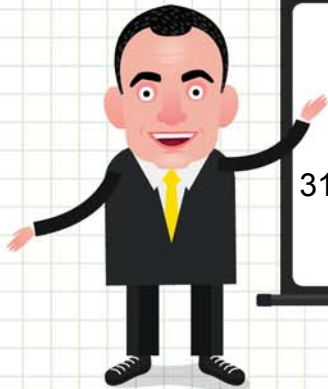




פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה

קיץ תשע"ו, 2016, מועד ב', שאלונים: 317, 035807
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

להלן הסברים מפורטים

MY.GEVA.CO.IL

לפרטים לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו
אתכם ביעילות לבגרות במתמטיקה



1. נתונה פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$.

שני ישרים המשיקים לפרבולה בנקודות K ו-L נפגשים בנקודה A, שהיא נקודת החיתוך של מדריך הפרבולה עם ציר ה-x.

א. (1) הראה כי שיעור ה-x של K שווה לשיעור ה-x של L.

(2) הראה כי המשיקים מאונכים זה לזה.

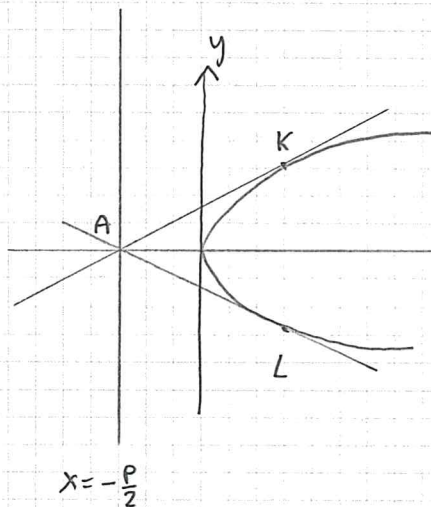
נתון מעגל, שמרכזו M נמצא על ציר ה-x.

המשיקים לפרבולה הנתונה בנקודות K ו-L משיקים גם למעגל זה בנקודות אלה.

הצב $p = 2$, וענה על הסעיפים ב, ג.

ב. מצא את משוואת המעגל שמרכזו M.

ג. מצא את משוואת המעגל החסום במרובע AKML.



א (1) משוואת המשיק לפרבולה בנקודה (x_0, y_0) שליה:
 $yy_0 = p(x + x_0)$

נמסין $K(x_0, y_0)$

$L(x_1, y_1)$

למכאן משוואות המשיקים:
 $yy_0 = p(x + x_0)$
 $yy_1 = p(x + x_1)$

הנניס לנקודת החיתוך עם הציר האופקי: $y = 0$

$$\begin{cases} x_0 + x_0 = 0 \\ x_1 + x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_A = -x_0 \\ x_A = -x_1 \end{cases} \rightarrow \boxed{x_0 = x_1}$$

כנסי.



(2) תנאי עניצות שני ישרים $m_1 \cdot m_2 = -1$

מכיוון שנקודות ההשקה יהיו אותו ערך של x ,

המסלולים של ההיבט סביב ציר ה- x נכתוב $L(x_0, y_0)$ $K(x_0, y_0)$

משוואות המסלולים:

$K: y y_0 = p(x + x_0)$

$L: -y y_0 = p(x - x_0)$

$m_K = \frac{p}{y_0}$ $m_L = -\frac{p}{y_0}$

$m_K \cdot m_L = \frac{p}{y_0} \cdot -\frac{p}{y_0} = -\frac{p^2}{y_0^2} = -\frac{p^2}{2px_0} = -\frac{p}{2x_0} \Rightarrow$

$x_0 = -x_K = \frac{p}{2}$

מסלול א'
נקודת ההשקה מקביל:

$\Rightarrow \frac{-p}{2 \cdot \frac{p}{2}} = -1$

זכור:

$m_K \cdot m_L = -1$

זכור
ומכאן המסלולים ניצבים זה לזה.



