



פתרון בחינת הבגרות

במתמטיקה

קיץ תשע"ו, 2016, מועד ב', שאלון: 35582

עפ"י תכנית הרפורמה ללמידה משמעותית.

שאלון שני מ-5 יח"ל

מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

להלן הסברים מפורטים

MY.GEVA.CO.IL

לפרטים לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו
אתכם ביעילות לבגרות במתמטיקה



1. נתונה פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$.

שני ישרים המשיקים לפרבולה בנקודות K ו-L נפגשים בנקודה A,
שהיא נקודת החיתוך של מדריך הפרבולה עם ציר ה-x.

א. (1) הראה כי שיעור ה-x של K שווה לשיעור ה-x של L.

(2) הראה כי המשיקים מאונכים זה לזה.

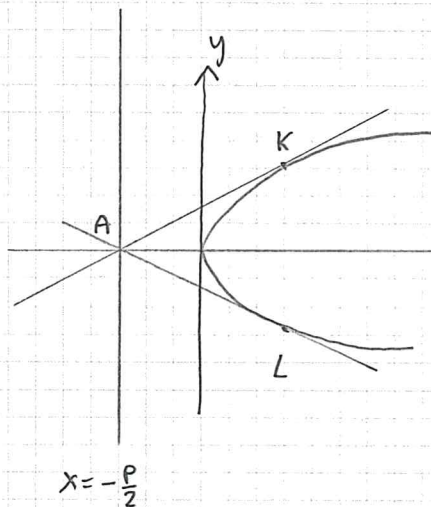
נתון מעגל, שמרכזו M נמצא על ציר ה-x.

המשיקים לפרבולה הנתונה בנקודות K ו-L משיקים גם למעגל זה בנקודות אלה.

הצב $p = 2$, וענה על הסעיפים ב, ג.

ב. מצא את משוואת המעגל שמרכזו M.

ג. מצא את משוואת המעגל החסום במרובע AKML.



א (1) משוואת המשיק לפרבולה בנקודה (x_0, y_0) שליה:
 $yy_0 = p(x + x_0)$

נמסין $K(x_0, y_0)$

$L(x_1, y_1)$

למכאן משוואות המשיקים:
 $yy_0 = p(x + x_0)$
 $yy_1 = p(x + x_1)$

הנני לנקות הזיון עם הציר האופקי: $y = 0$

$$\begin{cases} x_0 + x_0 = 0 \\ x_1 + x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_A = -x_0 \\ x_A = -x_1 \end{cases} \rightarrow \boxed{x_0 = x_1}$$

כנ"ל.



(2) תנאי עניצת שני ישרים $m_1 \cdot m_2 = -1$

מכיוון שנקודות ההשקה אינן אחר של x ,

המסלולים של ההשקה סביב ציר ה- x נכונות $L(x_0, y_0)$ $K(x_0, y_0)$

משוואות המסלולים:

$K: y y_0 = p(x + x_0)$

$L: -y y_0 = p(x - x_0)$

$m_K = \frac{p}{y_0}$ $m_L = -\frac{p}{y_0}$

$m_K \cdot m_L = \frac{p}{y_0} \cdot -\frac{p}{y_0} = -\frac{p^2}{y_0^2} = -\frac{p^2}{2px_0} = -\frac{p}{2x_0} \Rightarrow$

$x_0 = -x_A = \frac{p}{2}$

מסלול א'
נקודת ההשקה מדרגה:

$\Rightarrow \frac{-p}{2 \cdot \frac{p}{2}} = -1$

זכור:

$m_K \cdot m_L = -1$

זכור
ומכאן המסלולים ניצבים זה לזה.



2 בעקב $p=2$ נקבל: $y^2 = 4x$

ונקודת החיתוך של הישרים עם ציר ה-y היא: $A(-1, 0)$
ומכאן נקבל את משוואת הישרים ואלה נקודות הישרים:

$K(1, 2)$ $y = x + 1$
 $L(1, -2)$ $y = -x - 1$

נמצא את משוואת הישרים מאם ע"י תנאי הניצב והנק' א:

