א. כמות המחשבים המיוצרת מהווה סדרה חשבונית, כי היא גדלה במספר קבוע משבוע לשבוע.

נתון: $\boxed{a_1 = 900}$ **,** $S_{50} = 167,500$ **.**

$$167,500 = \frac{50 \cdot [2 \cdot 900 + d(50-1)]}{2}$$

$$167,500 = 25 \cdot (1800 + 49d) \quad / : 25$$

$$6700 = 1800 + 49d$$

$$4,900 = 49d \quad / : 49$$

$$\boxed{d = 100}$$

תשובה: כמות המחשבים שייצרו בכל שבוע גדולה ב- 100 **מן הכמות שייצרו בשבוע שלפניו.**

ב. מספר המחשבים שנמכרים מהווה סדרה הנדסית כי הכמות גדלה מחודש לחודש פי מספר קבוע q **.**

נתון: $b_4 = 160$ **,** $b_7 = 1,280$ **.**

$$b_7 = b_4 \cdot q^3$$

$$1,280 = 160 \cdot q^3 \quad / : 160$$

$$8 = q^3 \quad / \sqrt[3]{8}$$

$$\boxed{q = 2}$$

$$b_4 = b_1 \cdot q^3$$

$$160 = 8 \cdot b_1 \quad / : 8$$

$$\boxed{b_1 = 20}$$

תשובה: בחודש הראשון נמכרו 20 **מחשבים.**

ג. החודש ה- 7 **היה החודש האמצעי של חודשי המכירה.**

מכאן שהיו 6 **חודשים לפניו, ו-** 6 **חודשים אחריו – סה"כ** 13 **חודשי מכירה.**

תשובה: המכירה נמשכה 13 **חודשים.**

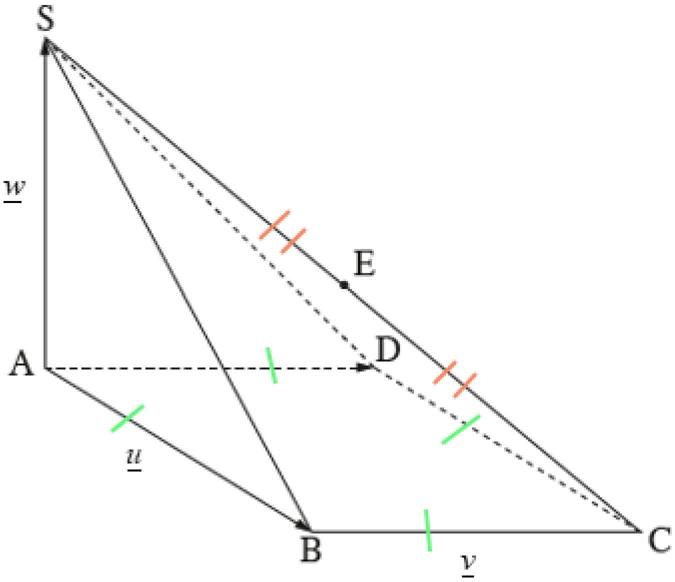
ד. נחשב כמה מחשבים נמכרו ב- 13 **חודשי המכירה.**

$$S_{13} = \frac{20 \cdot (2^{13} - 1)}{2 - 1}$$

$$S_{13} = 163,820$$

ולכן, כמות המחשבים שלא נמכרה היא $167,500 - 163,820 = 3,680$

תשובה: $3,680$ **מן המחשבים שייצרו במפעל לא נמכרו.**



א. נתונה פירמידה מרובעת SABCD **, שבסיסה** ABCD **הוא מעוין.**

מכאן שצלעות הבסיס שוות זו לזו . נסמן ב- a **את אורך צלע המעוין.**

הנקודה E **היא אמצע המקצוע** SC **.**

$\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ **,** $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ **,** $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$ **.**