2 בעקב $p=2$ נקבל: $y^2 = 4x$

ונקודת החיתוך של הישרים עם ציר ה-y היא: $A(-1, 0)$
ומכאן נקבל את משוואת הישרים ואלה נקודות הישרים:

$K(1, 2)$ $y = x + 1$
 $L(1, -2)$ $y = -x - 1$

נמצא את משוואת הישרים מאם ע"י תנאי הניצב והנק' א:

הישרים ניצב לשיעור זכין $m_R = -1$ $(1, 2)$

$y - 2 = -1(x - 1) \rightarrow y = -x + 3$

הנקודה מ היא נקודת החיתוך של הישרים עם ציר ה-x

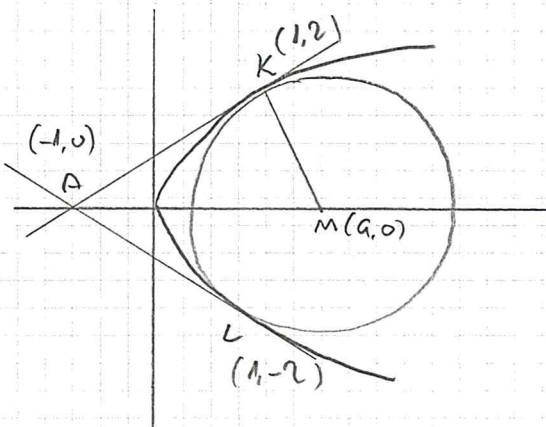
ומכאן: $a = 3$

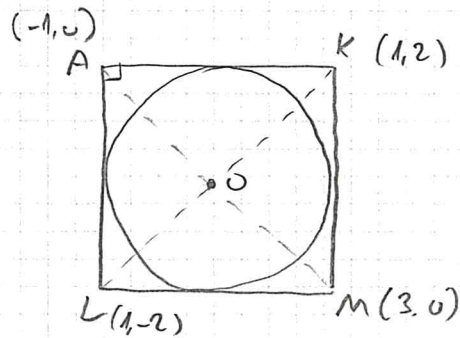
אם R נמצא ע"י מחקר מא:

$R = KM = \sqrt{(1-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8}$

ומכאן משוואת המעגל:

$(x-3)^2 + y^2 = 8$





למצוא את המשוואה של המעגל

בהיכנס נמצא את המרכז

המרכזים של המעגל והמלבן:

$$O\left(\frac{-1+3}{2}, 0\right) = (1, 0)$$

המרכז של המעגל הוא נקודת האמצע של AK:

$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1+1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 2$$

המשוואה של המעגל:

MY.GEVA.CO.IL

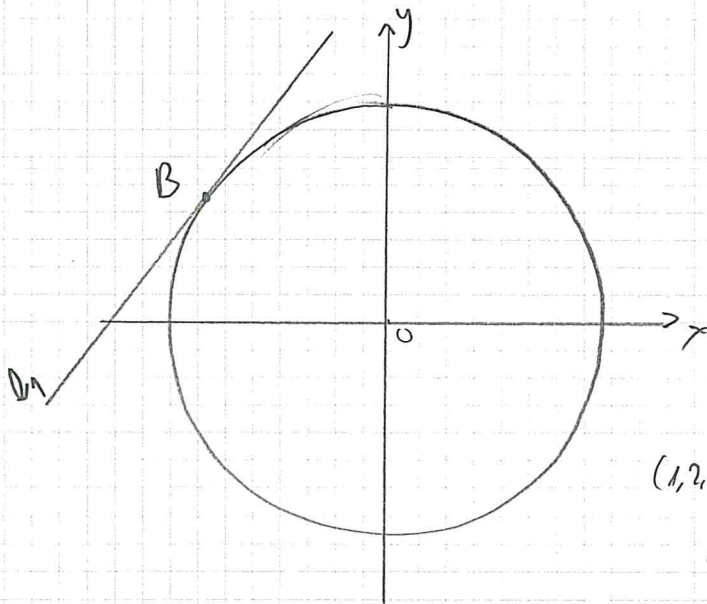
לפרטים לחצו כאן!

תיכונים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם ביעילות לבגרות במתמטיקה



2. נתון מעגל הנמצא במישור π , ומרכזו בראשית הצירים $O(0, 0, 0)$.
 הישר $\ell_1: \underline{x} = (2, 2, 0) + t(1, 2, 1)$ נמצא במישור π , ומשיק למעגל זה בנקודה B.
 א. מצא את השיעורים של הנקודה B.
 ב. הישר $\ell_2: \underline{x} = (0, 1, 1) + s(2, -1, 1)$ חותך את המישור π בנקודה A.
 (1) הראה כי הנקודה A נמצאת על המעגל הנתון.
 (2) מצא את שטח המשולש AOB.



