

הסברים לפרק כמותית 2:

התשובות הנכונות:

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
4	2	3	4	1	3	1	4	3	3	2	4	3

25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
2	1	2	1	1	3	1	2	3	1	1	2

הסברים:

1. התשובה הנכונה היא: (3).

עלינו לקבוע מהו היקף טרפז ABCD בס"מ. על-פי הסרטוט, אורך הצלע BC הוא 1 ס"מ. נחפש את הקשר בין צלע זו לקטעים האחרים המרכיבים את היקף הטרפז. נתון כי משולש BCE הוא משולש שווה צלעות. לפיכך, אורך צלע CE הוא 1 ס"מ. על-פי הנתונים, $CE = ED$. לפיכך, אורך צלע ED הוא 1 ס"מ. על-פי הנתון, הטרפז הוא שווה שוקיים, לפיכך אורך צלע AD הוא 1 ס"מ (שווה לשוק BC הנתונה). צלע AB היא חלק ממרובע BEDA. במרובע זה $AB \parallel ED$ (בסיסי הטרפז ABCD). על מנת לקבוע כי מרובע BEDA הוא מקבילית, נעביר זוויות אל תוך המרובע. $\angle BEC = 60^\circ$ (זווית פנימית במשולש שווה צלעות BCE), לפיכך, $\angle BED = 120^\circ$ (משלימה את זווית BEC לזווית שטוחה). $\angle BCE = 60^\circ$ (זווית פנימית במשולש שווה צלעות BCE), ועל כן, $\angle ADE = 60^\circ$ (זוויות בסיס שוות בטרפז שווה שוקיים ABCD). לפיכך, $BE \parallel AD$ (זוויות סמוכות משלימות ל- 180°). לכן, מרובע ABCD הוא מקבילית (שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות זו לזו) ולפיכך, אורך צלע AB הוא 1 ס"מ (שווה לצלע הנגדית לה DE). כלומר, היקף הטרפז ABCD הוא 5 ס"מ ($= 1 + 1 + 1 + 1 + 1$).
הערה: משום שהסרטוט הוא הדרך היחידה לתאר את הנתונים, ניתן היה להסתמך על הסרטוט ולהסיק ממנו שמרובע ABED הוא אכן מקבילית.

2. התשובה הנכונה היא: (4).

עלינו לקבוע איזה מהקביעות בתשובות נכונה לגבי הביטוי $(A + B)$. על-פי הנתון, A הוא מספר חיובי דו ספרתי, ו-B הוא מספר חיובי תלת ספרתי. הקביעות בתשובות מתייחסות למספר הספרות בביטוי $(A + B)$. נבדוק מקרים קיצוניים על מנת להבין. נבדוק את הערכים הנמוכים ביותר האפשריים למספרים A ו-B. אם A הוא מספר דו ספרתי חיובי הקטן ביותר האפשרי, ערכו הוא 10. אם B הוא המספר התלת ספרתי החיובי הקטן ביותר, ערכו הוא 100. במקרה זה, ערכו של הביטוי $(A + B)$ הוא $110 (= 10 + 100)$. לפיכך, הביטוי $(A + B)$ יכול להיות מספר תלת ספרתי.

נבדוק את הערכים הגבוהים ביותר האפשריים למספרים A ו-B. אם A הוא מספר דו ספרתי חיובי הגדול ביותר האפשרי, ערכו הוא 99. אם B הוא מספר תלת ספרתי הגדול ביותר האפשרי, ערכו הוא 999. במקרה זה, ערכו של הביטוי (A + B) הוא $1098 (= 999 + 99)$. לפיכך, הביטוי (A + B) יכול להיות ארבע ספרתי.

3. התשובה הנכונה היא: (2).

דרך א':

עלינו לחשב את ערכו של נעלם y. בתשובות ביטויים בהם מופיע הנעלם x. נפשט את המשוואה הנתונה ונבודד את ערכו של y: $x^2 = (x - y)^2 \leftarrow$ נפתח סוגריים באגף ימין על-פי נוסחת כפל מקוצר. נקבל: $x^2 = x^2 - 2xy + y^2 \leftarrow$ $0 = -2xy + y^2 \leftarrow$ $2xy = y^2$ נחלק את שני אגפי המשוואה ב-y (על-פי הנתון $y \neq 0$). נקבל: $2x = y$.

דרך ב':

נתון כי ביטוי אחד בריבוע שווה לביטוי אחר בריבוע. לפיכך, הביטויים שווים או נגדיים (ניתן להבין זאת על ידי תכונות, או על ידי הוצאת שורש משני אגפי המשוואה).

נקבל את שתי המשוואות הבאות:

א. $x = x - y \leftarrow 0 = y \leftarrow 0 = y$. פתרון זה נפסל בשל תחום ההגדרה ($y \neq 0$).

ב. $x = -(x - y) \leftarrow x = -x + y \leftarrow 2x = y$. לפיכך, זהו הפתרון היחיד.

4. התשובה הנכונה היא: (3).