נביע גם את הווקטורים $\overrightarrow{EB}$ **ו-** $\overrightarrow{ED}$ **, באמצעות** $\underline{u}$ **,** $\underline{v}$ **ו-** $\underline{w}$ **.**

$$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{EB}=-\frac{1}{2}\underline{w}+\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}-\underline{v}$$

$$\boxed{\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{w}}$$

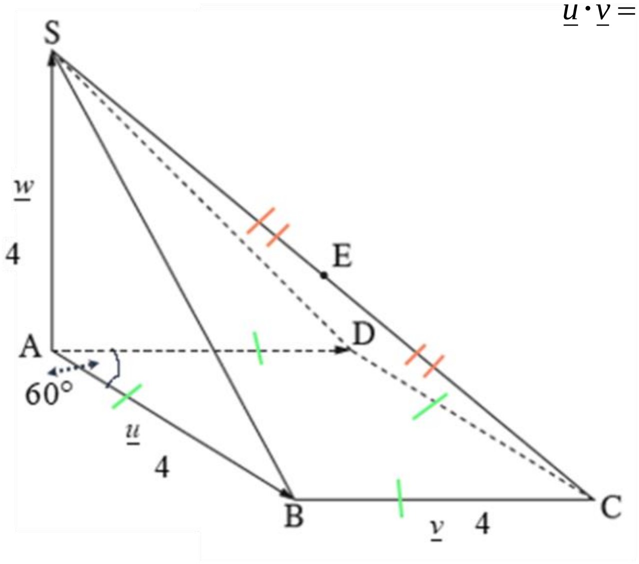
$$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{ED}=\frac{1}{2}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{w}+\underline{v}-\underline{u}$$

$$\boxed{\overrightarrow{ED}=-\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{w}}$$

תשובה: $\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{w}$ **,** $\overrightarrow{ED}=-\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{w}$ **.**

ב. המקצוע SA מאונך לבסיס הפירמידה, ולכן $\underline{u} \perp \underline{w}$ ו- $\underline{v} \perp \underline{w}$.



$\sphericalangle \mathrm{BAD} = 60°$, ולכן $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos 60° = a \cdot a \cdot 0.5 = 0.5a^2$

נתון גם כי $|\underline{u}| = |\underline{w}|$.

$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \underline{u}} \quad |\underline{u}| = a \quad \underline{u}^2 = a^2$

$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \underline{v}} \quad |\underline{v}| = a \quad \underline{v}^2 = a^2$

$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AS}} = \underline{w}} \quad |\underline{w}| = a \quad \underline{w}^2 = a^2$

$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0.5a^2$

$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{w}$

$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{v} \perp \underline{w}$

נוכיח כי $\overrightarrow{\mathrm{EB}}$ מאונך ל- $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{EB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ED}} = (\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{w}) \cdot (-\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{w})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ED}} = -\frac{1}{4}\underline{u}^2 + \frac{1}{4}\underline{u}\cdot\underline{v} + \frac{1}{4}\underline{u}\cdot\underline{v} - \frac{1}{4}\underline{v}^2 + \frac{1}{4}\underline{w}^2$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ED}} = -\frac{1}{4} \cdot a^2 + \frac{1}{4} \cdot 0.5a^2 + \frac{1}{4} \cdot 0.5 \cdot a^2 - \frac{1}{4} \cdot a^2 + \frac{1}{4} \cdot a^2$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ED}} = 0 \quad \rightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathrm{EB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{ED}}}$$

תשובה: הוכחנו כי $\overrightarrow{\mathrm{EB}}$ מאונך ל- $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$.

ג. נתון: $\mathrm{A}(0, 0, 0)$ ראשית הצירים, ו- $\mathrm{B}(2\sqrt{3}, 2, 0)$.

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(2\sqrt{3} - 0)^2 + (2 - 0)^2 + (0 - 0)^2} \quad \rightarrow \mathrm{AB} = 4$$

הקודקוד D נמצא על החלק החיובי של ציר ה- y .

מכיוון ש- AS מאונך לבסיס הפירמידה, ולכן מאונך גם ל – AD שמונח על ציר ה- y ,

אז AS מונח על ציר ה- z.

שיעור ה- z של הקודקוד S הוא חיובי, כאשר $\mathrm{AS} = \mathrm{AD} = 4$, ולכן $\mathrm{S}(0, 0, 4)$.

תשובה: אורך המקצוע AB הוא 4 , $\mathrm{S}(0, 0, 4)$.