א נמצא ב-10. עק' B

נקודה בללא ס' הישר:

$$B(2+t, 2+2t, t)$$

הזית ניצב למשך בנקודה הישרה

למשולש הישר, ווקטור כביון $(1, 2, 1)$

$$\vec{OB} = (2+t, 2+2t, t) \quad \text{הרדיוס:}$$

תנאי אנכיבטור המכפלה הסקלרית בין הווקטורים שווה לאפס:

$$(2+t, 2+2t, t) \cdot (1, 2, 1) = 0$$

$$2+t + (2+2t) \cdot 2 + t = 0 \rightarrow t = -1$$

לכיון נקבל:

$$B(1, 0, -1)$$



ק (ג) נמצא תחילה את משוואת המישור.

ווקטור הכיוון של המישור ניצב על כל המובל במישור. עכ"ל:

$$(a, b, c) \cdot (1, 2, 1) = 0$$

ניצב ע"י-ה של המובל במישור

$$(a, b, c) \cdot (1, 0, -1) = 0$$

ניצב לווקטור - בס המובל במישור :

מציאם החופש לבחירת ווקטור כיוון : $a=1$

$$\begin{cases} 1 + 2b + c = 0 \\ 1 - c = 0 \end{cases} \Rightarrow b = -1 \Rightarrow c = 1$$

מכאן משוואת המישור $x - y + z = 0$

$d=0$ מכיון שהמישור עובר במע"ל הצייר.

נמצא את הנקודה A ע"י הצבת נקודה כללית מהישר במישור

$$A(2s, 1-s, 1+s)$$

$$2s - 1 + s + 1 + s = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow A(0, 1, 1)$$

נראה כי המרחק של הנקודה A ממע"ל הצייר שווה ל- $\sqrt{2}$

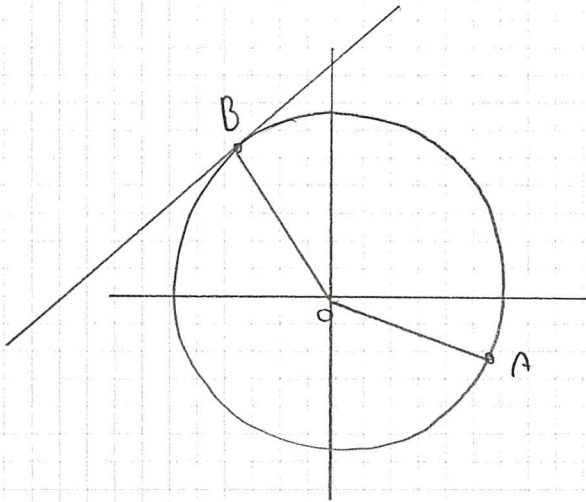
$$|OA| = |OB|$$

$$|(0, 1, 1)| = |1, 0, -1|$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

כנראה.





$$|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = \sqrt{2} \quad (2)$$

נמצא את הסדר בין הוקטורים
ע"י המכפלה הסקלרית שביניהם:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}|} = \frac{(1, 0, -1) \cdot (0, 1, 1)}{|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}|} = \frac{-1}{2}$$

$$\alpha = 120^\circ \quad \text{אלכסון}$$

שטח Δ :

$$S = \frac{1}{2} |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

MY.GEVA.CO.IL

לפרטים לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם ביכולות לבגרות במתמטיקה



3. א. נתון המספר המרוכב $z = \frac{(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9})^3}{(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12})^2}$

- (1) מצא את $|z|$, ואת הארגומנט (הזווית) של z .
(2) מצא את הערכים של n (n מספר טבעי) שעבורם z^n הוא מספר מדומה טהור.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

- ב. נתון המקום הגאומטרי $|z + \bar{z} - m(z - \bar{z})| = 40$, m הוא מספר ממשי גדול מ-1.
(1) זוהי את המקום הגאומטרי. נמק.
(2) הנקודה שמיוצגת על ידי המספר $12 + 8i$ נמצאת על המקום הגאומטרי.
מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של המקום הגאומטרי עם הצירים.

$$z = \frac{(\cos \frac{\pi}{9})^3}{(\cos \frac{\pi}{12})^2} = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} = i \quad (1) \quad \underline{\underline{1}}$$

$$\boxed{|z| = 1 \quad \arg(z) = \frac{\pi}{2}} \quad z = i \quad \text{בדיו}$$

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

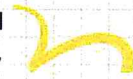
$\cos(n\frac{\pi}{2}) = 0$ תנאי למספר מזווית 0:

$$\frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\boxed{n = 1 + 2k = 1, 3, 5, \dots}$$