עלינו לקבוע כמה דקות ביום צוחק יקותיאל בעת קריאה בלוח המודעות. על-פי הנתון, יקותיאל עובד 10 שעות ביום, ובמשך 50% מזמן העבודה שלו הוא קורא בלוח המודעות. לפיכך, יקותיאל קורא בלוח המודעות במשך 5 שעות ביום ($50\% \cdot 10 = 5$). 5 שעות הן 300 דקות ($5 \cdot 60 = 300$). במשך 10% מזמן הקריאה בלוח המודעות הוא צוחק. לפיכך, יקותיאל צוחק במשך 30 דקות ($10\% \cdot 300 = 30$).

5. התשובה הנכונה היא: (3).

עלינו לקבוע מהו ערכו המספרי של הביטוי $\alpha - \beta$. נמצא את ערכן של שתי הזוויות ונחשב את ערך הביטוי. זווית α היא זווית פנימית במשולש שווה צלעות DAC, לפיכך, $\alpha = 60^\circ$. מרובע ABCD הוא מעוין (מורכב משני משולשים שווי צלעות). לפיכך, BD הוא חוצה זווית ABC (אלכסונים במעוין הם חוצי זווית). זווית ADC היא זווית פנימית במשולש ADC. לכן, $\beta = 30^\circ$. לפיכך, $\alpha - \beta = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.
הערה: משום שהסרטוט הוא הדרך היחידה לתאר את הנתונים, ניתן היה להסתמך על הסרטוט ולהסיק ממנו שכל אחד מהמשולשים הקטנים הוא משולש זהה (חצי משולש שווה צלעות).



6. התשובה הנכונה היא : (4).

עלינו לקבוע כמה בנים בכיתה לובשים מכנסיים קצרים. בנתוני השאלה מתואר הגודל היחסי של קבוצת הלובשים מכנסיים ארוכים מכלל ילדי הכיתה. נחשב את הערך המספרי של קבוצת הלובשים מכנסיים ארוכים. על-פי הנתון, $\frac{1}{2}$ מהילדים לובשים מכנסיים ארוכים. לפיכך, 15 ילדים לובשים מכנסיים ארוכים ($= \frac{1}{2} \cdot 30$) ו-15 ילדים לובשים מכנסיים קצרים ($= 30 - 15$). על-פי הנתון, בכיתה 10 בנים. לפיכך, בכיתה 20 בנות ($= 30 - 10$). על-פי הנתון, 5 בנות בדיוק לובשות מכנסיים ארוכים. לכן, 15 בנות לובשות מכנסיים קצרים ($= 20 - 5$). לפיכך, כל הילדים שלובשים מכנסיים קצרים הן בנות, ומספר הבנים שלובש מכנסיים קצרים הוא 0.

7. התשובה הנכונה היא : (1).

עלינו לחשב את נפח החרוט שבסרטוט. על-פי הסרטוט, רדיוס בסיס החרוט הוא a . לפיכך, שטח בסיס החרוט הוא πa^2 . על-פי הסרטוט, גובה החרוט הוא $4a$.

$$\text{נפח חרוט} = \frac{\text{בסיס החרוט} \cdot \text{גובה החרוט}}{3} = \frac{4a \cdot \pi a^2}{3} = \frac{4a^3 \pi}{3}$$

8. התשובה הנכונה היא : (3).

עלינו למצוא את ערכו המספרי של x . בנתונים מתואר במילים קשר של שוויון בין $(x + 120)$ אחוזים לבין מספר. נתאר את הקשר בצורה אלגברית, נבנה משוואה ונבודד בה את ערכו של x .

$$\frac{x+120}{100} \cdot 40 = 40 \leftarrow \text{אחוזים מ-} (x + 120) \text{ אחוזים מ-} 40 = 100 \leftarrow \text{נצמצם את השבר באגף}$$

$$\frac{(x+120) \cdot 2}{5} = 100 \leftarrow \text{נכפול את שני אגפי המשוואה ב-} 5 \text{ . נקבל:}$$

$$2x + 240 = 500 \leftarrow 2x = 260 \leftarrow x = 130$$

9. התשובה הנכונה היא : (1).

עלינו לקבוע מהי מערכת היחסים בין מחיריהם של 1 ק"ג סוכר ו-1 ליטר חלב. במידע הנוסף מתואר במילים הקשר בין סכום המחירים של כמויות שונות של סוכר וחלב. נבנה משוואה על-פי המידע הנוסף: 4 ליטר חלב + 5 ק"ג סוכר = 5 ליטר חלב + 4 ק"ג סוכר \leftarrow נפחית את מחירם של 4 ק"ג סוכר ו-4 ליטר חלב משני אגפי המשוואה. נקבל:
 1 ק"ג סוכר = 2 שקלים + 1 ליטר חלב. לפיכך, מחיר 1 ק"ג סוכר גבוה ב-2 שקלים ממחיר 1 ליטר חלב.

10. התשובה הנכונה היא : (4).