ד. נחשב את נפח הפירמידה SABCD .

$$\mathrm{V_{SABCD}} = \frac{S_{\Delta\mathrm{ABCD}} \cdot \mathrm{AS}}{3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot \sin 60° \cdot 4}{3}$$

$$\boxed{\mathrm{V_{SABCD}} = \frac{32\sqrt{3}}{3}}$$

תשובה: נפח הפירמידה SABCD הוא $\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

נוסחת הגדילה והדעיכה: $A_t = A_0 \cdot q^t$ **, כאשר** A_0 **- הכמות ההתחלתית,**

q **הוא גורם הגדילה/דעיכה,** A_t **הכמות לאחר זמן** t**.**

א. גרף I **יורד בצורה תלולה יותר מגרף** II **, מה שמתאים למקדם דעיכה קטן יותר, בתחום** $0<q<1$ **.**

תשובה: גרף I **מתאים לקרחון שקצב הפשרתו מהיר יותר.**

ב. הפונקציה $f(t)=7\cdot 0.96^t$ **מתארת את המשקל של קרחון** A **בכל שנה.**

מכאן שמשקל הקרחון בתחילת המחקר הוא 7 **אלפי טונות, וגורם הדעיכה הוא** $q=0.96$ **(פונקציה יורדת).**

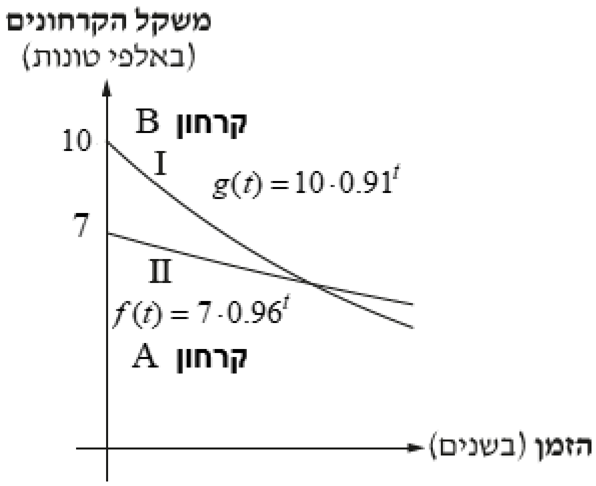
הפונקציה $g(t)=10\cdot 0.91^t$ **מתארת את המשקל של קרחון** B **בכל שנה.**

מכאן שמשקל הקרחון בתחילת המחקר הוא 10 **אלפי טונות, וגורם הדעיכה הוא** $q=0.91$ **(פונקציה יורדת).**

גם על פי נקודת ההתחלה, שעל הציר האנכי, שבה $g(0)>f(0)$ **, וגם על פי מקדם הדעיכה,**

ניתן לקבוע שגרף I **מתאר את המשקל של קרחון** B**, וגרף** II **מתאר את המשקל של קרחון** A**.**

תשובה: גרף I **:** $g(t)$ **, גרף** II**:** $f(t)$ **.**



ג. נחשב מה היה המשקל של שני הקרחונים לאחר 7 **שנים.**

קרחון A **:** 5.26 **אלפי טונות** $= f(7)=7\cdot 0.96^7$

קרחון B **:** 5.17 **אלפי טונות** $= g(7)=10\cdot 0.91^7$

תשובה: המשקל של קרחון A **היה גדול יותר לאחר** 7 **שנים מתחילת הבדיקה .**

הערה

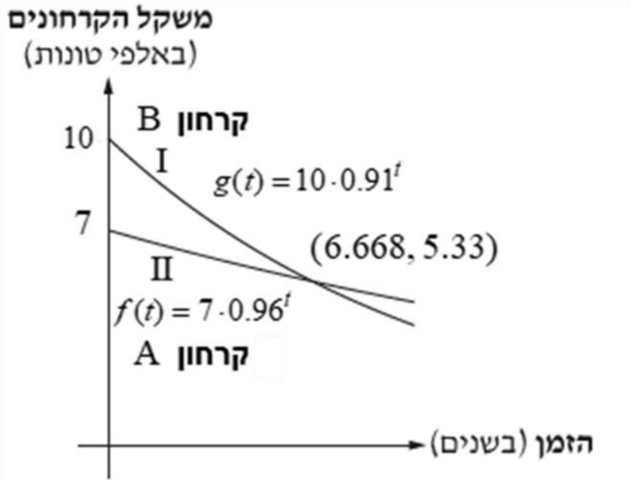
ניתן לפתור קודם את סעיף ד (ולציין זאת במפורש במחברת הבחינה,

ולאחר מכן לענות על סעיף ג על פי הגרף,

כאשר רואים שמייד לאחר 6.668 **שנים בערך משקלו של קרחון** A **גדול יותר,**

כי הגרף שלו מעל זה של קרחון B **.**

ד. נחשב היה המשקל של קרחון A שווה למשקל של קרחון B.



$$7\cdot 0.96^t = 10\cdot 0.91^t \quad /:7\cdot 0.91^t$$

$$\frac{0.96^t}{0.91^t}=\frac{10}{7} \quad \to \left(\frac{0.96}{0.91}\right)^t = 1.429$$

$$1.055^t = 1.429$$

$$\ell n1.055^t = \ell n1.429$$

$$t\ell n1.055 = \ell n1.429$$

$$t=\frac{\ell n1.429}{\ell n1.055}$$

$$\boxed{t\approx 6.668}$$

(בבדיקה, נקבל שמשקל כל אחד מהקרחונים הוא בערך 5.33 אלפי טונות .)

