

פתרון הבחינה במתמטיקה

קיץ תשע"ז, 2017, מועד ב, שאלון: 35481 עפ"י תכנית הרפורמה ללמידה משמעותית.
שאלון ראשון מ-4 יח"ל.
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"





1. משפחת דותן החליטה לרצף את הגינה שלה, שצורתה מלבנית.

אורכי צלעות הגינה הם x ו- y מטרים.

את הגינה חילקו ל-6 מלבנים זהים.

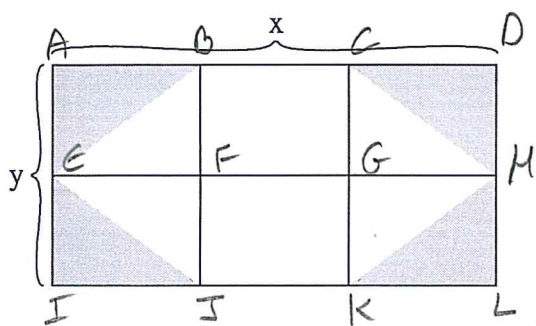
בתוך כל אחד מן המלבנים הפינתיים

חסמו משולש ישר זווית,

שניצביו הם צלעות המלבן.

שטח כל משולש רוצף באבן אפורה, כמתואר בציור.

את שטח הגינה הנותר ריצפו באבן לבנה.



א. (1) הבע באמצעות x ו- y את שטח הגינה שרוצף באבן אפורה.

(2) הבע באמצעות x ו- y את שטח הגינה שרוצף באבן לבנה.

המחיר למ"ר ריצוף באבן האפורה הוא 75 שקלים.

המחיר למ"ר ריצוף באבן הלבנה הוא 60 שקלים.

נתון שצלע אחת של הגינה ארוכה ב-3 מטרים מן הצלע האחרת שלה.

עלות הריצוף לכל הגינה היא 1,170 שקלים.

ב. מצא את אורכי צלעות הגינה.

א/א. הציבה חזק ל-6 מלבנים זהים, נסמן את קצותי המלבנים באלפיות:

$A, B, C, D, \dots, L$.

אורך כל צלע AD הוא x .
כיוון שהמלבנים כהם מתקיים:
 $AB = BC = CD = EF = FG = GH = IJ = JK = KL = \frac{x}{3}$ (לכל צלע)



אורך הצלע AI הוא y .

כיוון שכל המלבנים זהים מתקיים: $AE = \frac{y}{2}$

$$AE = EI = BF = FJ = CG = GK = DH = HL = \frac{y}{2}$$

ישנם ארבעה משולשים אפסים שכל אחד

$$S = \frac{x}{3} \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{הוא:}$$

$$S = \frac{xy}{12}$$

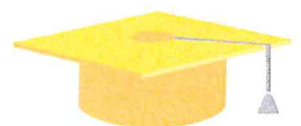
$$S = 4 \cdot \frac{xy}{12} \quad \text{ואכן השטח האפס הוא:}$$

$$S = \frac{xy}{3}$$

א/כ (2) ג'רן אחת אל השטח שהוצל באבן אפס
 ע'י הפחתת השטח המוצל באבן אפס
 משטח הצ'ב.

$$S = xy$$

$$S = xy - \frac{xy}{3} \quad \text{ואכן השטח המוצל באבן אפס הוא:}$$



$$S = \frac{2xy}{3}$$

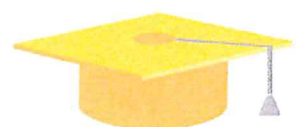
א (ב) עכדי למצוא את אולי צאצא הינה
 נאם האשר בעצם היצוא הינה
 אחר היצוא הינה היא סכום אולי
 היצוא באופן אפנה להיצוא באופן
 אפנה ואכן מתקבלת המשוואה:
 $25 \cdot \frac{xy}{3} + 60 \cdot \frac{2xy}{3} = 1170$

$$25xy + 120xy = 1170$$

$$145xy = 1170 \quad | :145$$

$$xy = 8$$

במסלול נהגן שצא אחר א הינה אפנה
 ב- צמחיה מהצא השניה. ילדן אר'
 אפנה אר' $x = y + 3$ או $y = x + 3$



צירן הפתרון בשני המקרים בלמה.
 מכיון שפרטת תחילה את המקרה $x = y + 3$
 נציב $x = y + 3$ במשוואה שקיבלנו: $xy = 18$

$$(y+3)y = 18$$

$$y^2 + 3y = 18$$

$$y^2 + 3y - 18 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2} = \frac{-3 \pm 9}{2}$$

$$y_1 = \frac{-3+9}{2} = 3$$

$$y_2 = \frac{-3-9}{2} = -6$$

אולם 3
 היא גם האם חילוק!

$$\boxed{y=3}$$



$$x = y + 3 \quad \text{במשוואה} \quad y = 3$$

$$x = 3 + 3$$

$$x = 6$$

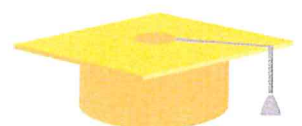
אולי כי צלצול הג'נה במקרה זה הסוג
6 נחשב - 3 נחשב.

אם היינו בלתיים את המקרה $y = x + 3$

היינו מקבלים את התשובה: $y = 6$, $x = 3$

זה במקרה של אולי צלצול הג'נה הוא:
6 נחשב - 3 נחשב.

אכן, אולי כי צלצול הג'נה הסוג 6 , 3 נחשב.



2. בציור שלפניך מתואר מעגל.

נתון: רדיוס המעגל הוא 20.

מרכז המעגל, M , נמצא על

החלק החיובי של ציר ה- x .

הנקודה $A(13,12)$ נמצאת על המעגל.

א. מצא את שיעורי הנקודה M .

דרך הנקודה A העבירו משיק למעגל,

החותך את ציר ה- x בנקודה B .

ב. מצא את שיעורי הנקודה B .

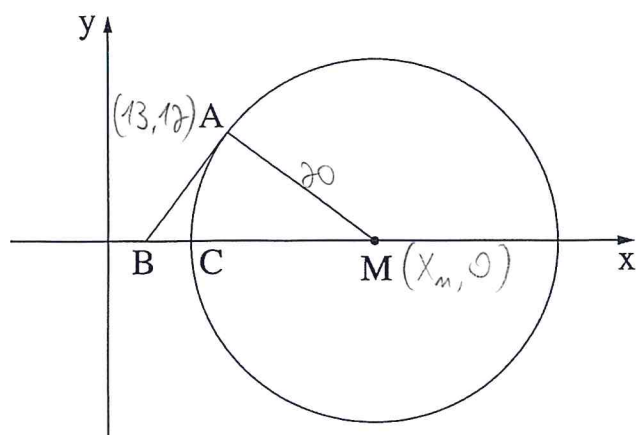
ג. מצא את משוואת המעגל החוסם את המשולש BAM .