כלומר, עבור n אי זוגי:





$$|(z + \bar{z}) - m(z - \bar{z})| = 40$$

(1) $\Rightarrow$

$$|x + iy + x - iy - m(x + iy - x + iy)| = 40$$

$$|2x - 2myi| = 40$$

$$4x^2 + 4m^2y^2 = 1600$$

$$x^2 + m^2y^2 = 400$$

המקום האמיתי הינו אסימטרי
קנוני (m > 1)

(2) נציב את הנקודה 12+8i ונמצא את ש-כיו של m:

$$12^2 + m^2 \cdot 8^2 = 400$$

$$m^2 = 4$$

$$m = 2 \quad (m > 1)$$

$$x^2 + 4y^2 = 400$$

$$x^2 = 400 \Rightarrow \boxed{(20, 0) \quad (-20, 0)} : \text{ציר ה-} x$$

$$4y^2 = 400 \Rightarrow \boxed{(0, 10) \quad (0, -10)} : \text{ציר ה-} y$$

MY.GEVA.CO.IL

לפרטים לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם ביטילות לבגרות במתמטיקה





4. נתונה הפונקציה $f(x) = 9^x - 2 \cdot 3^x - 3$ המוגדרת לכל x .
- א. (1) מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 (2) מצא את האסימפטוטה האופקית לגרף הפונקציה.
 (3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
 (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. מצא את השטח מימין לציר ה- y , המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר ה- x ועל ידי האסימפטוטה האופקית. תוכל להשאיר π בתשובתך.
- ג. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + 4$.
 השטח שמצאת בסעיף ב שווה לשטח מימין לציר ה- x , המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $y = k$. מהו הערך של k ? נמק.

$$f(0) = 9^0 - 2 \cdot 3^0 - 3 = -4$$

$$(0, -4)$$

$$9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$$

$$3^x = t \rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \rightarrow t = 3, -1$$

$$3^x = -1$$

$$\emptyset$$

$$3^x = 3$$

$$x = 1 \rightarrow (1, 0)$$

k (1) נקודות חיתוך עם ציר ה- y :

נקודות חיתוך עם ציר ה- x :

(2) נבדוק את שאלת הפונקציה לעיני א קיצונים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (9^x - 2 \cdot 3^x - 3) = \infty \rightarrow \text{אין אסימטוטה}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (9^x - 2 \cdot 3^x - 3) = -3 \Rightarrow y = -3 : x < 0$$





(3) תנאי הכרחי לנקודה קיצונית פנימית היא כי נמצא הפונקציה

למאפס :

$$f'(x) = 9^x \ln 9 - 2 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = 0$$

$$2 \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x = 0$$

$$3^x (3^x - 1) = 0$$

$$3^x = 0$$

ϕ

$$3^x = 1 \rightarrow x = 0$$

נרצה אולי לקצוץ נקודה פנימית, נמצא הנגזרת (סימן הנגזרת בסביבת הנקודה)

$$f'(-1) < 0$$

$$f'(1) > 0$$

$\Rightarrow$

x	0
f'	- +
	↓ ↑

לכן נקודה $x=0$ נקודה קיצונית פנימית :