תשובה: לאחר 6.668 שנים בערך, היה המשקל של קרחון A שווה למשקל של קרחון B .

ה. החוקרת הנמרצת בדקה גם את מספר כלבי הים באזור זה.

היא גילתה שמספר כלבי הים באזור זה גדל בכל שנה פי מספר קבוע.

לאחר 10 שנים מתחילת המדידות היה מספר כלבי הים גדול פי 1.5 ממספרם בתחילת המדידות.

נחשב בכמה אחוזים גדל מספר כלבי הים בכל שנה.

$$A_{10} = A_0\cdot q^{10}$$

$$1.5A_0 = A_0\cdot q^{10} \quad /:A_0>0$$

$$1.5 = q^{10}$$

$$\sqrt[10]{1.5} = q$$

$$\boxed{q=1.0414}$$

נמצא את אחוז הגדילה השנתי.

$$1.0414=\frac{100+P}{100} \quad /\cdot 100$$

$$104.14 = 100+P$$

$$\boxed{P=4.14\%}$$

תשובה: מספר כלבי הים גדל ב- 4.14% בכל שנה.

א. ניתן לראות שבנקודה שבה גרף I חותך את ציר ה- x ועובר מחיוביות לשליליות,

גרף II עובר מעלייה לירידה ומקבלים מקסימום.

ניתן לראות שבנקודה שבה גרף I חותך את ציר ה- x ועובר משליליות לחיוביות,

גרף II עובר מירידה לעלייה ומקבלים מינימום.

לכן גרף מתאים לפונקציית הנגזרת של הפונקציה הוא גרף I.

תשובה: גרף I מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. נתונה הפונקציה $f(x)=(x-4)^2\cdot e^{x-3}$.

(1) תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא כל x .

(2) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים .

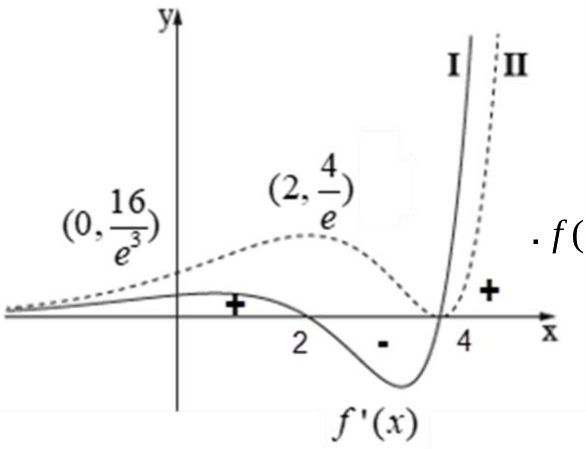
בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$:

$$(x-4)^2\cdot e^{x-3}=0$$

$$x-4=0 \quad \to x=4 \quad \to \boxed{(4,0)} \quad \leftarrow e^{x-3}>0$$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y מתקיים $x=0$:

$$f(x)=(0-4)^2\cdot e^{0-3}=16e^{-3} \quad \to \boxed{(0,\frac{16}{e^3})\approx(0,0.8)}$$.



תשובה: $(4,0)$, $(0,\frac{16}{e^3})\approx(0,0.8)$.

(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון $f(x)$, ונקבע את סוגן על פי שני הגרפים.