C היא נקודת החיתוך של המעגל הנתון עם ציר ה- x , כמתואר בציור.

ד. (1) מצא את שיעור ה- x של הנקודה C .

(2) מצא לאילו ערכים של k הישר $x = k$ חותך את שני המעגלים (ואינו משיק

אף לא לאחד מהם).



① נתון: מרכז המעגל, M , על ציר ה- x ולכן נסמן: $M(x_m, 0)$

הנקודה A על המעגל וזוהי ה- $A(13, 12)$

רדיוס המעגל הוא 20 ולכן: $AM = 20$

אם נניח למצוא את הנקודה M נשתמש בנוסחת מרחק:

$$d_{AM} = \sqrt{(13 - x_m)^2 + (12 - 0)^2} = 20$$

נפתח סוגריים וכנפ א'ברים בריבוע השני:

$$\sqrt{169 - 26x_m + x_m^2 + 144} = 20$$



$$\sqrt{X_m^2 - 26X_m + 313} = 20$$

נעלה את המשוואה הריבוע ונפתור:

$$X_m^2 - 26X_m + 313 = 400$$

$$X_m^2 - 26X_m - 87 = 0$$

$$X_{m1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-87)}}{2 \cdot 1}$$

$$X_{m1} = -3$$

$$X_{m2} = 29$$

מכיוון שהנקודה M נמצאת על חלקו החיצוני של ציר x

אל הנקודה M היא: $M(29, 0)$

⑥ נבין כי AB משך למעט הנקודה A.

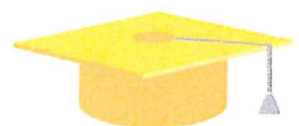
מכך נובע כי הישר AB מאונק לישר AM מכיוון שמשך מאונק אדום בנקודה ההפוכה.

נמצא את שיפוע AM:

$$m_{AM} = \frac{12-0}{13-29} = -\frac{3}{4}$$

שיפוע AB הופכי ונגדי ולכן:

$$m_{AB} = \frac{4}{3}$$



נמצא את משוואת AB האמצעית הנקודה $A(13, 12)$

והשיעור $m_{AB} = \frac{4}{3}$

$$y - 12 = \frac{4}{3}(x - 13)$$

$$y = \frac{4}{3}x - 5\frac{1}{3}$$

נמצא את נקודת החיתוך של הישר AB עם ציר x -ה

על-ידי הצבת $y=0$:

$$0 = \frac{4}{3}x - 5\frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{3}x = 5\frac{1}{3} \quad / : \frac{4}{3}$$

$$x = 4$$

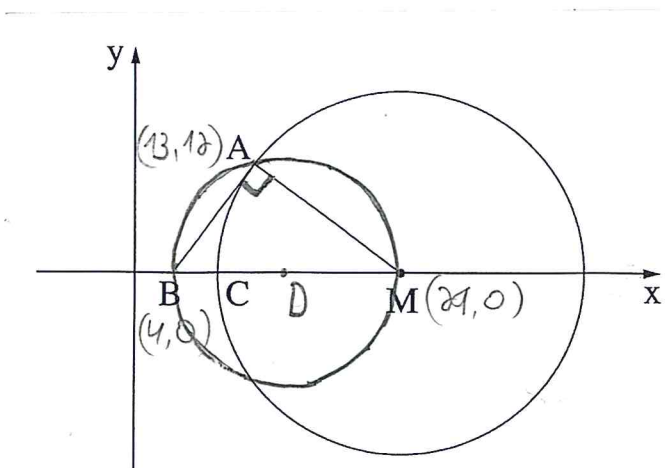
ולכן הנקודה B היא:

$$B(4, 0)$$

ע) נוסף את המעגל החוסם

את המשולש BAM (אזכור).

נקרא לנקודה מרכז המעגל D .



הסווייך BAM היא סווייך היקפית המעגל ושוקה א-90° ולכן
 שטח של הקוטר BAM. מרכז המעגל, הנקודה D, היא
 במרכז הקוטר BAM. נמצא את ערך ה-x שלה באמצעות
 הנוסחה לאמצע קטע:

$$X_D = \frac{4 + 29}{2} = 16.5$$

הנקודה D נמצאת על ציר ה-x ולכן ערך ה-y שלה הוא 0.
 מרכז המעגל החוסם את המשולש BAM : $D(16.5, 0)$
 רדיוס המעגל החוסם את המשולש BAM יהיה המרחק בין
 הנקודה D לנקודה B :

$$X_D - X_B = 16.5 - 4 = 12.5$$

נמצא את משוואת המעגל החוסם את המשולש BAM

באמצעות הנקודה $D(16.5, 0)$ והרדיוס $BD = 12.5$:

$$(x - 16.5)^2 + (y - 0)^2 = 12.5^2$$

$$(x - 16.5)^2 + y^2 = 156.25$$



① ② במסלול הנתון הקטע CM הוא זיוס המסלול
 כלומר: $CM = 20$, ולכן:

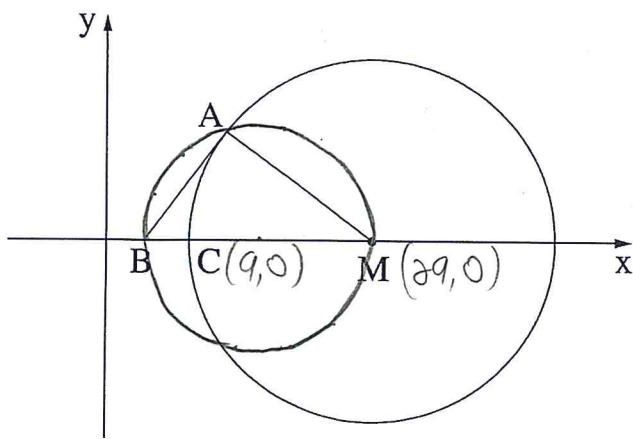
$$X_m - X_c = 20$$

$$29 - X_c = 20$$

$$X_c = 9$$

$$C(9, 0)$$

נקודה C :



② נתונים שים הפרטות:

הישר $X = a$ הוא ישר המאונך לציר x .