הישרים ניצב לשיעור זכין $m_R = -1$ $(1, 2)$

$y - 2 = -1(x - 1) \rightarrow y = -x + 3$

הנקודה מ היא נקודת החיתוך של הישרים עם ציר ה-x

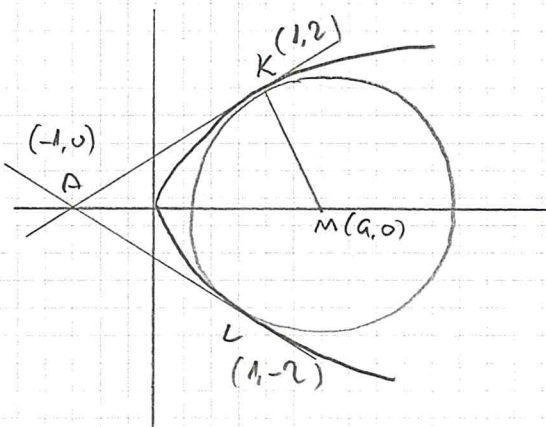
ומכאן: $a = 3$

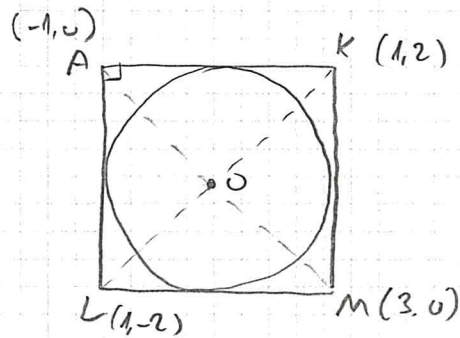
אם R נמצא ע"י מחקר מא:

$R = KM = \sqrt{(1-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8}$

ומכאן משוואת המעגל:

$(x-3)^2 + y^2 = 8$





למצוא את המשוואה של המעגל

המרכז של המעגל

המרכז של המעגל הוא נקודת חיתוך

$$O\left(\frac{-1+3}{2}, 0\right) = (1, 0)$$

המרכז של המעגל הוא נקודת חיתוך של

$$AK \text{ ו- } LM = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1+1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 2$$

המשוואה של המעגל

MY.GEVA.CO.IL

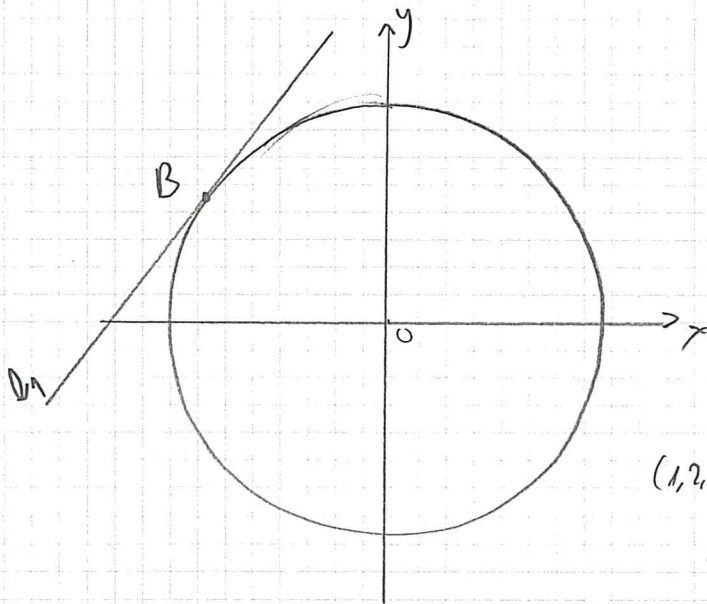
לפרטים לחצו כאן!

תיכונים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם ביעילות לבגרות במתמטיקה



2. נתון מעגל הנמצא במישור π , ומרכזו בראשית הצירים $O(0, 0, 0)$.
 הישר $\ell_1: \underline{x} = (2, 2, 0) + t(1, 2, 1)$ נמצא במישור π , ומשיק למעגל זה בנקודה B.
 א. מצא את השיעורים של הנקודה B.
 ב. הישר $\ell_2: \underline{x} = (0, 1, 1) + s(2, -1, 1)$ חותך את המישור π בנקודה A.
 (1) הראה כי הנקודה A נמצאת על המעגל הנתון.
 (2) מצא את שטח המשולש AOB.