דרך א':

עלינו לקבוע מהי מערכת היחסים בין הביטויים בטורים. במשוואה הנתונה במידע הנוסף, נוצר קשר בין ערכי הנעלמים a ו- b , אך אין נתונים לגבי החיוביות והשליליות של a ו- b . לפיכך, לא נוכל לפשט את הטורים. נציב מספרים מהראש כדי לבדוק מהי מערכת היחסים הנוצרת בין הביטויים בטורים ולאחר מכן נחשוב כיצד לאתגר את מערכת היחסים שקיבלנו: נציב $a = 1$. נקבל: $b = 1$. נציב בטורים:

$$\text{טור א: } a - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\text{טור ב: } b = 1$$

במצב זה, הביטוי בטור ב גדול מהביטוי בטור א. נגדיל את ערכו של a כדי להגדיל את ערך הביטוי בטור א. נציב: $a = 2$. נקבל: $b = \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$. נציב בטורים:

$$\text{טור א: } a - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\text{טור ב: } b = \frac{1}{2}$$

במצב זה, הביטוי בטור א גדול יותר. לפיכך, לא ניתן לקבוע מהי מערכת היחסים בין הביטויים. התשובה הנכונה היא (4).

דרך ב':

נפשט את המשוואה שבמידע הנוסף על ידי כפל ב- a . נקבל: $a \cdot b = 1$. לפיכך, a ו- b הם מספרים הופכיים. בין מספרים הופכיים לא ניתן לקבוע מהו גודל ההפרש (למשל: $\frac{1}{10} - \frac{11}{11}$, $7 - \frac{1}{7}$, כמובן שלאור הנתונים יתכן גם המצב ש- $a = b = \pm 1$).

11. התשובה הנכונה היא : (3).

עלינו לקבוע מהי מערכת היחסים בין אורך הקו המודגש, לבין חצי היקף המעגל שבסרטוט. **טור א:** הקו המודגש מורכב מסכום חצי היקף המעגל שקוטרו הוא AB ומחצי היקף המעגל שקוטרו הוא BC . נחשב את אורכי כל אחד מחצאי המעגלים בנפרד. אורך מחצית היקף המעגל שקוטרו AB הוא $\frac{AB \cdot \pi}{2}$. אורך מחצית היקף המעגל שקוטרו BC הוא $\frac{BC \cdot \pi}{2}$. נחבר את אורכי הקווים. נקבל: $\frac{AB \cdot \pi}{2} + \frac{BC \cdot \pi}{2} \leftarrow$ נפשט על ידי הוצאת גורם משותף $\frac{\pi}{2}$. נקבל:

$$\frac{AB \cdot \pi}{2} + \frac{BC \cdot \pi}{2} = \frac{\pi}{2}(AB + BC)$$

$$\text{טור ב: מחצית היקף המעגל} = \frac{\pi \cdot \text{קוטר}}{2} = \frac{\pi}{2}(AB + BC)$$

לפיכך, אורך הקו המודגש שווה למחצית היקף המעגל שבסרטוט.

12. התשובה הנכונה היא : (2).

עלינו לקבוע מהי מערכת היחסים בין הביטויים בטורים. נבטא את אורך צלע AD באמצעות צלע משולש ABC על מנת לקשר ביניהם. למען נוחות ההסבר, נסמן את אורך כל אחת מהצלעות במשולש שווה צלעות ABC בביטוי $2a$. נתון כי AD הוא גובה במשולש שווה צלעות ABC. לפיכך, אורך צלע DC הוא a ($\frac{2a}{2} = a$). משולש ADC הוא משולש זהב (גובה במשולש שווה צלעות יוצרת שני משולשי זהב חופפים). לפיכך, $AD = a\sqrt{3}$ (הניצב הגדול במשולש זהב). נחשב את גודל הביטויים בטורים :

טור א : היקף משולש ABC = צלע $\cdot 3 = 2a \cdot 3 = 6a$.

טור ב : $4 \cdot AD = 4\sqrt{3}a$

נפשט את הטורים :

$6a$? $4\sqrt{3}a$ נחלק את שני הטורים ב- $2a$. נקבל :

3 ? $2\sqrt{3}$ נעלה את שני הטורים בריבוע. נקבל :

9 ? $4 \cdot 3$

9 ? 12 הביטוי בטור ב גדול יותר.

13. התשובה הנכונה היא : (4).

עלינו לקבוע מהי מערכת היחסים בין הביטויים בטורים. בשני הטורים חזקות בעלות בסיס זהה a . על-פי הנתון a הוא מספר חיובי ($0 < a$) אך לא נתון האם הוא שבר אמיתי, שווה ל-1 או מספר גדול מ-1. נציב מספרים מהראש כדי לבדוק מהי מערכת היחסים הנוצרת בין הביטויים בטורים ולאחר מכן נחשוב כיצד לאתגר את מערכת היחסים שקיבלנו. תחילה ננסה ליצור שיוויון, ולכן נציב $a = 1$. נקבל :

טור א : $a^{-a} = 1^{-1} = 1$

טור ב : $a^a = 1^1 = 1$

במצב זה, הביטויים בשני הטורים אכן שווים. כעת ננסה "לשבור" שיוויון זה וליצור אי שוויון. נציב $a = 2$. נקבל :

טור א : $a^{-a} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

טור ב : $a^a = 2^2 = 4$

במצב זה, הביטוי בטור ב גדול יותר. לפיכך, לא ניתן לקבוע מהי מערכת היחסים בין הביטויים. התשובה הנכונה היא (4).



