



211

 ע"פ משלל הוסינוס : ΔABC

$$(4\sqrt{7})^2 = b^2 + (b-4)^2 - 2 \cdot b \cdot (b-4) \cdot \cos 60^\circ$$

$$112 = 2b^2 + 16 - 8b - b(b-4)$$

$$112 = 2b^2 + 16 - 8b - b^2 + 4b$$

$$0 = b^2 - 4b - 96$$

$$b = 12$$

~~$$b = -8$$~~



ל (1) עפי' משל' הסיוסם $\triangle BDC$:

$$\frac{BD}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow \boxed{R = 6.11}$$

(2) הגנאי לחסל' משל' במחבץ הוא כי סכום כלואר נלגיון שוה לסכום כלואר נלגיון:

$$AB + CD = AD + BC$$

$$a + b = (b - a) \cdot 2$$

$$3a = b$$

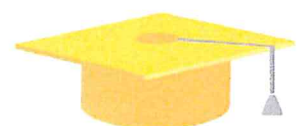
$$3 \cdot 4 = 12 \Rightarrow 12 = 12$$

קיבלנו משל' אחר עפ"י ניתן לחסום משל' בלחץ ABCD

(3) לוקח' לחסום שוה עדיטה המשל' החסום

$$\frac{BE}{BC} = \sin 60^\circ \quad \text{עפ"י } \triangle BEC$$

$$\frac{2r}{b-a} = \sin 60^\circ \Rightarrow \frac{2r}{12-4} = \sin 60^\circ \Rightarrow \boxed{r = 2\sqrt{3}}$$





6. נתונה הפונקציה $f(x) = a - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$. a הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה- x .

ב. מצא את a .

הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x) + k|$.

ידוע שגרף הפונקציה $g(x)$ משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $f(x)$.

מצא את k (מצא את שתי האפשרויות). נמק את תשובתך.



$$f(x) = a - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} \quad (6)$$

תחום ההגדרה (1) (7)

$$x-2 \neq 0$$

$$\boxed{x \neq 2}$$

אסימטות (2)

אופקית	אנכית
$x \rightarrow \pm\infty \quad y \rightarrow a$ $y = a$	$x = 2$ מאפס יקרא האכנה

$\frac{A}{(x-2)^n} \rightarrow 0$

נק' קיצון (3)

$$f'(x) = \frac{2}{(x-2)^2} - \frac{2(x-2)}{(x-2)^4} = 0 \quad / \cdot (x-2)^4 > 0$$

$$2(x-2)^2 - 2(x-2) = 0 \quad / : 2$$

$$(x-2)^2 - (x-2) = 0$$

$$(x-2)[x-2-1] = 0$$



$$(*) \quad (x-2)(x-3)=0$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ x \neq 2 & & x = 3 \end{array}$$

לפי המילים
יהיה עכבה

$$f(3) = a - \frac{2}{3-2} + \frac{1}{(3-2)^2} = a - 2 + 1 = a - 1$$

$(3, a-1)$ "חשופה"

כ"ף ק' צין

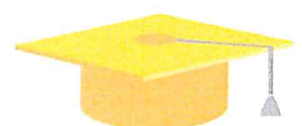
	$x < 2$	2	$2 < x < 3$	3	$x > 3$
x	(0)		(2.5)		(4)
f'	+		-		+
f	$\nearrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

$(*)$ נצ'ם באונג
 על f' כ'
 השכנה ח'וה
 לכל x מחוץ
 להספקה

$$f'(0) > 0 \quad f'(2.5) < 0 \quad f'(4) > 0$$

$$\boxed{(3, a-1) \text{ מ'נ'חוס}}$$

(1) $x < 2$: כ'ן עולה עבוק ; $x > 3$: כ'נ' יורדת עבוק ; $2 < x < 3$: כ'ן עולה עבוק ; (4)