לפי הפרטות ותנאי הסעיף הקודמים ניתן לומר שגובה $9 < a < 29$

הישר $X = a$ יחזיק את שני המסלולים ולכן שיק
 לאף אחד מהם.



בעיר מסוימת ערכו סקר הבדק אם נערים ונערות עוסקים בפעילות גופנית.

מספר הנערים שהשתתפו בסקר היה גדול פי 2 ממספר הנערות שהשתתפו בסקר.

מן הסקר עולה כי $\frac{3}{4}$ מן הנערות שהשתתפו בסקר עוסקות בפעילות גופנית וכי $\frac{4}{5}$ מן הנערים

שהשתתפו בסקר עוסקים בפעילות גופנית.

א. בחרו באקראי משתתף מבין כל משתתפי הסקר (נערים ונערות).

מהי ההסתברות שהמשתתף שנבחר עוסק בפעילות גופנית?

ב. בחרו באקראי משתתף מבין משתתפי הסקר והתברר שהוא עוסק בפעילות גופנית.

מהי ההסתברות שנבחרה נערה?

ג. נבחרו באקראי 4 מן המשתתפים בסקר.

מהי ההסתברות שלפחות 2 מן המשתתפים שנבחרו יהיו נערות שעוסקות

בפעילות גופנית?

א) האם בארץ ארץ הנראים בלב.

לסמן מאחר:

A: בן שהתקבל בסקר; $\bar{A}$: בן שהתקבל בסקר.

B: עוסק/ת בפעילות גופנית; $\bar{B}$: לא עוסק/ת בפעילות גופנית.

בין שניים הנבדקו שהתקבל בסקר

אבל פי 2 ממספר הנבדקו שהתקבלו

בסקר, ואין נסמן: $P(\bar{A}) = x \Leftrightarrow P(A) = 2x$



סכום ההסתברויות הולא הלא 1 באומר:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$2x + x = 1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$P(A) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(\bar{A}) = \frac{1}{3} \quad \text{מתקבל:}$$

$$P(B|\bar{A}) = \frac{3}{4} \quad \text{אז נראו בשאלה:}$$

$$P(B|A) = \frac{4}{5}$$

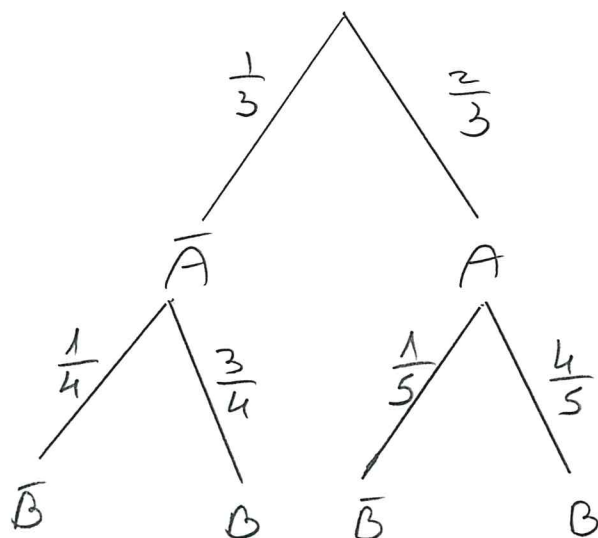
כיוון שכל פיצול סכום ההסתברויות הלא

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{מתקיימת:}$$

$$P(\bar{B}|A) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$



בשיטת פל הסתברות:



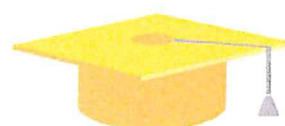
בכדי לחשב את ההסתברות שלתלך חוסך
 בפדיון אלפניק יש לחשב את ההסתברות
 $P(B)$:

$$P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{47}{60}$$

ההסתברות שלתלך בסך חוסך בפדיון אלפניק

$$P(B) = \frac{47}{60}$$

הוא:



3) בסוף פה נדרש ההסתברות הלא נדרש
 היבט זה: $P(\text{הסתברות} / \text{לדה})$ כואמר

נדרש ההסתברות $P(\bar{A} / B)$

אלה הילד ההסתברות לשירמל בדאסה
 הסתברות מלר בירי

$$P(\bar{A} / B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$$

$$P(\bar{A} / B) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{47}{60}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{60}{47} = \frac{15}{47}$$

ההסתברות שבהיה לדה לבין האוסקים
 בעצירת אלפניר הסא:

$$P(\bar{A} / B) = \frac{15}{47}$$



3. ביולן שנבחרו 4 מן השתתפים בסקר

שהסכימו לתת פתרון אחד מהם

שאלה, ולשאלה בנאסחת ביולן:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

בסך הכל: $n=4$

$k=2, 3, 4$

$$p = P(\text{בסך הכל תענה על שאלה}) = P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$1-p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

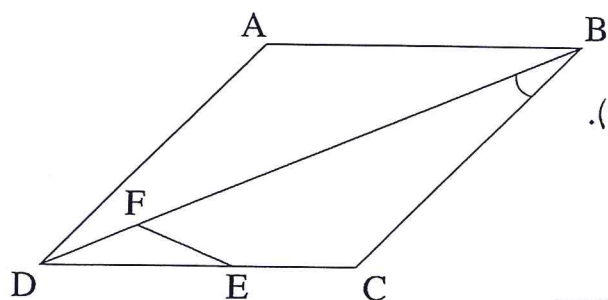
לכן, בנאסחת:

$$p = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{4}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$P(\text{אחד מהם יענה על שאלה - השתתף בסקר - ולא יענה על שאלה}) = \frac{67}{256}$$

$$p = \frac{67}{256}$$





4. ABCD הוא מעוין.

הנקודה E נמצאת על הצלע DC

והנקודה F נמצאת על האלכסון DB (ראה ציור).

נתון כי המרובע BCEF הוא בריחסימה במעגל.

א. (1) הוכח $\angle FED = \angle CBD$.

(2) הוכח שהמשולש DFE הוא שווה שוקיים.

ב. הוכח: $\triangle DFE \sim \triangle DCB$.

ג. נתון: $DB = 3DE$, שטח המשולש DFE הוא 2 סמ"ר.

חשב את שטח המעוין ABCD.

א/א הוכחה:

ABCD מעוין.

BCEF מרובע בריחסימה במעגל.