14. התשובה הנכונה היא : (2).

עלינו לקבוע איזו מהטענות בתשובות נכונה על-פי הטבלה. נבדוק תשובות : בכל תשובה נבדוק האם הטענה נכונה. נפסול כל תשובה שנראה כי אינה נכונה :

תשובה (1) : ככל שהחשוד משקר פחות (באחוזים), כך עולה זיהוי השקר של שני השוטרים ← חשוד B משקר ב- 20% מהתשובות לשאלות שנשאל ושוטר א מזהה את שקריו ב- 50% מהמקרים. חשוד A משקר ב- 10% מהתשובות לשאלות שנשאל ושוטר א מזהה את שקריו ב- 35% מהמקרים. לפיכך, חשוד A משקר פחות מחשוד B, אך שוטר א מזהה את שקריו של חשוד A פחות מאת שקריו של חשוד B. תשובה זו נפסלת.

תשובה (2) : ככל שהחשוד משקר יותר (באחוזים), כך עולה זיהוי השקר של שני השוטרים ← אחוז התשובות השקריות עולה בצורה עקבית מחשוד A ועד חשוד D. אחוז זיהוי השקר של שוטר א עולה בהדרגה מחשוד A לחשוד D. אחוז זיהוי השקר של שוטר ב עולה בהדרגה מחשוד A לחשוד D. זו התשובה הנכונה.

כיוון שמצאנו תשובה נכונה, אין צורך לבדוק את שאר התשובות. נעשה זאת למען שלמות ההסבר :

תשובה (3) : ככל שהחשוד משקר פחות (באחוזים), כך גדל ההפרש בין זיהוי האמת של שוטרים א ו- ב ← חשוד D משקר ב- 75% מהתשובות לשאלות שהוא נשאל. שוטר א מזהה תשובה אמיתית ב- 45% מהמקרים בהם חשוד D דובר אמת. שוטר ב מזהה תשובה אמיתית ב- 30% מהמקרים בהם חשוד D דובר אמת. לפיכך, ההפרש בין זיהוי האמת של שוטרים א ו-ב לגבי חשוד D הוא 15% ($45\% - 30\%$). חשוד C משקר ב- 50% מהתשובות לשאלות שהוא נשאל. שוטר א מזהה תשובה אמיתית ב- 75% מהמקרים בהם חשוד C דובר אמת. שוטר ב מזהה תשובה אמיתית ב- 70% מהמקרים בהם חשוד C דובר אמת. לפיכך, ההפרש בין זיהוי האמת של שוטרים א ו-ב הוא 5% ($75\% - 70\%$). לפיכך, חשוד D משקר פחות מחשוד D וההפרש בין זיהוי האמת של שוטרים א ו-ב לגביהם קטן. תשובה זו נפסלת.

תשובה (4) : ככל שהחשוד משקר יותר (באחוזים), כך גדל ההפרש בין זיהוי האמת של שוטרים א ו- ב ← חשוד A משקר ב- 10% מהתשובות לשאלות שהוא נשאל. שוטר א מזהה תשובה אמיתית ב- 96% מהמקרים בהם חשוד A דובר אמת. שוטר ב מזהה תשובה אמיתית ב- 90% מהמקרים בהם חשוד A דובר אמת. לפיכך, ההפרש בין זיהוי האמת של שוטרים א ו-ב לגבי חשוד A הוא 6% ($96\% - 90\%$). חשוד B משקר ב- 20% מהתשובות לשאלות שהוא נשאל. שוטר א מזהה תשובה אמיתית ב- 90% מהמקרים בהם חשוד B דובר אמת. שוטר ב מזהה תשובה אמיתית ב- 90% מהמקרים בהם חשוד B דובר אמת. לפיכך, ההפרש בין זיהוי האמת של שוטרים א ו-ב הוא 0% ($90\% - 90\%$). לפיכך, חשוד B משקר יותר מחשוד A וההפרש בין זיהוי האמת של שוטרים א ו-ב לגביהם קטן. תשובה זו נפסלת.

15. התשובה הנכונה היא : (1).

עלינו לקבוע כמה אחוזים מתשובותיו השקריות של חשוד D לא זוהו על ידי שוטר א כתשובות שקריות. על-פי המבוא לטבלה, זיהוי שקר הוא אחוז המקרים שבהם השוטר זיהה תשובה שקרית מתוך המקרים שבהם החשוד ענה תשובה שקרית. שוטר א זיהה זיהוי שקר ב- 90% מתשובותיו של חשוד D. לפיכך, שוטר א לא זיהה תשובה שקרית של חשוד D ב- 10% מהמקרים (= 100% - 90%).