נתון: $f(x)$ נשקף לזכ x



$(3,0)$ נק' ההסקה

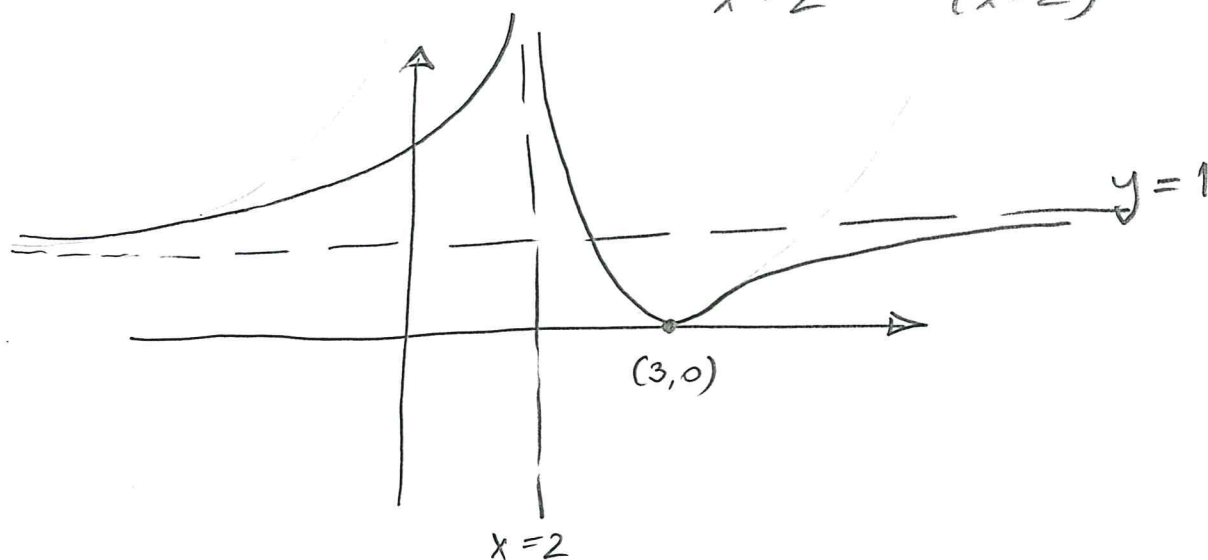
שפ'ג נק' קיצון



$$a-1=0$$

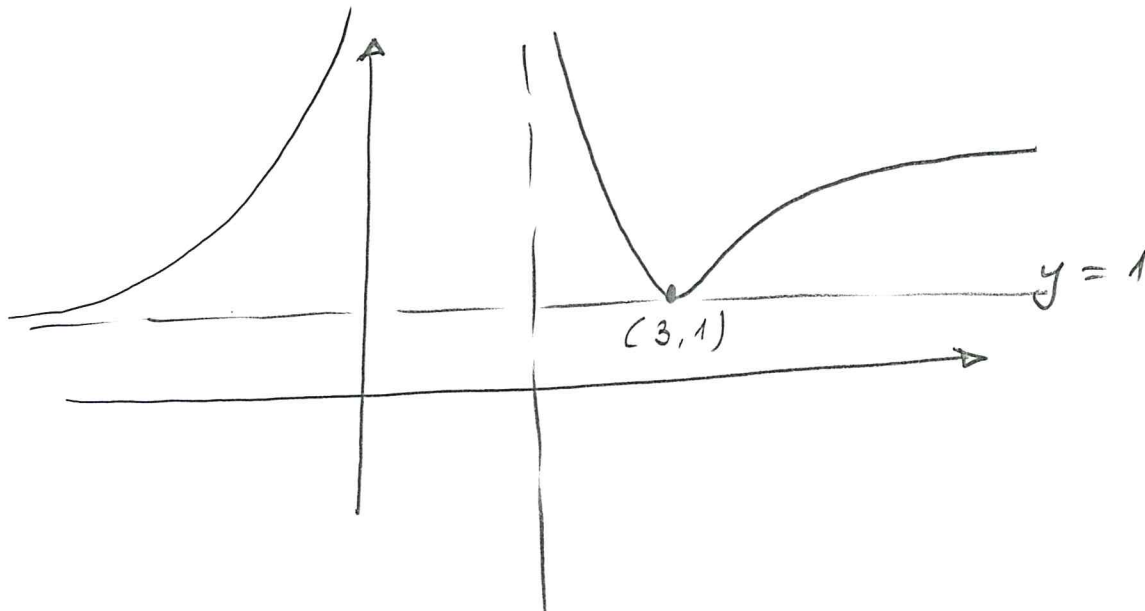
$$\boxed{a=1}$$

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$$



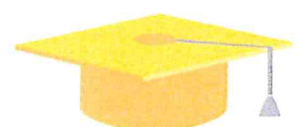
$$g(x) = |f(x) + k|$$

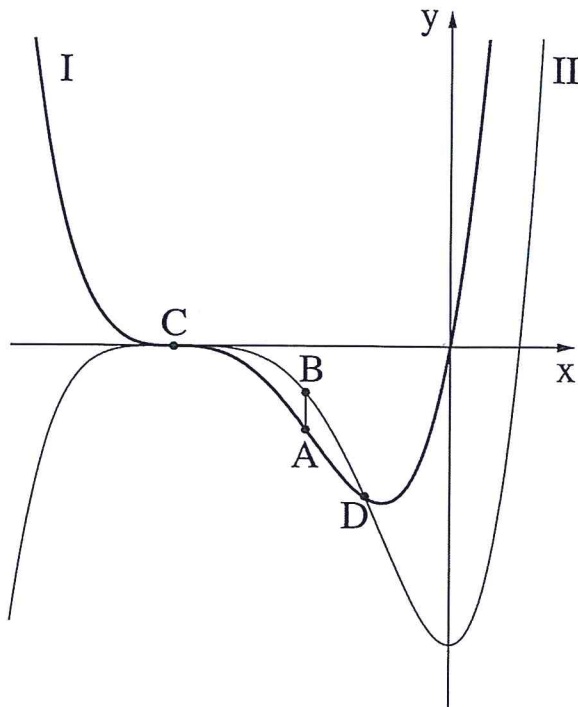
3

 $y=1$ נשקף $g(x)$

 $x=2$ $f(3)=0$ כי קיזם

$$g(3) = |f(3) + k| = 1 \Rightarrow |k| = 1$$

$$k = 1 \quad k = -1$$





7. לפניך הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$.

א. התאם בין הגרפים I ו-II

לבין הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$. נמק.

נתון: $f'(x) = x(x+b)^3$, $b > 1$ הוא פרמטר.

לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול ב- $x = -1$.

ב. מצא את b .

C ו-D הן נקודות החיתוך

של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$

בתחום $x < 0$, כמתואר בציור.

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים I ו-II

בהתאמה, כך שהישר AB מאונך לציר ה- x .

נתון: $x_C < x_A < x_D$,

$$x_C = -4$$

$$x_D = 1 - \sqrt{5}$$

ג. מצא את שיעור ה- x של הנקודות A ו-B שעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי

(אפשר לפתור את הסעיף בלי למצוא את הפונקציה $f(x)$).