3:

$$\angle FED = \angle CBD$$

$$\angle FBC = \alpha \quad \text{נניח:}$$

הוכחה:

נימוק

סדרה

סכום הזוויות הנצביות במרובע
בריחסימה במעגל הוא 180° .

$$\angle FEC = 180^\circ - \alpha \quad (1)$$

$\Downarrow$

סכום זוויות צמדות הוא 180° .

$$\angle FED = \alpha \quad (2)$$

$\Downarrow$

כל המעגל.

$$\angle FED = \angle FBC = \alpha \quad (3)$$

נ.ע.י.א.



(א' 2)

$$DC = CB$$

 $\Downarrow$

$$\angle BOC = \angle OBC = \alpha$$

 $\Downarrow$

$$\angle FOC = \angle FED = \alpha$$

 $\Downarrow$

(7) המשולש $\triangle FOC$ הוא משולש שווה שוקיים.

כל המשלש.

משולש $\triangle FOC$ הוא שווה שוקיים משולש שווה שוקיים.

נ.ע.פ. 2.

$$\angle DBC = \angle FED$$

זווית משולש.

$$\angle D = \angle D$$

 $\Downarrow$

$$\triangle OFE \sim \triangle DCB$$

נ.ע.פ. 2.





3. נתון:

$$OB = 3DE$$

$$S_{\triangle OFE} = 2$$

$$S_{ABCO} = ?$$

נתון	חיסוק
היכר בסדר ב	(1) $\triangle OFE \sim \triangle OCB$
	$\Downarrow$
יחס הכולר התקוליתר במחשית דלר שולר לר לר	(2) $\frac{OF}{OC} = \frac{OE}{OB} = \frac{FE}{CB}$
	$\Downarrow$
חיסוק	(3) $\frac{OE}{OB} = \frac{1}{3}$
	$\Downarrow$
יחס חסלר לר שולר דלר הלר כרבלר יחס הכולר	(4) $\frac{S_{\triangle OFE}}{S_{\triangle OCB}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$
הכר + חיסוק	(5) $\frac{2}{S_{\triangle OCB}} = \frac{1}{9}$
חיסוק	(6) $2 \cdot 9 = S_{\triangle OCB}$
חיסוק	$18 = S_{\triangle OCB}$



כיוון שאנחנו הולכים מרחק אלו אליו
 משושה חסר-זווית עם נשט חסימה 3.3.3
 מרקב:

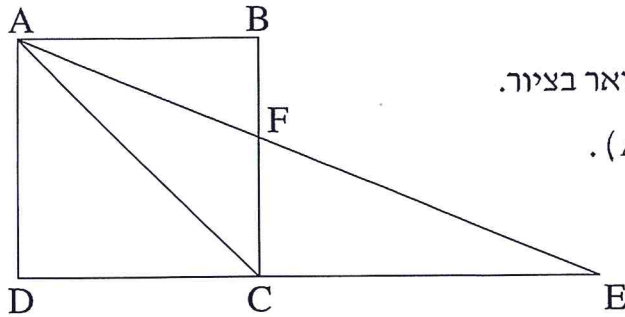
$$S_{ABCO} = 2S_{\triangle OCB}$$

$$S_{ABCO} = 2 \cdot 18$$

$$S_{ABCO} = 36$$

נ.ע.י. א.





5. נתון ריבוע ABCD.

הנקודה E נמצאת על המשך הצלע DC, כמתואר בציור.

המשולש ACE הוא שווה שוקיים ($AC = CE$).

הישר AE חותך את הצלע BC בנקודה F.

א. מצא את זוויות המשולש ACE.

שטח המשולש ACE הוא $8\sqrt{2}$ סמ"ר.

ב. חשב את אורך צלע הריבוע.

ג. חשב את אורך הקטע DF.

ד. מצא את אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש DFE.

(א) הריבוע ABCD הוא ריבוע - AC הוא אלכסון הריבוע.

כיוון שאנחנו רוצים למצוא את זוויות המשולש ACE.

נחשב: $\angle ACB = 45^\circ$.

בנוסף נתון $BC \perp DC$ (3 זוויות) הריבוע הוא ריבוע.

15 זוויות: $\angle BCE = 90^\circ$.

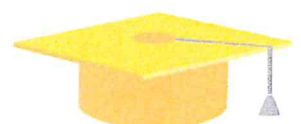
אז: $\angle ACE = \angle ACB + \angle BCE$

$\angle ACE = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$

נתון: $\triangle ACE$ הוא משולש שווה שוקיים ($AC = CE$).

בהינתן: $\angle CAE = \angle CEA = \frac{180^\circ - 135^\circ}{2}$

$\angle CAE = \angle CEA = 22.5^\circ$



באיור המשולש $\triangle ACE$ הינו $135^\circ, 22.5^\circ, 22.5^\circ$

$$S_{\triangle ACE} = 8\sqrt{2} \quad (5) \quad \text{נתון:}$$

נמצא באמצעות חוקי סינוס:

$$S_{\triangle ACE} = \frac{AC \cdot CE \cdot \sin 135^\circ}{2}$$

כיולון, $CE = AC - 2$ נמצא

$$8\sqrt{2} = \frac{AC \cdot AC \cdot \sin 135^\circ}{2} \cdot 2$$

$$16\sqrt{2} = (AC)^2 \sin 135^\circ / : \sin 135^\circ$$

$$32 = (AC)^2 / \sqrt{2}$$

$$\therefore 4\sqrt{2} = AC$$

כיולון, $C - AC$ הוא אורכו, הייבוס מתקבל:

$$AO^2 + OC^2 = AC^2$$

$$x^2 + x^2 = 32$$

$$2x^2 = 32 / : 2$$

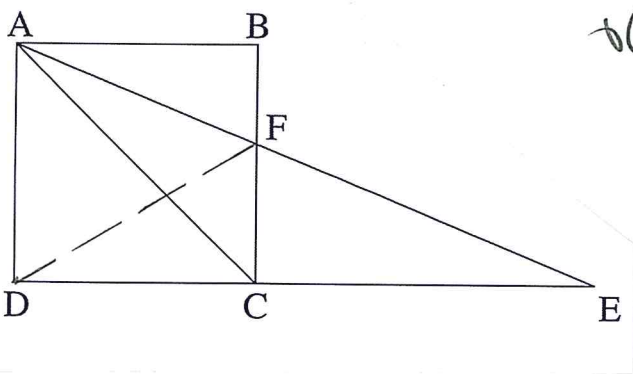
$$: AO = OC = x \quad \text{נמצא}$$



$$x^2 = 16 \quad \checkmark$$

$$x = 4 \quad \checkmark$$

אורך BC היחידה הוא $4\sqrt{2}$



5) בכדי למצוא את הקטע

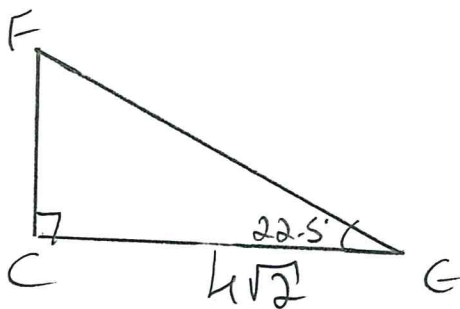
DF נחשב תחילה

את הקטע FE

ב- $\triangle FCE$ נלמד

נחשב את הקטע

DF ב- $\triangle OFC$



$\triangle FCE$

$$CE = AC = 4\sqrt{2}$$

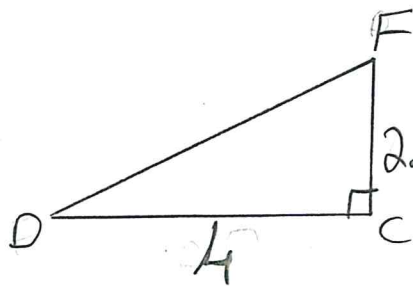
$$\angle FEC = 22.5^\circ$$

$$\tan 22.5^\circ = \frac{FC}{4\sqrt{2}} \quad | \cdot 4\sqrt{2}$$

$$4\sqrt{2} \tan 22.5^\circ = FC$$

$$\approx 2.343 = FC$$





נתון: $DC = 2\sqrt{2}$ (חושב בסה"כ)
 ΔDFC

$$FC = 2.343$$

נשתמש במשפט פיתגורס:

$$(4)^2 + (2.343)^2 = DF^2$$

$$21.489 = DF^2 / \sqrt{}$$

$$\sqrt{21.489} = DF$$

אז $DF = 4.635$: הלא DF היא הצל

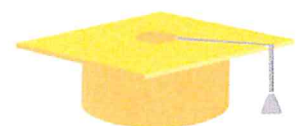
5.2) בכדי לחשב את רחב המעגל החוסם

את ΔDFE נשתמש במשפט ה-Sin

בצדק הבא:

$$\frac{DF}{\sin \angle FED} = 2R$$

$$\frac{4.635}{\sin 22.5} = 2R / : 2$$



$$\text{ס"ג } 6.056 = R$$

אלוהים רצונו הולך והולך
הולך : $R = \text{ס"ג } 6.056$
 ΔDFE





6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{5}{(2x-4)^2}$.
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 - מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
 - מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 - (1) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $-f(x)$.
 (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $-f(x)$.

$$f(x) = \frac{5}{(2x-4)^2}$$

(א) תחום ההגדרה של $f(x)$: $(2x-4)^2 \neq 0 \quad / \sqrt{\quad}$

$$2x-4 \neq 0$$

$$2x \neq 4 \quad / :2$$

$$x \neq 2$$

(ב) אסימפטוטות מאונכות לצירים של $f(x)$:

$$x = 2$$

אסימפטוטה מאונכות לציר x :

$$y = 0$$

אסימפטוטה מאונכות לציר y :

מכיוון שהחזקה שלבינה
של x היא מתכנס.



(ג) תחומי האליה והירידה של $f(x)$:
 ראשית, נגזור את הפונקציה $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (2x-4)^2 - 5 \cdot 2(2x-4) \cdot 2}{(2x-4)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-20(2x-4)}{(2x-4)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-20}{(2x-4)^3}$$

ניתן לראות כי הנגזרת אינה מתאפסת עבור $x=2$ אך עדיין יש x ולכן הפונקציה אין נקודות קיצון.

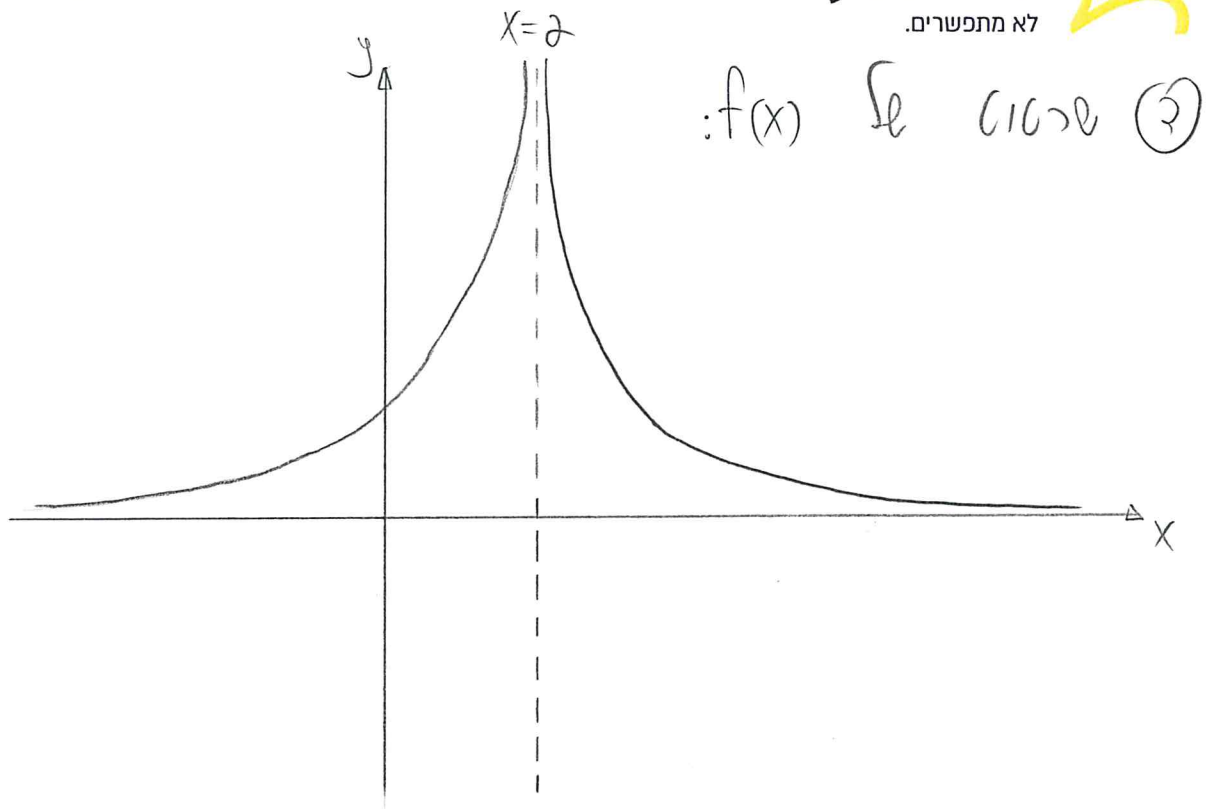
נעבור לטבלת אליה וירידה:

x	1	2	3
y'	+2.5		-2.5
y	↗		↘

תחומי אליה: $x < 2$

תחומי ירידה: $x > 2$





(ה) עבור x ערכי x בתחום ההגדרה, הפונקציה $f(x)$ מקבלת

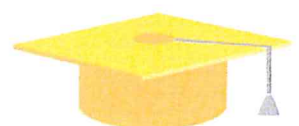
ערכי y נשקפים אלו של $f(x)$.

(1) האסימטוטה המאונכת לציר x של הפונקציה $f(x)$

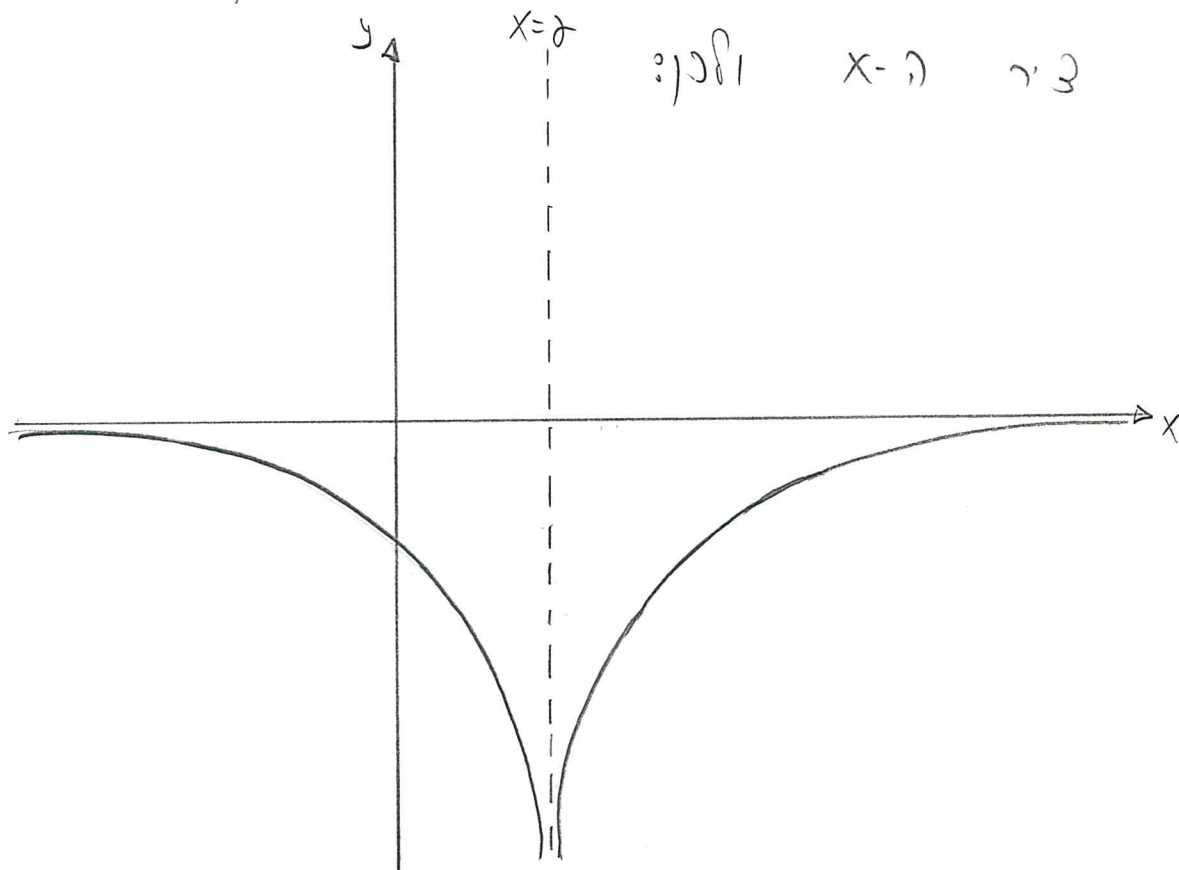
זהה לזו של $f(x)$ והיא: $x=2$.

האסימטוטה המאונכת לציר y של הפונקציה $f(x)$

זהה לזו של $f(x)$ והיא: $y=0$.



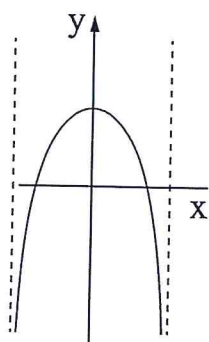
(ב) הפונקציה $-f(x)$ היא שיקוף של הפונקציה $f(x)$ של ציר ה- x ולכן:



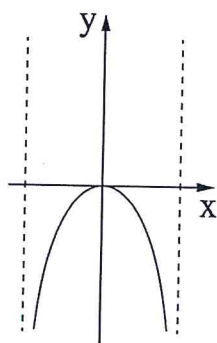


7. נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$.

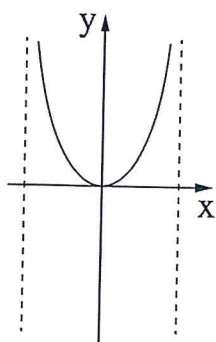
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
 (2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ד. איזה מן הגרפים הנתונים בסוף השאלה (IV-I) הוא הגרף של הפונקציה $f'(x)$? נמק.
- ה. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה $f'(x)$, על ידי ציר ה- x , על ידי ציר ה- y ועל ידי הישר $x = 1$.