1. נמצא בסיס. עקרי B

נקודה בלתי ישרה:

$$B(2+t, 2+2t, t)$$

הזית ניצב למישור הנקודה הישרה

למשוואת המישור, ווקטור כביון $(1, 2, 1)$

$$\vec{OB} = (2+t, 2+2t, t) : \text{הזיתים}$$

תנאי: אנכיבית המכפלה הסקלרית בין הווקטורים שווה לאפס:

$$(2+t, 2+2t, t) \cdot (1, 2, 1) = 0$$

$$2+t + (2+2t) \cdot 2 + t = 0 \rightarrow t = -1$$

לכיוון נקבל:

$$B(1, 0, -1)$$



ק (ג) נמצא תחילה את משוואת המישור.

ווקטור הכיוון של המישור ניצב על כל המובל במישור. עכ"ל:

$$(a, b, c) \cdot (1, 2, 1) = 0$$

ניצב ע"י-ה של המובל במישור

$$(a, b, c) \cdot (1, 0, -1) = 0$$

ניצב עוקטור כל המובל במישור:

מציאם המופס לכתיבת ווקטור כיוון:

$$a=1$$

$$\begin{cases} 1 + 2b + c = 0 \\ 1 - c = 0 \end{cases} \Rightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow c = 1$$

$$x - y + z = 0$$

מכאן משוואת המישור

$d=0$ מכיון שהמישור עובר במע"ל הצייר.

נמצא את הנקודה A ע"י הצבת נקודה כללית מהישר במישור

$$A(2s, 1-s, 1+s)$$

$$2s - 1 + s + 1 + s = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow A(0, 1, 1)$$

נראה כי המרחק של הנקודה A ממע"ל הצייר שווה ל- $\sqrt{2}$

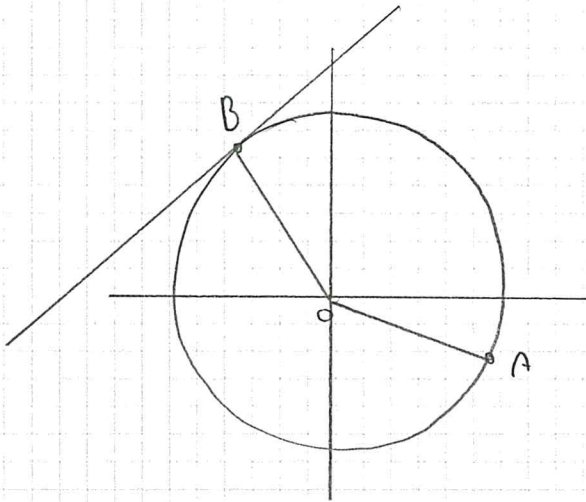
$$|OA| = |OB|$$

$$|(0, 1, 1)| = |1, 0, -1|$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

כנראה.





$$|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = \sqrt{2} \quad (2)$$

נתון שם הסדר בין הוקטורים
שם הסדר הסדרים:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}|} = \frac{(1, 0, -1) \cdot (0, 1, 1)}{|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}|} = \frac{-1}{2}$$

$$\alpha = 120^\circ \quad \text{אלכסון}$$

שם Δ

$$S = \frac{1}{2} |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

MY.GEVA.CO.IL

לפרטים לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו
אתכם בעילות לבגרות במתמטיקה



3. א. נתון המספר המרוכב $z = \frac{(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9})^3}{(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12})^2}$

- (1) מצא את $|z|$, ואת הארגומנט (הזווית) של z .
(2) מצא את הערכים של n (מספר טבעי) שעבורם z^n הוא מספר מדומה טהור.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

- ב. נתון המקום הגאומטרי $|(z + \bar{z}) - m(z - \bar{z})| = 40$, m הוא מספר ממשי גדול מ-1.
(1) זוהי את המקום הגאומטרי. נמק.
(2) הנקודה שמיוצגת על ידי המספר $12 + 8i$ נמצאת על המקום הגאומטרי.
מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של המקום הגאומטרי עם הצירים.

$$z = \frac{(\cos \frac{\pi}{9})^3}{(\cos \frac{\pi}{12})^2} = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} = i \quad (1) \quad \underline{\underline{1}}$$

$$\boxed{|z| = 1 \quad \arg(z) = \frac{\pi}{2}}$$

$z = i$ נכון

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

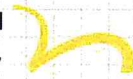
$\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ תנאי למספר מזווית $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\boxed{n = 1 + 2k = 1, 3, 5, \dots}$$