$$f(0) = -4 \Rightarrow \boxed{(0, -4) \text{ min}}$$

MY.GEVA.CO.IL

לפרטים לחצו כאן

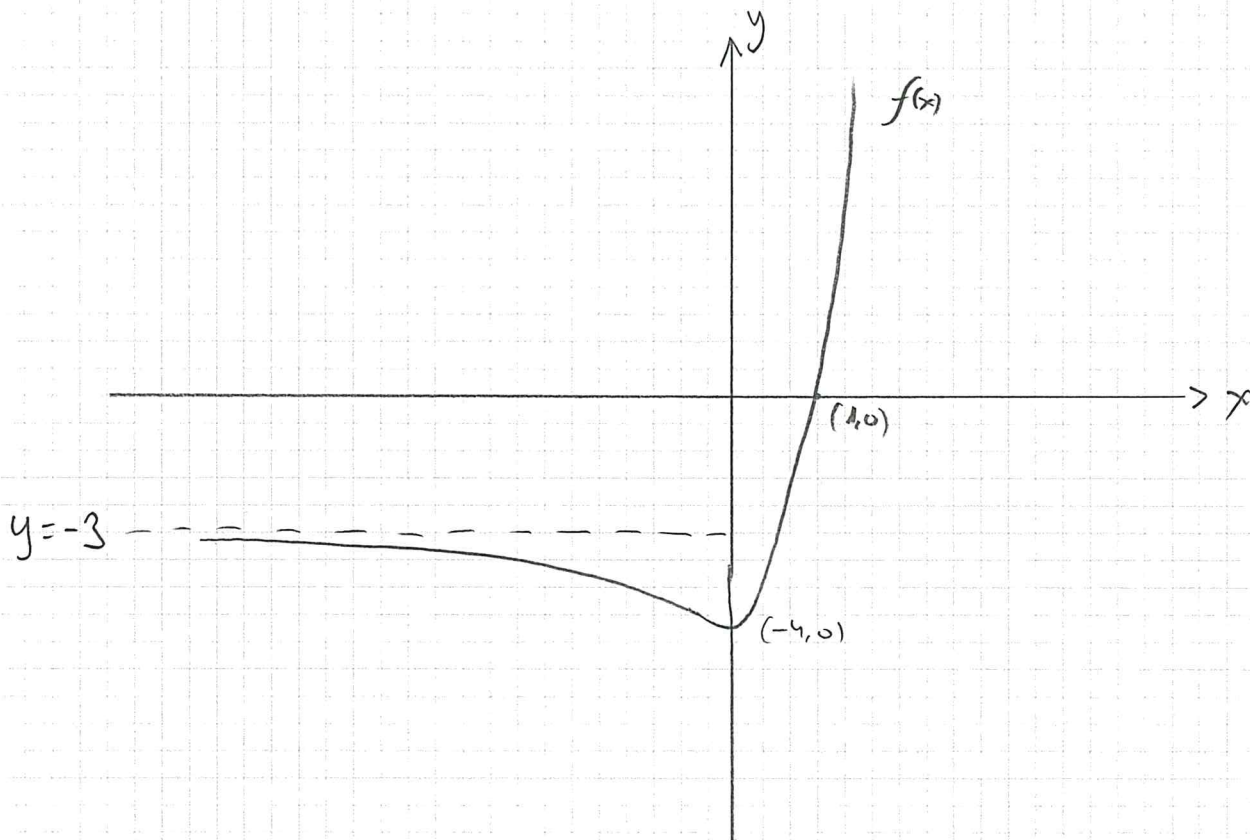
תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר ושיכינו אתכם בשיעורים לבגרות במתמטיקה





(4)



ק את הסדר נמצא ע"י פתרון האינטגרל האמיתי.

נמצא את ערכי x של גזירות הסדר :

$$f(x) = -3$$

$$-3 = 9^x - 2 \cdot 3^x - 3$$

$$3^x(3^x - 2) = 0$$

$$3^x = 2$$

$$x = \log_3 2$$

MY.GEVA.CO.IL

לפרטים לחצו כאן!