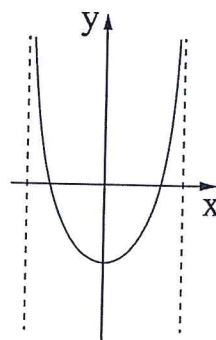
IV



III



II



I

$$f(x) = x \cdot \sqrt{4-x^2}$$

16. תחום הגדרה של $f(x)$:

$$4-x^2 \geq 0$$

נמצא את הערכים הקטנים והגדולים של הביטוי:

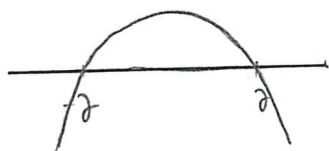
$$4-x^2 = 0$$

$$x^2 = 4 \quad / \sqrt{}$$

$$x = 2 \quad x = -2$$



הביטוי $4-x^2$ הוא פרבולה הפוכה החותכת ציר ה- x הנקודות שבהן $x=2$ ו- $x=-2$ ואכן היא אי-שלילית עבור $-2 \leq x \leq 2$.



גם אם ההשערה של היות ציה $f(x)$: $-2 \leq x \leq 2$

① נקודת החיתוך של $f(x)$ עם הצירים:

אחיגה עם ציר y נציה $x=0$:

$$f(0) = 0 \cdot \sqrt{4-0^2} = 0$$

נקודת חיתוך עם ציר y : $(0,0)$

אחיגה עם ציר x נציה $y=0$:

$$0 = x \cdot \sqrt{4-x^2}$$

$$x=0 \quad \sqrt{4-x^2} = 0$$

נשאל את המשוואה $4-x^2=0$:

$$x^2=4$$

$$x=2 \quad x=-2$$

נקודות החיתוך עם ציר x : $(-2,0)$ $(0,0)$ $(2,0)$





② נקודות הקיצון של $f(x)$:

נמצא את הנקודות:

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

נשווה את הנגזרת ל-0 ונפתור:

$$\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \quad / \quad \frac{0}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$4-2x^2 = 0$$

$$2x^2 = 4 / : 2$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \quad x = -\sqrt{2}$$



נמצא את סרטי ה- y :

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} = 2$$

$$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{4 - (-\sqrt{2})^2} = -2$$

נקודות הקיצון היחידות של $f(x)$: $(\sqrt{2}, 2)$ $(-\sqrt{2}, -2)$

אנוקציה $f(x)$ יש לה שתי נקודות קיצון קצה
 עבור $x=2$ ו- $x=-2$.

אם סעיף ב) נקודות קיצון הקצה הן: $(2, 0)$ $(-2, 0)$

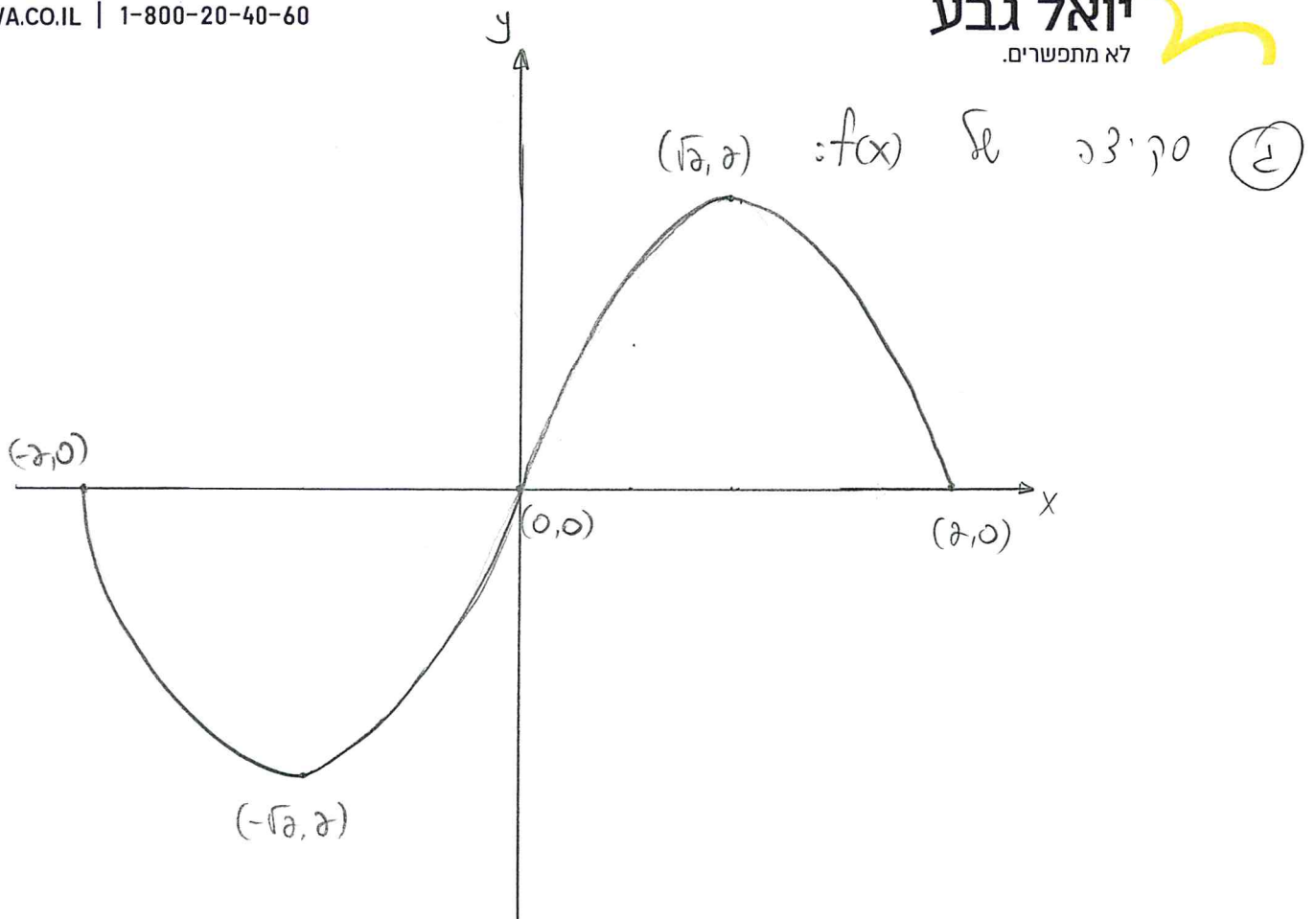
נאמן את סוג הקיצון ופיטולם אליה וירידה:

x	-2	-1.5	0	1.5	2
y'		-0.377	2	-0.377	
y		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

נקודות הקיצון של $f(x)$:

$(-2, 0)$	$(-\sqrt{2}, -2)$	$(\sqrt{2}, 2)$	$(2, 0)$
נקסימים	מינימים	נקסימים	מינימים

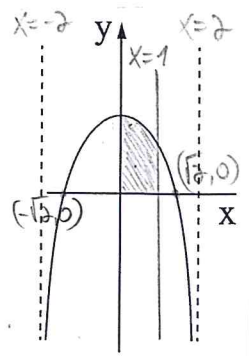




- ③ אבונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון בנטייה ולכן $f'(x)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר x , הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום $\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$ ולכן $f'(x)$ חיובית בתחום זה, הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום $\sqrt{a} < x < -\sqrt{a}$, ולכן $f'(x)$ שלילי בתחום זה.
- ניתן אלוויר כי השיטות היחידים המתאימים היא שיטות IV.