16. התשובה הנכונה היא : (1).

עלינו לקבוע בחקירתו של מי מהחשודים יש בהכרח תשובות שקריות שלא זוהו על ידי שום שוטר. הנתון לגבי זיהוי תשובות שקריות הוא הנתון לגבי זיהוי שקר, שמתאר את אחוז המקרים שבהם השוטר זיהה תשובה שקרית מתוך המקרים שבהם החשוד ענה תשובה שקרית. על מנת שיהיה חשוד שבחקירתו בהכרח יש תשובות שקריות שלא זוהו, שני השוטרים יחד צריכים לזהות פחות מ- 100% מהתשובות השקריות. מצב זה מתרחש רק לגבי חשוד A, אשר לגביו שוטר א זיהה 35% מהתשובות השקריות, ושוטר ב זיהה 45% מהתשובות השקריות. גם אם כל אחד מהשוטרים זיהה תשובות שקריות שונות, יחד הם זיהו רק 80% מתשובותיו השקריות של חשוד A (= 35% + 45%). לפיכך, לכל הפחות 20% מתשובותיו השקריות של חשוד A לא זוהו על ידי איש מהחוקרים.

17. התשובה הנכונה היא : (3).

עלינו לקבוע מהו ההפרש בין מספר התשובות האמיתיות של חשוד A שזוהו כאמיתיות על ידי שוטר ב, לבין מספר התשובות האמיתיות של חשוד B שזוהו כאמיתיות על ידי שוטר ב, אם חשוד A וחשוד B נשאלו 1,000 שאלות כל אחד. חשוד A ענה תשובה שקרית ב- 10% מהשאלות שנשאל. לפיכך, חשוד A ענה תשובה אמיתית על 90% מהשאלות שנשאל (= 100% - 10%). לפיכך, חשוד A ענה 900 תשובות אמיתיות (= 90% · 1000). ב- 90% מהמקרים שבהם חשוד A ענה תשובה אמיתית, שוטר ב זיהה אותה כאמיתית (הנתון לגבי זיהוי אמת). לפיכך, שוטר ב זיהה 810 תשובות אמיתיות של חשוד A כאמיתיות (= 90% · 900). חשוד B ענה תשובה שקרית ב- 20% מהשאלות שנשאל. לפיכך, חשוד B ענה תשובה אמיתית על 80% מהשאלות שנשאל (= 100% - 20%). לפיכך, חשוד B ענה 800 תשובות אמיתיות (= 80% · 1000). ב- 90% מהמקרים שבהם חשוד B ענה תשובה אמיתית, שוטר ב זיהה אותה כאמיתית (הנתון לגבי זיהוי אמת). לפיכך, שוטר ב זיהה 720 תשובות אמיתיות של חשוד B כאמיתיות (= 90% · 800). לפיכך, ההפרש בין מספר התשובות האמיתיות של חשוד A שזוהו כאמיתיות על ידי שוטר ב, לבין מספר התשובות האמיתיות של חשוד B שזוהו כאמיתיות על ידי שוטר ב הוא 90 (= 810 - 720).

18. התשובה הנכונה היא : (2).

עלינו לקבוע מהו רדיוס המעגל בס"מ. בנתונים נוצר קשר של שוויון בין אורך הקשת המודגשת (בס"מ) לבין השטח הכהה (בסמ"ר). נסמן את רדיוס המעגל באות r , נבטא את הגדלים בצורה אלגברית וניצור משוואה. מהמשוואה נחלץ את ערכו של r , כמבוקש. אורך הקשת המודגשת מהווה $\frac{1}{3}$ מהיקף המעגל ($= \frac{120^\circ}{360^\circ}$). לפיכך, אורך הקשת המודגשת הוא $\frac{2\pi r}{3}$. השטח הכהה מהווה $\frac{1}{3}$ משטח המעגל ($= \frac{120^\circ}{360^\circ}$). לפיכך גודל השטח הכהה הוא $\frac{\pi r^2}{3}$. נבעה משוואה: $\frac{\pi r^2}{3} = \frac{2\pi r}{3} \leftarrow$ נכפול את שני אגפי המשוואה ב-3. נקבל: $\pi r^2 = 2\pi r \leftarrow$ נחלק את שני אגפי המשוואה ב- πr . נקבל: $r = 2$.

19. התשובה הנכונה היא : (1).

עלינו לקבוע כמה ערכים שונים יכול x לקבל. בנתונים שתי משוואות בהן מופיעים גם הנעלמים y ו- z . על מנת לפשט את המשוואות ולבודד את ערכו של x , נציב את ערכו של z מהמשוואה הראשונה במשוואה השניה. על-פי המשוואה הראשונה: $x + y = z$. על-פי המשוואה השניה: $x + z = y$. נציב ונקבל: $x + x + y = y \leftarrow$ נחסיר y משני אגפי המשוואה. נקבל: $x = 0 \leftarrow 2x = 0$. לפיכך, ל- x יש ערך יחיד.