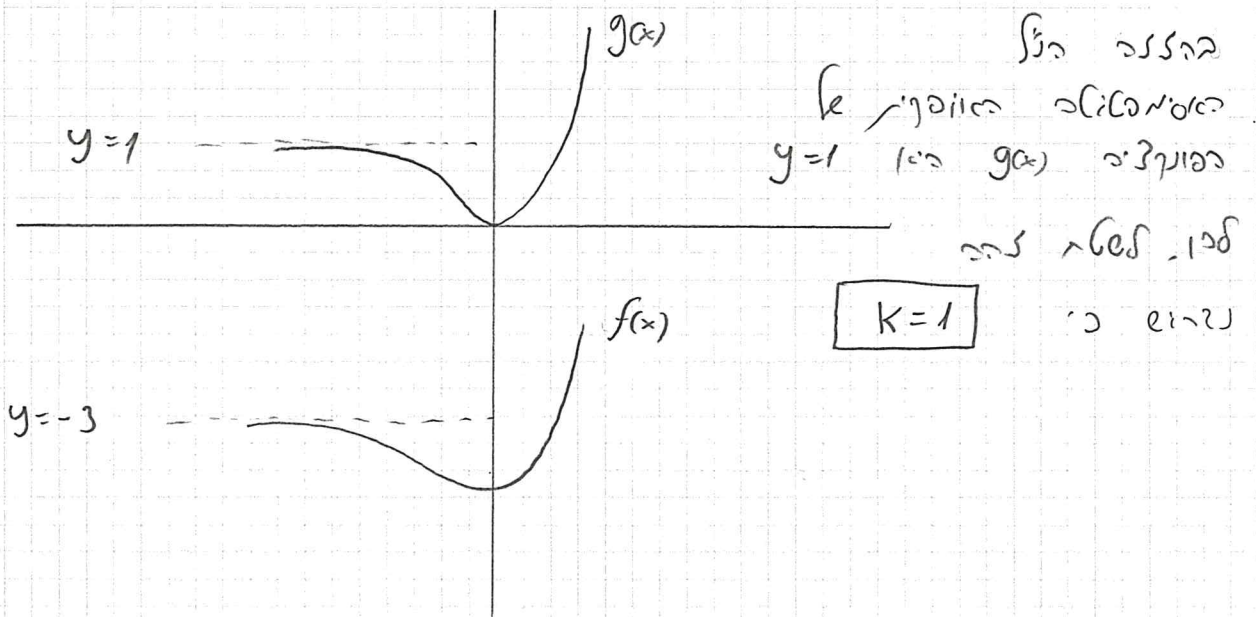
תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הבירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם ביעילות לבגרות במתמטיקה



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\log_3 2} [-3 - (9^x - 2 \cdot 3^x - 3)] dx = \\ &= \int_0^{\log_3 2} (2 \cdot 3^x - 9^x) dx = 2 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{9^x}{\ln 9} \Big|_0^{\log_3 2} = \\ &= \left(\frac{2 \cdot 2}{\ln 3} - \frac{4}{\ln 9} \right) - \left(\frac{2}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 9} \right) = \left(\frac{4}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3} \right) - \left(\frac{2}{\ln 3} - \frac{1}{2 \ln 3} \right) = \\ &= \boxed{S = \frac{1}{2 \ln 3}} \end{aligned}$$

נשאלנו על הפונקציה $f(x)$ ונדרש להוסיף 4 כדי לקבל $g(x)$.
 $g(x) = f(x) + 4$



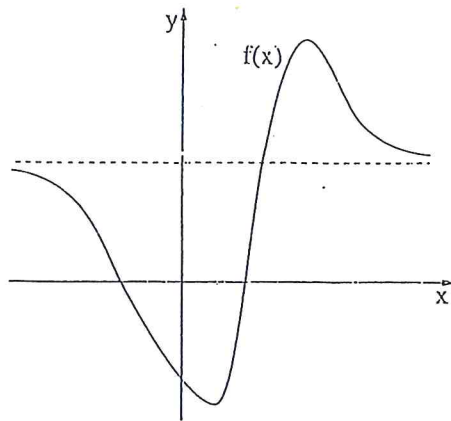
MY.GEVA.CO.IL

לפרטים לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הבירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיסינו אתכם ביעילות לבגרות במתמטיקה





5. בצירוף שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$

מוגדרות לכל x .

לגרף הפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה

אופקית אחת שמשוואתה $y = 1.5e$

כמתואר בצירוף.

נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הן:

$B(1, -1.5e)$, $A(4, 3e)$

הנקודות $E(5, 2e)$, $D(2, 0)$, $C(-2, 0)$

נמצאות על גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום $x < -2$ ובתחום $2 < x < 5$.

וקעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום $x > 5$ ובתחום $-2 < x < 2$.

א. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, וקבע את סוגן. נמוק.

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = \ln[f(x)]$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של $g(x)$ המאונכות לציר ה- x .