$$AB \parallel \gamma$$

$$x_c < x_A < x_D$$

$$x_c = -4$$

$$x_D = 1 - \sqrt{5} = -1.24$$

$$g(x) = \text{הנקודה } AB \text{ על } \gamma$$

$$g(x) = f(x) - f'(x)$$

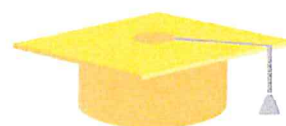
$$g'(x) = f'(x) - f''(x)$$

$$f'(x) = x(x+4)^3$$

$$f''(x) = (x+4)^3 + 3(x+4)^2 \cdot x$$

$$f''(x) = (x+4)^2 [x+4 + 3x]$$

$$f''(x) = (x+4)^2 (4x+4)$$





$$f'(x) = x(x+4)^3 - (x+4)^2(4x+4) = 0$$

$$(x+4)^2 [x(x+4) - 4x - 4] = 0$$

$$(x+4)^2 (x^2 - 4) = 0$$

$$\downarrow$$

$$x+4=0$$

$$x \neq -4$$

$$\Rightarrow x^2 = 4$$

$$x \neq 2$$

$$x = -2$$

$$-4 < x < 1 - \sqrt{5}$$

$$f''(x) = (x^2 - 4)' = 2x$$

$$f''(-2) = 2 \cdot (-2) < 0$$

$$\downarrow$$

$$x = -2 \text{ מקסימום}$$

$$x_A = x_B = -2$$



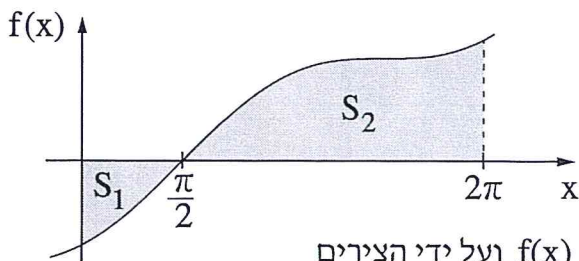
8. $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x .

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y בחלקו השלילי.

נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x היא $(\frac{\pi}{2}, 0)$ (ראה ציור).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הצירים ועל ידי הישר $x = 2\pi$

(השטח האפור בציור) שווה ל- $10\pi^2 + 16$.



נתון גם: $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 8\pi^2$.

א. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים

(השטח S_1 המסומן בציור).

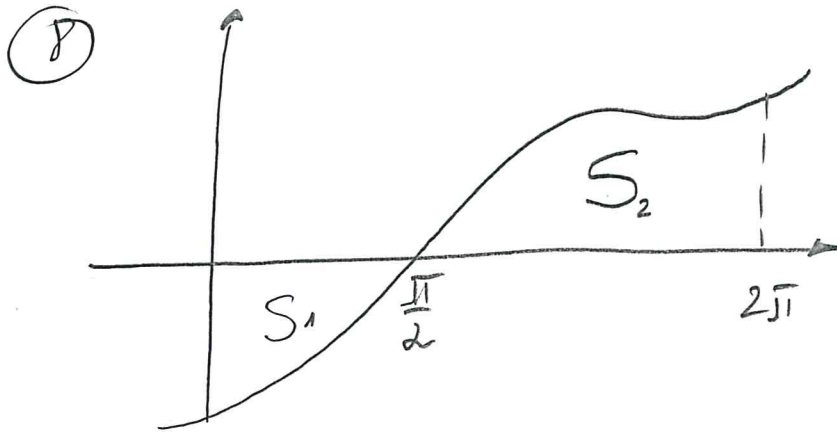
הפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$. נתון: $F(0) = 0$.

ב. מצא את $F(\frac{\pi}{2})$.

נתון: $f'(x) = 8 \sin x + 8$.

ג. מצא את $f(x)$.





$$\text{I} \quad S_1 + S_2 = 10\pi^2 + 16 \quad \underline{\text{נתון}}$$

$$\text{II} \quad \int_0^{2\pi} f(x) dx = 8\pi^2$$

$$F'(x) = f(x) \quad \text{ב'טווח}$$

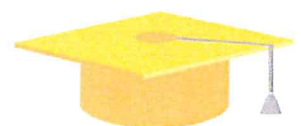
$$\text{I} \quad S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} f(x) dx =$$

$$= -F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(0) + F(2\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -2F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(0) + F(2\pi) = 10\pi^2 + 16$$

$$\text{II} \quad \int_0^{2\pi} f(x) dx = F(2\pi) - F(0) = 8\pi^2$$

$$F(2\pi) = F(0) + 8\pi^2$$



נמצא את I

$$-2F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(0) + F(0) + 8\pi^2 = 10\pi^2 + 16$$

$$-2F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2F(0) = 2\pi^2 + 16 \quad /:(2)$$