כלומר, עבור n אי זוגי:





$$|(z + \bar{z}) - m(z - \bar{z})| = 40$$

(1) $\Rightarrow$

$$|x + iy + x - iy - m(x + iy - x + iy)| = 40$$

$$|2x - 2myi| = 40$$

$$4x^2 + 4m^2y^2 = 1600$$

$$x^2 + m^2y^2 = 400$$

המקום הראשון הינו אלכסון
קנוני (m > 1)

(2) נציב את הנקודה 12+8i ונמצא את סכום m:

$$12^2 + m^2 \cdot 8^2 = 400$$

$$m^2 = 4$$

$$m = 2 \quad (m > 1)$$

$$x^2 + 4y^2 = 400$$

$$x^2 = 400 \rightarrow \boxed{(20, 0) \quad (-20, 0)} : \text{ציר ה-} x$$

$$4y^2 = 400 \rightarrow \boxed{(0, 10) \quad (0, -10)} : \text{ציר ה-} y$$

MY.GEVA.CO.IL

לפרטים לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם ביטילות לבגרות במתמטיקה





4. נתונה הפונקציה $f(x) = 9^x - 2 \cdot 3^x - 3$ המוגדרת לכל x .
- א. (1) מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 (2) מצא את האסימפטוטה האופקית לגרף הפונקציה.
 (3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
 (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. מצא את השטח מימין לציר ה- y , המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר ה- x ועל ידי האסימפטוטה האופקית. תוכל להשאיר π בתשובתך.
- ג. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + 4$.
 השטח שמצאת בסעיף ב שווה לשטח מימין לציר ה- x , המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $y = k$.
 מהו הערך של k ? נמק.

$$f(0) = 9^0 - 2 \cdot 3^0 - 3 = -4$$

$$(0, -4)$$

$$9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$$

$$3^x = t \rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \rightarrow t = 3, -1$$

$$3^x = -1$$

$$\emptyset$$

$$3^x = 3$$

$$x = 1 \rightarrow (1, 0)$$

k (1) נקודות חיתוך עם ציר ה- y :

נקודות חיתוך עם ציר ה- x :

(2) נבדוק את שאלת הפונקציה לעיני א קיצונים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (9^x - 2 \cdot 3^x - 3) = \infty \rightarrow \text{אין אסימטוטה}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (9^x - 2 \cdot 3^x - 3) = -3 \Rightarrow y = -3 : x < 0$$





(3) תנאי הכרחי לנקודה קיצונית פנימית היא כי נמצא הפונקציה

למאפס:

$$f'(x) = 9^x \ln 9 - 2 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = 0$$

$$2 \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x = 0$$

$$3^x (3^x - 1) = 0$$

$$3^x = 0$$

ϕ

$$3^x = 1 \rightarrow x = 0$$

נרצה עכשיו לקבוע אם נקודה זו היא נקודה מקסימום או מינימום: (סימן הנגזרת הנקודה בסביבתה)

$$f'(-1) < 0$$

$$f'(1) > 0$$

$\Rightarrow$

x	0
f'	- +
	↘ ↗

לכן קטע $x=0$ נקודה קטנה מינימום:

$$f(0) = -4 \Rightarrow \boxed{(0, -4) \text{ min}}$$

MY.GEVA.CO.IL

לפרטים לחצו כאן

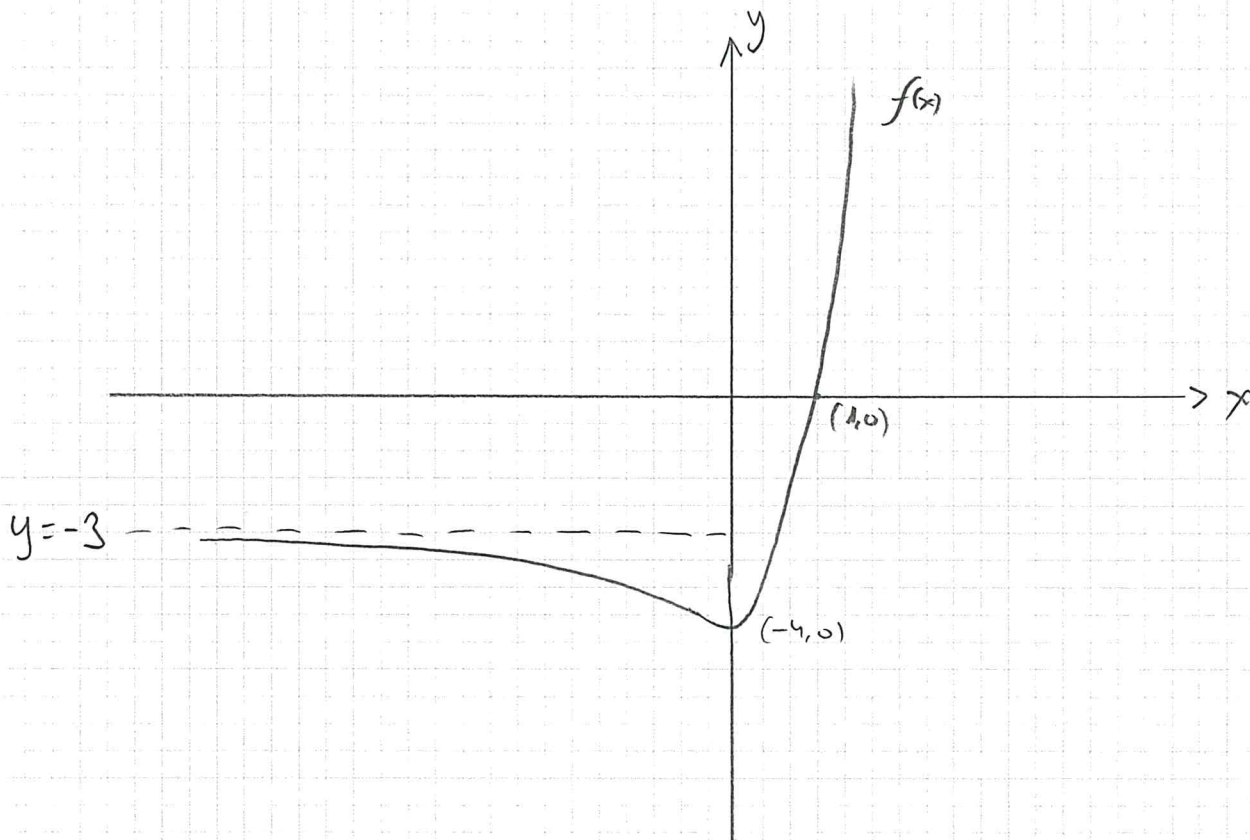
תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הבירו את MY.GEVA סרטוני הסבר ושיעורי
אתכם ביעילות לבגרות במתמטיקה





(4)



ק את הסדר נמצא ע"י פתרון האינצ'ל המסוים.

נמצא את ערכי x של המשוואה הסדר :

$$f(x) = -3$$

$$-3 = 9^x - 2 \cdot 3^x - 3$$

$$3^x(3^x - 2) = 0$$

$$3^x = 2$$

$$x = \log_3 2$$

MY.GEVA.CO.IL

לפרטים לחצו כאן!

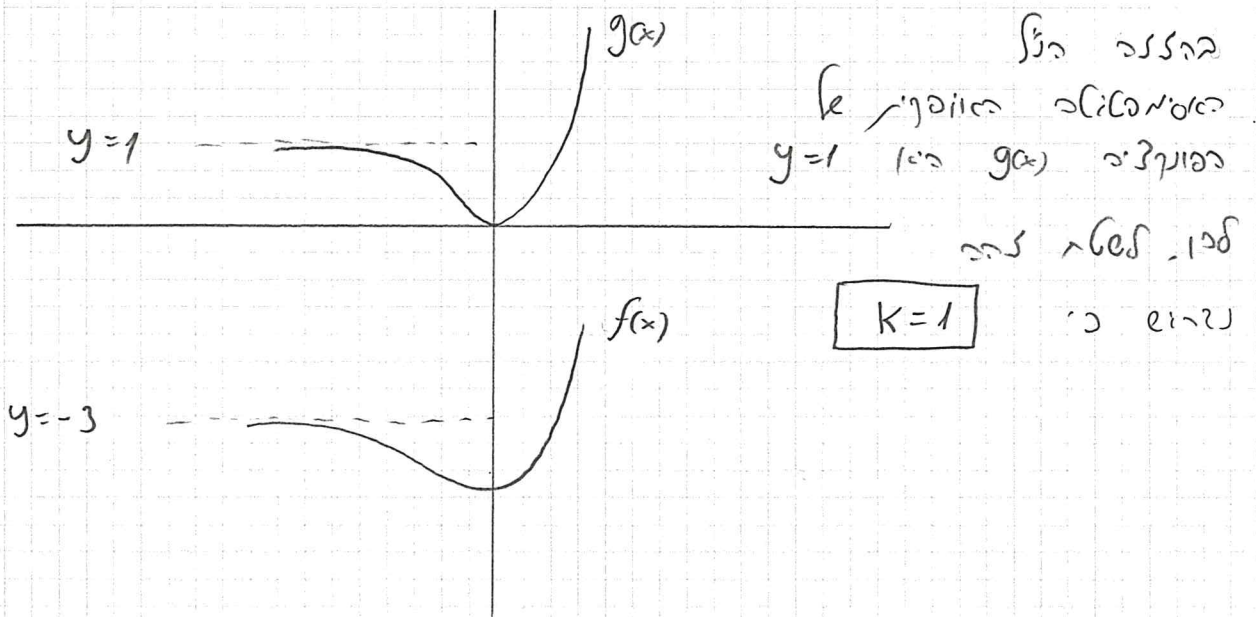
תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הבירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם ביעילות לבגרות במתמטיקה