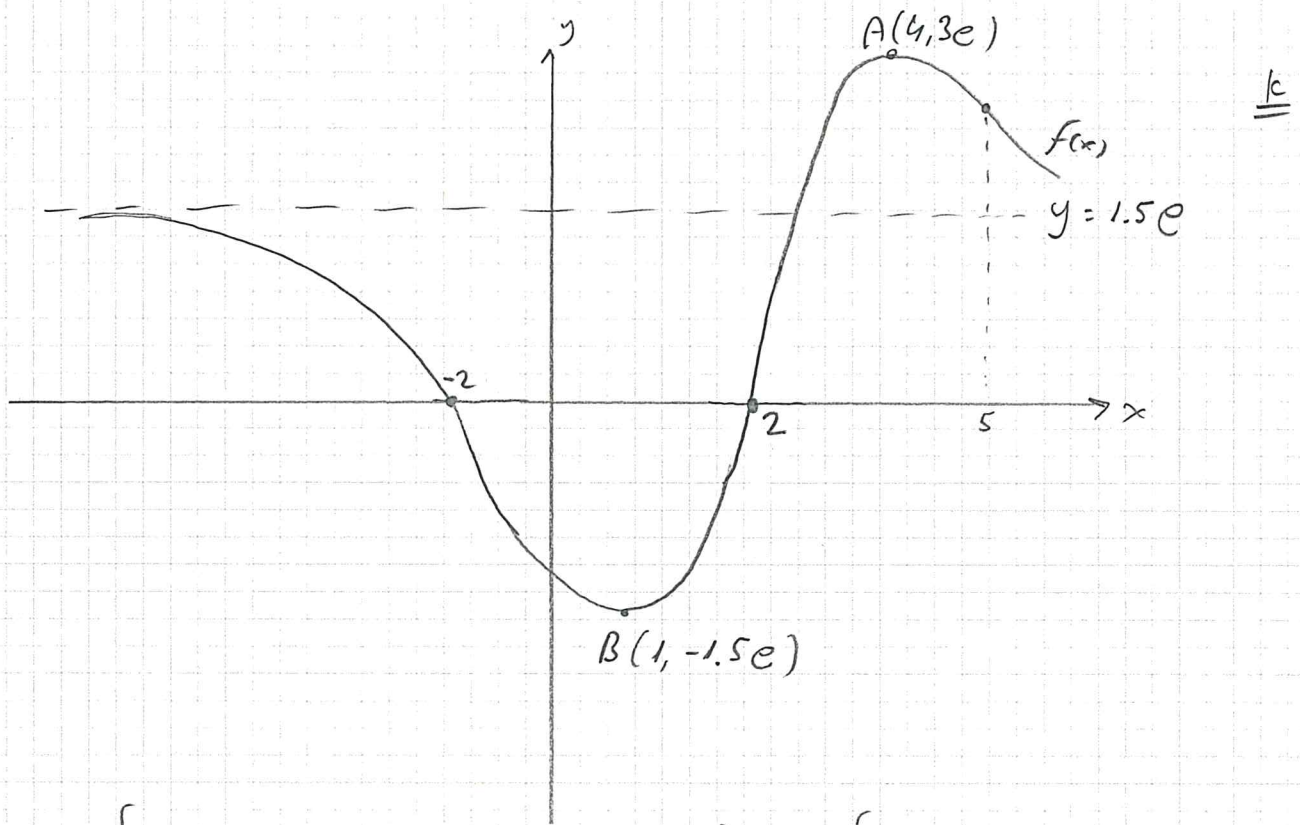
(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה),

וקבע את סוגן.

(4) לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אופקית אחת שמשוואתה $y = \ln(1.5e)$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.





נקודות הקיצון של פונקציה הן נקודות הפיתול
של הפונקציה המזורזת.
נמצא את סוג הקיצון ע"י בנית הטבלה הבאה:

x	-2		2		5	
f''	-		+		-	+
f'	↘	min	↗	max	↘	min

$x = -2$	min
$x = 2$	max
$x = 5$	min

MY.GEVA.CO.IL

לפרטים לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו
אתכם בשיחות לבגרות במתמטיקה



$$g(x) = |h(f(x))| \quad (1) \quad \geq$$

תחום ההארה של הפונקציה הזו כי תוכן האול חיובי ,

$$f(x) > 0 \quad \text{לבן}$$

$$x < -2, x > 2 \quad \text{מחום הפונקציה } g(x)$$

(2) אינסטולור אנכיוז נקבל כאל תוכן הפונקציה שוב לאכס :

$$x = 2, x = -2$$

(3) תנאי הכרחי לקיצון פנימי, כאשר הנלמה שוב לאכס :

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{כאל } x=1, x=4$$

מאול לתחום ההארה
לבן פסל (1)