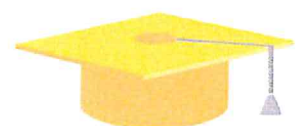
$$-F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(0) = \pi^2 + 8$$

$$\Downarrow$$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -f(x) dx = -F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(0)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{S_1 = \pi^2 + 8}$$



$$\textcircled{2} \quad F'(x) = f(x)$$

$$F(0) = 0$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$$

$$-F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(0) = \pi^2 + 8$$

כך נקרא

$$-F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0 = \pi^2 + 8$$

$$\boxed{F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi^2 - 8}$$

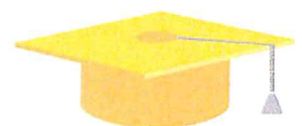
$$\textcircled{3} \quad f'(x) = 8 \sin x + 8$$

$$f(x) = \int (8 \sin x + 8) dx = -8 \cos x + 8x + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow -8 \cos \frac{\pi}{2} + 8 \cdot \frac{\pi}{2} + C = 0$$

$$C = -4\pi$$

$$\boxed{f(x) = -8 \cos x + 8x - 4\pi}$$



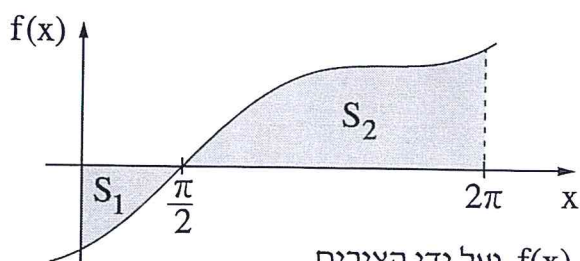
8. $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x .

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y בחלקו השלילי.

נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x היא $(\frac{\pi}{2}, 0)$ (ראה ציור).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הצירים ועל ידי הישר $x = 2\pi$

(השטח האפור בציור) שווה ל- $10\pi^2 + 16$.



נתון גם: $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 8\pi^2$.

א. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים

(השטח S_1 המסומן בציור).

הפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$. נתון: $F(0) = 0$.

ב. מצא את $F(\frac{\pi}{2})$.

נתון: $f'(x) = 8 \sin x + 8$.

ג. מצא את $f(x)$.



א. השטח הזור הוא סופר השטחים:

$$S_1 + S_2 = 10\pi^2 + 16 \quad (1)$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) = 8\pi^2 \quad \text{נח/נ/}:$$

האינטגרל למעלה הוא הפוט השטחים:

$$S_2 - S_1 = 8\pi^2 \quad (2)$$

נכונות אלה הן נכונות:

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = 10\pi^2 + 16 \\ S_2 - S_1 = 8\pi^2 \end{cases} \quad / -$$

↓

$$2S_1 = 2\pi^2 + 16$$

$$\boxed{S_1 = \pi^2 + 8}$$



$$F(0) = 0$$

ב. נר' / ט'

: '1 ס' פ'

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -f(x) dx = \pi^2 + 8$$

$$-F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(0) = \pi^2 + 8$$

$$\boxed{F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi^2 - 8}$$

$$f'(x) = 8 \sin x + 8$$

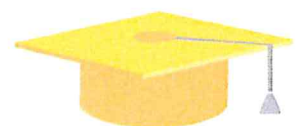
ד. נ' / ט'

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (8 \sin x + 8) dx$$

$$f(x) = -8 \cos x + 8x + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$0 = -8 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 8 \cdot \frac{\pi}{2} + C$$



$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ C = -4\pi \\ \Downarrow \end{array}$$

$$f(x) = -8\cos x + 8x - 4\pi$$