20. התשובה הנכונה היא : (3).

עלינו לחשב את גודלו של הביטוי בשאלה. הביטוי מורכב ממספרי התפוזים שקוטפים פועל מיומן ופועל לא מיומן בשעה. בנתונים נוצר קשר של יחס בין מספר התפוזים שקוטפים 2 פועלים מיומנים בשעה, לבין מספר התפוזים שקוטפים בשעה 3 פועלים לא מיומנים. נציב מספר מהראש עבור מספר התפוזים שקוטף פועל לא מיומן בשעה אחת, ובאמצעות הקשר הנתון נחשב כמה תפוזים קוטף פועל מיומן בשעה. נציב כי פועל לא מיומן קוטף בשעה תפוז אחד. ונקבל ש-3 פועלים לא מיומנים קוטפים בשעה 3 תפוזים ($= 1 \cdot 3$). 2 פועלים מיומנים קוטפים בשעה פי 2 תפוזים ממספר התפוזים שקוטפים בשעה 3 פועלים לא מיומנים. לפיכך, 2 פועלים מיומנים קוטפים בשעה 6 תפוזים ($= 2 \cdot 3$). לכן, פועל מיומן אחד קוטף בשעה 3 תפוזים ($= \frac{6}{2}$). נציב מספרים אלו בביטוי בשאלה ונחשב את ערכו: $\frac{\text{מספר התפוזים שקוטף פועל מיומן בשעה}}{\text{מספר התפוזים שקוטף פועל לא מיומן בשעה}} = \frac{3}{1} = 3$.

21. התשובה הנכונה היא : (1).

עלינו לקבוע איזו מהתכונות המתוארות בתשובות נכונה בהכרח לפחות לגבי מחצית מהמספרים בין 1 ל- n (כולל 1 ו- n). על-פי הנתון, n הוא מספר שלם גדול מ-1. נציב מספר במקום ערכו של n ונבדוק תשובות. נפסול כל תשובה שהתכונה המתוארת בה אינה נכונה לגבי מחצית מהמספרים בטווח שנוצר. נציב $n = 5$. נבדוק תשובות:

תשובה (1): אי-זוגיים ← ישנם 3 מספרים אי-זוגיים בין 1 ל-5 (1, 3, 5) המהווים יותר ממחצית המספרים בטווח. לפיכך, תשובה זו לא נפסלת.

תשובה (2): זוגיים ← ישנם 2 מספרים זוגיים בין 1 ל-5 (2, 4) המהווים פחות ממחצית המספרים בטווח. לפיכך, תשובה זו נפסלת.

תשובה (3): ראשוניים ← ישנם 3 מספרים ראשוניים בין 1 ל-5 (2, 3, 5) המהווים יותר ממחצית המספרים בטווח. לפיכך, תשובה זו לא נפסלת.

תשובה (4): אינם ראשוניים ← ישנם 2 מספרים שאינם ראשוניים בין 1 ל-5 (1, 4) המהווים פחות ממחצית המספרים בטווח. לפיכך, תשובה זו נפסלת.

כיוון שנפסלו רק שתי תשובות, נציב שוב ונבדוק את תשובות (1) ו-(3) שלא נפסלו. נציב $n = 9$. נבדוק תשובות:

תשובה (1): אי-זוגיים ← ישנם 5 מספרים אי-זוגיים בין 1 ל-9 (1, 3, 5, 7, 9) המהווים יותר ממחצית המספרים בטווח. לפיכך, תשובה זו לא נפסלת.

תשובה (3): ראשוניים ← ישנם 4 מספרים ראשוניים בין 1 ל-9 (2, 3, 5, 7) המהווים פחות ממחצית המספרים בטווח. לפיכך, תשובה זו נפסלת.

כיוון שפסלו 3 תשובות, התשובה הנכונה היא תשובה (1).

22. התשובה הנכונה היא : (1).

עלינו לקבוע לאיזה מאורכי החבל (במטרים) המפורטים בתשובות, לא יוכל גבריאל להגיע מקיצור ומחיבור החבלים שברשותו. נבדוק תשובות. נפסול כל תשובה שנצליח להראות כי גבריאל יכול להגיע לאורך הרשום בה.

תשובה (1): $4\frac{1}{2}$ ← על מנת להגיע לאורך של $4\frac{1}{2}$ מטרים, עלינו להשתמש בחבלים שאורכם

(המקורי או לאחר קיצורם לכדי מחצית מאורכם) הוא קטן מ- $4\frac{1}{2}$. אחד החבלים חייב

להיות כזה שאורכו אינו מספר שלם. מבין החבלים האפשריים, רק החבל שאורכו 3 מטרים, שמקוצר לכדי מחצית מאורכו עונה על תנאי זה, ואורכו $1\frac{1}{2}$ מטרים ($\frac{3}{2} =$). לחבל זה ניתן

לחבר את החבל שאורכו 2 מטרים. במקרה זה אורך החבל הוא $3\frac{1}{2}$ מטרים ($2 + 1\frac{1}{2} =$).