ה) השטח המושקע על ידי הנקודה של הפונקציה $f(x)$, $x=1$, $x=-2$, ציר ה- x , $x=2$, $x=1$ וציר ה- y וציר ה- x הישר $x=1$



מסומן בפיטוט בקו מקווקו:

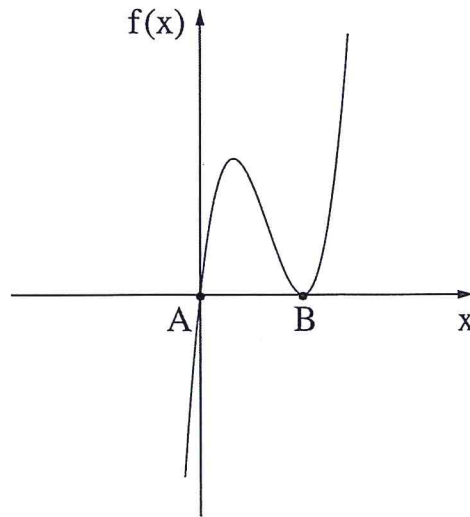
נחשב את השטח באמצעות אינטגרל:

$$S = \int_0^1 f'(x) dx = \left[f(x) \right]_0^1 = \left[x\sqrt{4-x^2} \right]_0^1$$

$$S = \left[1\sqrt{4-1^2} \right] - \left[0\sqrt{4-0^2} \right] = \boxed{\sqrt{3}}$$



8. לפניך סרטוט של גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.



א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B, נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

הנקודה C נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $x_A < x_C < x_B$.

(שיעור ה- x של הנקודה C נמצא בין שיעור ה- x של הנקודה A לשיעור ה- x של הנקודה B).

ב. מצא את שיעורי הנקודה C שעבורה שטח המשולש ABC הוא מקסימלי.

ג. האם הנקודה C היא נקודת קיצון של הפונקציה $f(x)$? הסבר.

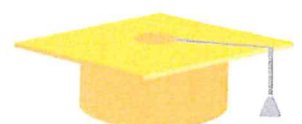
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

(10) לחישוב של $f(x)$ מצא ציר ה- x נציב $y=0$:

$$0 = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$0 = x(x^2 - 6x + 9)$$

$$x = 0 \quad x^2 - 6x + 9 = 0$$

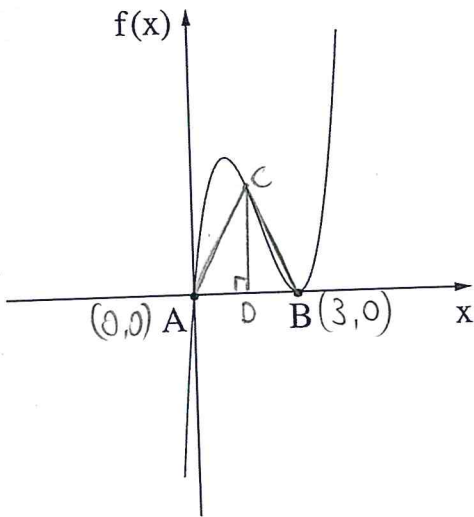


$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$$

$$x = 3$$

$$B(3,0) \quad A(0,0)$$

נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר x :



(ה) שיטת ה- x של הנקודה C היא

בין שיטת ה- x של הנקודה A

לשיטת ה- x של הנקודה B .

נסיף את הנקודה C לשרטון

ונשרט את המשולש ABC .

נוריד זווית במשולש ABC

מהנקודה C אל הצלע AB . נקרא לנקודה הנכשט בין הזווית

ל- AB בנקודה D .

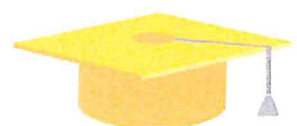
נפתח את הנקודה C באמצעות t : $C(t, t^3 - 6t^2 + 9t)$

אורך הזווית CD הוא:

$$CD = t^3 - 6t^2 + 9t$$

אורך הצלע AB הוא:

$$AB = 3$$



נביע את שטח המשולש ABC באמצעות t :

$$S_{ABC} = \frac{3 \cdot (t^3 - 6t^2 + 9t)}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{3t^3 - 18t^2 + 27t}{2}$$

$$S'_{ABC} = \frac{9t^2 - 36t + 27}{2}$$

נגזור את הביטוי:

נשווה אותו ל-0 ונפתור:

$$\frac{9t^2 - 36t + 27}{2} = 0 \quad / \quad \cdot 2$$

$$9t^2 - 36t + 27 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 27}}{2 \cdot 9}$$

$$t_1 = 3$$

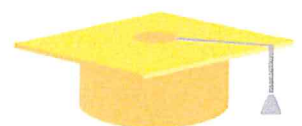
$$t_2 = 1$$

לא מתאים
לחומר

נמצא את ערך ה- y של הנקודה C :

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$$

הנקודה C שצבירה שטח ABC מקסימלי: $C(1, 4)$



(ג) נקודה c היא נקודה הקצין של הפונקציה $f(x)$.
 ניתן להניח כי אורך הצלע AB הוא קבוע ושווה ל-3.
 מכיון שטח המשולש ABC מושפע רק מאורכו של
 הצלע CD של המשולש CD .

אם-מנת שטח המשולש יהיה מקסימלי, צריך שאורך
 הצלע CD יהיה מקסימלי.

אורך CD מקסימלי מתקבל עבור ערך x מקסימלי
 של x בתחום שבו $0 < x < 3$ ולכן הנקודה c
 צריכה להיות נקודה המקסימלית של הפונקציה
 בתחום זה.

ניתן להסיק מסעיף ג' שניתן היה לבדוק את
 סעיף ב' כפי שהסברנו מסעיף ג', כלומר להציב
 מתי הצלע CD היא מקסימלית, כלומר ערך הפונקציה
 הוא מקסימלי.