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\log_3 2} [-3 - (9^x - 2 \cdot 3^x - 3)] dx = \\ &= \int_0^{\log_3 2} (2 \cdot 3^x - 9^x) dx = 2 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{9^x}{\ln 9} \Big|_0^{\log_3 2} = \\ &= \left(\frac{2 \cdot 2}{\ln 3} - \frac{4}{\ln 9} \right) - \left(\frac{2}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 9} \right) = \left(\frac{4}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3} \right) - \left(\frac{2}{\ln 3} - \frac{1}{2 \ln 3} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \ln 3} \end{aligned}$$

נשאל את הא פונקציה $f(x)$ ו- $g(x)$ הנמצא על הפונקציה $f(x)$
כלומר $g(x) = f(x) + 4$: כלומר $g(x)$ היא $f(x)$ שזוזת מעלה ב-4



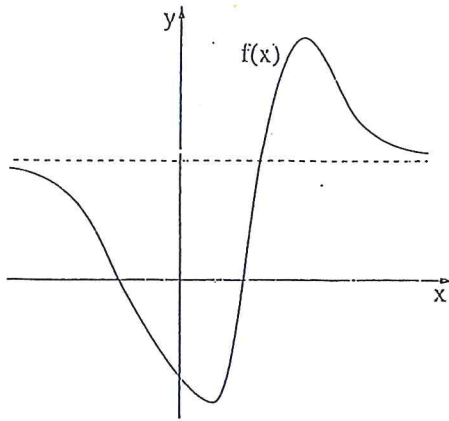
MY.GEVA.CO.IL

לפרטים לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הבירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם ביעילות לבגרות במתמטיקה





5. בצירוף שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$

מוגדרות לכל x .

לגרף הפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה

אופקית אחת שמשוואתה $y = 1.5e$

כמתואר בצירוף.

נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הן:

$B(1, -1.5e)$, $A(4, 3e)$

הנקודות $E(5, 2e)$, $D(2, 0)$, $C(-2, 0)$

נמצאות על גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום $x < -2$ ובתחום $2 < x < 5$.

וקעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום $x > 5$ ובתחום $-2 < x < 2$.

א. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, וקבע את סוגן. נמוק.

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = \ln[f(x)]$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של $g(x)$ המאונכות לציר ה- x .