אורך זה אינו מתאים. לחבל שאורכו $1\frac{1}{2}$ מטרים ניתן גם לחבר את החבל שאורכו 4 מטרים

(החבל שאורכו 8 מטרים לאחר שקוצר לכדי מחצית מאורכו). במקרה זה, אורך החבל המחובר הוא $5\frac{1}{2}$ מטרים ($4 + 1\frac{1}{2} =$). אורך זה אינו מתאים. כיוון שאין אפשרויות נוספות,

לאורך חבל זה גבריאל לא יוכל להגיע. זו התשובה הנכונה.

כיוון שמצאנו את התשובה הנכונה, אין צורך לבדוק את התשובות הנוותרות. נעשה זאת למען שלמות ההסבר:

תשובה (2): 9 ← לאורך חבל של 9 מטרים ניתן להגיע על ידי חיבור החבל שאורכו 8 מטרים

עם החבל שאורכו 1 מטר (אורך החבל שנוצר לאחר שהחבל שאורכו 2 מטרים קוצר לכדי מחצית מאורכו). תשובה זו נפסלת.

תשובה (3): 14 ← לאורך חבל של 14 מטרים ניתן להגיע על ידי חיבור כל החבלים לאחר שקוצרו למחצית מאורכם. אורך החבל שנוצר מקיצור החבל שאורכו 15 מטרים לכדי מחצית מאורכו הוא $7\frac{1}{2}$ מטרים ($=\frac{15}{2}$). אורך החבל שנוצר מקיצור החבל שאורכו 8 מטרים לכדי מחצית מאורכו הוא 4 מטרים ($=\frac{8}{2}$). אורך החבל שנוצר מקיצור החבל שאורכו 3 מטרים לכדי מחצית מאורכו הוא $1\frac{1}{2}$ מטרים ($=\frac{3}{2}$). אורך החבל שנוצר מקיצור החבל שאורכו 2 מטרים לכדי מחצית מאורכו הוא 1 מטר ($=\frac{2}{2}$). לפיכך, חיבור כל ארכי חבלים אלו הוא 14 מטר ($=1+1\frac{1}{2}+4+7\frac{1}{2}$). תשובה זו נפסלת.

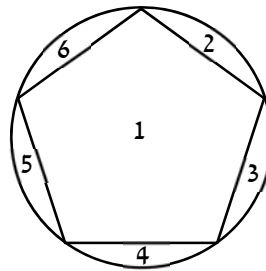
תשובה (4): $16\frac{1}{2}$ ← לאורך חבל של $16\frac{1}{2}$ מטרים ניתן להגיע על ידי חיבור החבל שאורכו 15 מטרים עם החבל שאורכו $1\frac{1}{2}$ מטר (אורך החבל שנוצר לאחר שהחבל שאורכו 3 מטרים קוצר לכדי מחצית מאורכו). תשובה זו נפסלת.

23. התשובה הנכונה היא: (2).

עלינו לקבוע מהו ערכו של n.

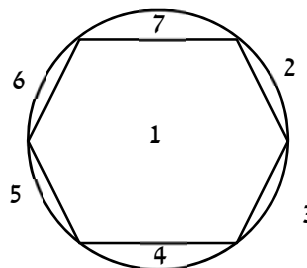
n הוא מספר הצלעות של מצולע החסום במעגל, ומחלק את המעגל ל-7 שטחים נפרדים. נבדוק תשובות: בכל תשובה נסרטט מצולע בעל מספר צלעות לפי המספר הרשום בתשובה ונחסום אותו במעגל. נספור את מספר השטחים הנפרדים שנוצרים. נפסול כל תשובה שבה מספר השטחים הנפרדים שנוצרים שונה מ-7:

תשובה (1): 5 ← נסרטט מצולע בעל 5 צלעות ונחסום אותו במעגל.



נוצרו 6 שטחים נפרדים (ראו סרטוט). לפיכך, תשובה זו נפסלת.

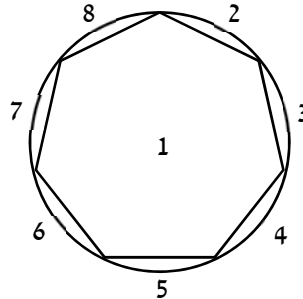
תשובה (2): 6 ← נסרטט מצולע בעל 6 צלעות ונחסום אותו במעגל.



נוצרו 7 שטחים נפרדים (ראו סרטוט). לפיכך, זו התשובה הנכונה.

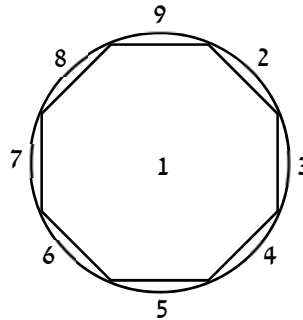
כיוון שמצאנו תשובה נכונה, אין צורך לבדוק את שאר התשובות. נעשה זאת למען שלמות ההסבר:

תשובה (3): 7 ← נסרטט מצולע בעל 7 צלעות ונחסום אותו במעגל.