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{מחום של סול הקיצון עפי' הטבלה הבאה בקצב}$$

x	4	
g'	+	-
	↗	↘

$$g'(x < 4) = \frac{+}{+} = + \quad \text{מחום}$$

$$g'(x > 4) = \frac{-}{+} = -$$

MY.GEVA.CO.IL

לפרטים לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

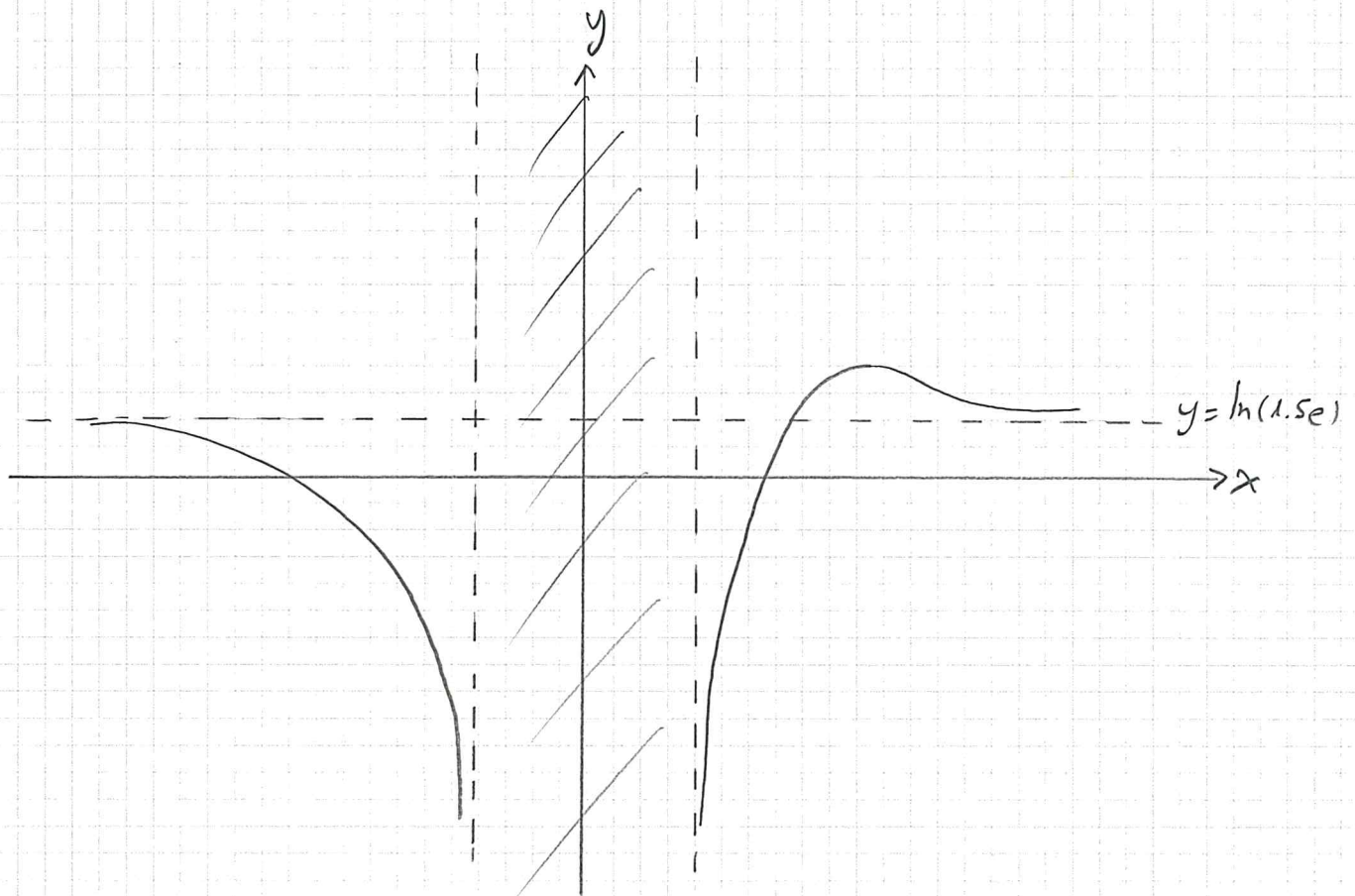
הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם ביעילות לבגרות במתמטיקה



$$g(4) = \ln(f(4)) = \ln 3e$$

$$(4, \ln(3e)) \max$$

(4) נמצא בנקודה המקסימלית של הפונקציה $g(x)$



MY.GEVA.CO.IL

לפרטים לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם ביסודות לבגרות במתמטיקה