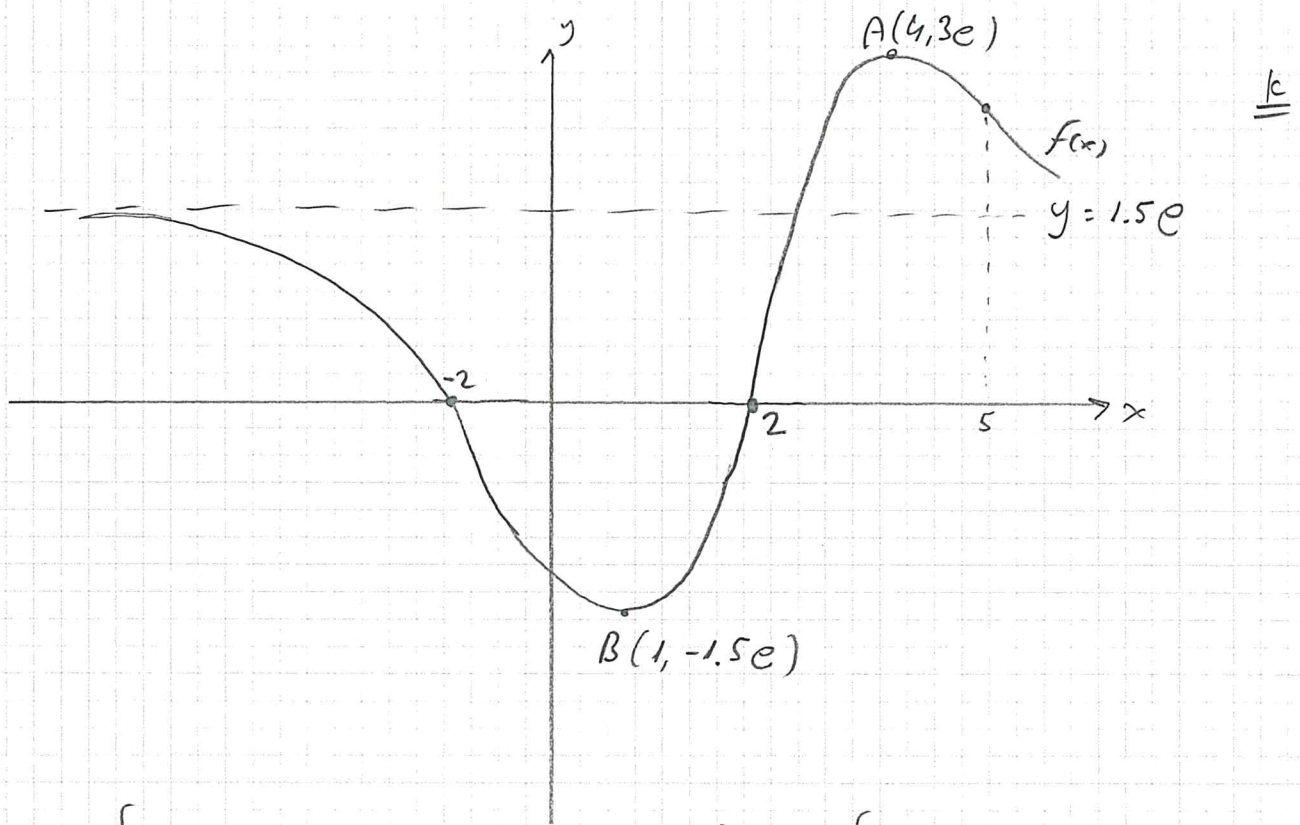
(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה),

וקבע את סוגן.

(4) לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אופקית אחת שמשוואתה $y = \ln(1.5e)$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.





נקודות הקיצון של פונקציה הן נקודות הפיתול
של הפונקציה המזורזת.
נמצא את סוג הקיצון ע"י בניה הטבלה הבאה:

x	-2		2		5	
f''	-		+		-	+
f'	↘	min	↗	max	↘	min

$x = -2$	min
$x = 2$	max
$x = 5$	min

MY.GEVA.CO.IL

לפרטים לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו
אתכם בשיחות לבגרות במתמטיקה



$$g(x) = |h(f(x))| \quad (1) \quad \geq$$

תחום ההגדרה של הפונקציה יהיה כן תוכן האות חזרי,

$$f(x) > 0 \quad \text{לבין}$$

$$x < -2, x > 2 \quad \text{מחלק} \quad \text{תחום ההגדרה} \quad \text{לפונקציה } g(x).$$

(2) אינסוף נקודות, נקודת כאלו תוכן הפונקציה שוב לא יאכנס:

$$x = 2, x = -2$$

(3) תנאי הכרחי לקיצון פנימי, כאשר הנגזרת שוב לא יאכנס:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{כאשר} \quad x = 1, x = 4$$

מאחר לתחום ההגדרה
לפי סעיף (1)