נוצרו 8 שטחים נפרדים (ראו סרטוט). לפיכך, תשובה זו נפסלת.

תשובה (4): 8 ← נסרטט מצולע בעל 8 צלעות ונחסום אותו במעגל.



נוצרו 9 שטחים נפרדים (ראו סרטוט). לפיכך, תשובה זו נפסלת.

24. התשובה הנכונה היא: (1).

עלינו לקבוע איזה מהמספרים בתשובות הוא הקטן ביותר. נשווה בין כל שתי תשובות, ונפסול את התשובה שהמספר הרשום בה הוא גדול יותר.

$$\text{תשובה (1): } \frac{6}{5} : \text{תשובה (2): } \frac{7}{5}$$

לשני השברים בתשובות אלו מכנה זהה (= 5), ובתשובה (2) המונה גדול יותר ($6 < 7$). לפיכך, השבר בתשובה (2) גדול יותר (ככל שהמונה גדול יותר, השבר גדול יותר). תשובה (2) נפסלת.

נשווה בין תשובות (3) ו-(4):

$$\text{תשובה (3): } \frac{17}{13} : \text{תשובה (4): } \frac{17}{14}$$

לשני השברים מונה זהה (= 17) ובתשובה (3) המכנה קטן יותר ($13 < 14$). לפיכך, השבר בתשובה (3) גדול יותר (ככל שהמכנה קטן יותר, השבר גדול יותר). תשובה (3) נפסלת.



נשווה בין תשובה (1) לתשובה (4):

$$\frac{17}{14} : \text{תשובה (1)} : \frac{6}{5} : \text{תשובה (3)}$$

לשני שברים אלו אין מכנה זהה ואין מונה זהה. לפיכך, נפשט את שני השברים מבלי לשנות

$$\frac{6}{5} = \frac{6 \cdot 14}{5 \cdot 14} = \frac{84}{5 \cdot 14} \quad \text{נקבל: } (14 \cdot 5 = 70)$$

$$\frac{17}{14} = \frac{17 \cdot 5}{14 \cdot 5} = \frac{85}{14 \cdot 5}$$

(שימו לב, אין צורך לחשב את הערך המספרי של המכנה). כעת לשבר

בתשובה (4) מונה גדול יותר ($85 < 84$), ולפיכך השבר בתשובה (4) גדול יותר (ככל שהמונה

גדול יותר, השבר גדול יותר). תשובה (4) נפסלת.

לפיכך, השבר בתשובה (1) הוא הקטן ביותר.

25. התשובה הנכונה היא: (2).

עלינו לקבוע כמה שקלים יוותרו בידי האיש הרביעי כשיצא מהחדר. בנתונים מתואר מספר

האנשים בחדר בנעלמים ומספר השקלים בנעלמים שיש לכל אחד מהם בתחילה, וכן את

החוקיות של יציאת האנשים מהחדר ואופן חלוקת הכסף. נציב מספר במקום ערכו של n ,

נספר עליו את הסיפור ונחשב כמה שקלים יוותרו בידי האיש הרביעי כשיצא מהחדר. נציב

$n = 5$. לפיכך, בתחילה ישבו בחדר 5 אנשים ולכל אחד מהם היו 5 שקלים. לפני שהאיש

הראשון יצא, הוא נתן שקל אחד לכל אחד מ-4 האנשים הנותרים, כך שלכל מ-4 האנשים

הנותרים יש כעת 6 שקלים ($= 5 + 1$). לפני שהאיש השני יצא, הוא נתן שקל אחד לכל אחד

מ-3 האנשים הנותרים, כך שלכל אחד מ-3 האנשים הנותרים יש כעת 7 שקלים ($= 6 + 1$).

לפני שהאיש השלישי יצא, הוא נתן שקל אחד לכל אחד מ-2 האנשים הנותרים, כך שלכל

אחד מ-2 האנשים הנותרים יש כעת 8 שקלים ($= 7 + 1$). לפני שהרביעי יצא, הוא נתן שקל

אחד לאיש היחיד שנותר. לפיכך, לאחר שיצא, נותרו לאיש הרביעי 7 שקלים ($= 8 - 1$).

נבדוק תשובות, ונפסול כל תשובה שערכה שונה מ-7:

תשובה (1): $n - 4$ ← נציב $n = 5$. נקבל: $n - 4 = 5 - 4 = 1$. תשובה זו נפסלת.

תשובה (2): $n - 7$ ← תשובה זו לא נפסלת.

תשובה (3): $n - 3$ ← נציב $n = 5$. נקבל: $n - 3 = 5 - 3 = 2$. תשובה זו נפסלת.

תשובה (4): $n - 12$ ← תשובה זו נפסלת.

כיוון שפסלנו 3 תשובות, נסמן את תשובה (2).