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{מכיוון שיש קיצון חיצוני, הטבלה הבאה בעמוד}$$

x	4	
g'	+	-
	↗	↘

$$g'(x < 4) = \frac{+}{+} = + \quad \text{מכיוון}$$

$$g'(x > 4) = \frac{-}{+} = -$$

MY.GEVA.CO.IL

לפרטים לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

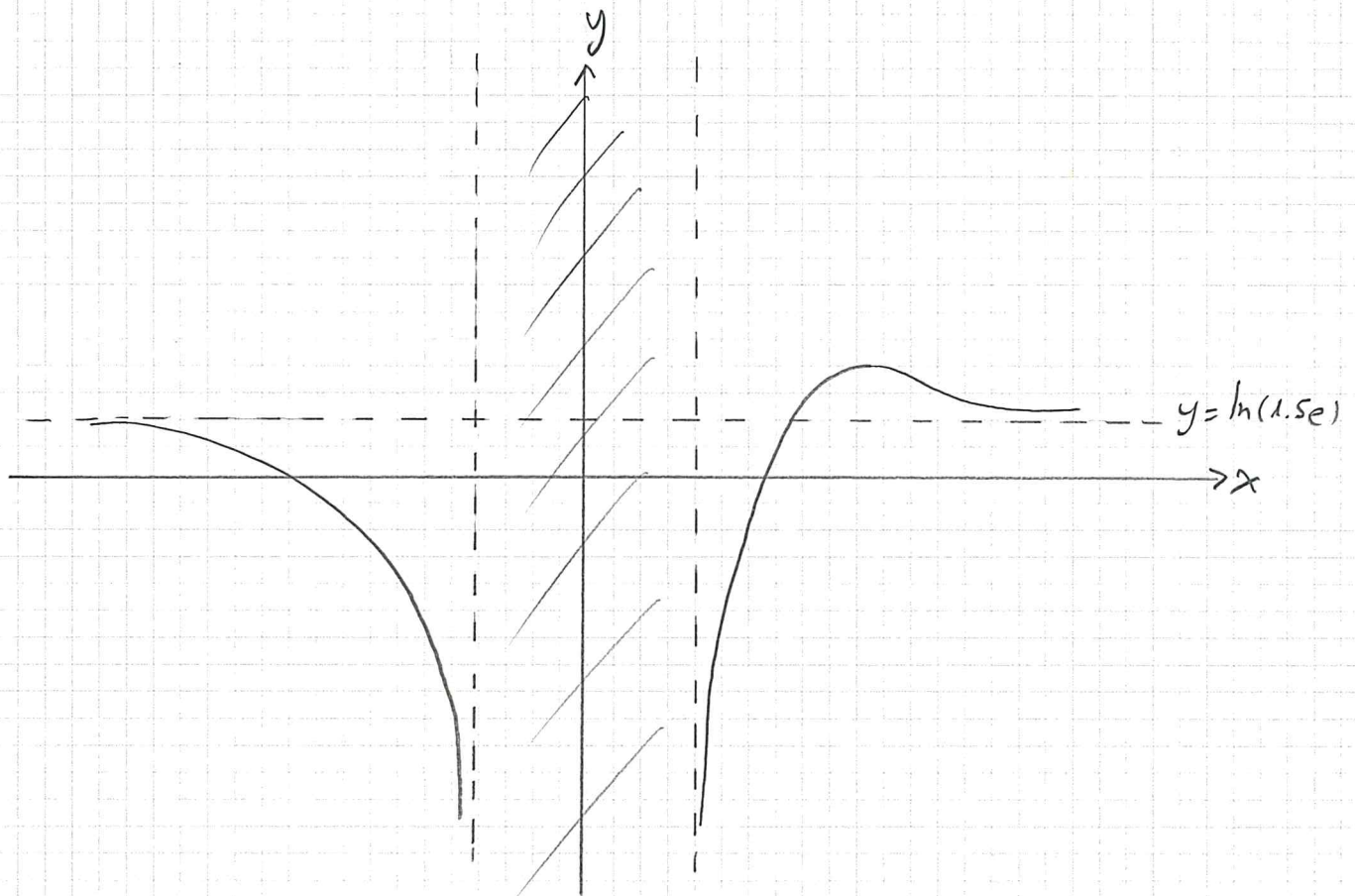
הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם ביעילות לבגרות במתמטיקה



$$g(4) = \ln(f(4)) = \ln 3e$$

$$(4, \ln(3e)) \max$$

(4) נמצא בנקודה המקסימלית של הפונקציה $g(x)$



MY.GEVA.CO.IL

לפרטים לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם ביסודות לבגרות במתמטיקה