$$\boxed{f(x)=(x-4)^2\cdot e^{x-3}}$$

$$f'(x)=2(x-4)\cdot 1\cdot e^{x-3}+(x-4)^2e^{x-3}$$

$$f'(x)=(x-4)\cdot e^{x-3}(2+x-4)$$

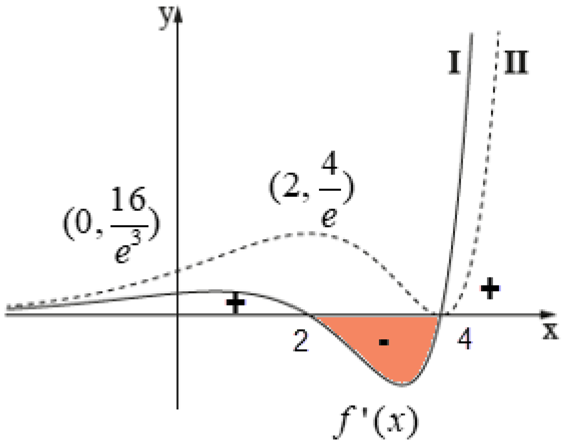
$$\boxed{f'(x)=(x-4)\cdot e^{x-3}(x-2)}$$

$$x-4=0 \quad \to x=4 \quad \to \boxed{(4,0)}$$

$$x-2=0 \quad \to x=2 \quad \to \boxed{(2,\frac{4}{e})\approx(2,1.47)}$$

תשובה: $(4,0)$ מינימום , $(2,\frac{4}{e})\approx(2,1.47)$ מקסימום.

ה. נחשב את השטח המוגבל על ידי פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ציר ה- x (צבוע בכתום).



$$S = \int_2^4 (0 - f'(x))\, dx = -f(x)\Big]_2^4$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=4 & -f(4)=0 \\ x=2 & -f(2)=-\frac{4}{e} \end{array}\right\} S = 0 - (-\frac{4}{e}) \rightarrow \boxed{S = \frac{4}{e} \approx 1.47}$$

תשובה: השטח, המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ועל ידי ציר ה- x, הוא $\frac{4}{e} \approx 1.47$.

ו. נתונה הפונקציה $g(x) = -f'(x)$, שהגרף שלה סימטרי לגרף של $f'(x)$ עם ציר ה- x כציר סימטריה.

לכן, השטח של $g(x) = -f'(x)$ יהייה כולו מעל ציר ה- x בגודל שווה גם ל- $\frac{4}{e} \approx 1.47$'

ולכן השטח שבין שני הגרפים יהייה כפול בגודלו : $2 \cdot \frac{4}{e} = \frac{8}{e} \approx 2.94$

תשובה: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ הוא $\frac{8}{e} \approx 2.94$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{3x^2}{2\ell n\,x+1}$.

(1) בתחום ההגדרה, הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית גדול מאפס, לכן $x>0$ **.**

בתחום ההגדרה, המכנה שונה מאפס, לכן $2\ell n\,x+1\neq 0 \quad \to \ell n\,x\neq -0.5 \quad \to x\neq e^{-0.5}$ **.**

תשובה: $x>0$ **,** $x\neq e^{-0.5}\approx 0.61$ **.**

(2) בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **:**

$3x^2=0 \quad \to \cancel{x=0}$ **(הפתרון נפסל כי אינו בתחום ההגדרה).**

תשובה: גרף הפונקציה $f(x)$ **אינו חותך את ציר ה-** x **.**

(3) $x=e^{-0.5}$ **מאפס את המכנה של הפונקציה ולא את המונה, ולכן הישר** $x=e^{-0.5}$ **אסימפטוטה אנכית.**

$f(0.001)=\dfrac{3(0.001)^2}{2\ell n\,(0.001)+1}=-2.3\cdot 10^{-7}\to 0$ **ולכן הגרף של שואף לנקודה הריקה** $(0,0)$ **.**

תשובה: $x=e^{-0.5}$ **אסימפטוטה המאונכת לציר ה-** x **של הפונקציה** $f(x)$ **.**

ב. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגה.

$$f(x)=\frac{3x^2}{2\ell n\,x+1}=3\cdot\frac{x^2}{2\ell n\,x+1}$$

$$f'(x)=3\cdot\frac{2x\cdot(2\ell n\,x+1)-\dfrac{2x^2}{x}}{(2\ell n\,x+1)^2}$$

$$f'(x)=3\cdot\frac{2x\cdot(2\ell n\,x+1)-2x}{(2\ell n\,x+1)^2}$$

$$f'(x)=3\cdot\frac{2x\cdot(2\ell n\,x+1-1)}{(2\ell n\,x+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{12x\cdot\ell n\,x}{(2\ell n\,x+1)^2}}$$

$$12x=0 \quad \to \cancel{x=0} \quad \leftarrow x>0, x\neq e^{-0.5}\approx 0.61$$

$$\ell n\,x=0 \quad \to x=1 \quad \to (1,3)$$

$$f'(0.9)<0,\ f'(1.1)>0 \quad \to \boxed{(1,3),\min}$$

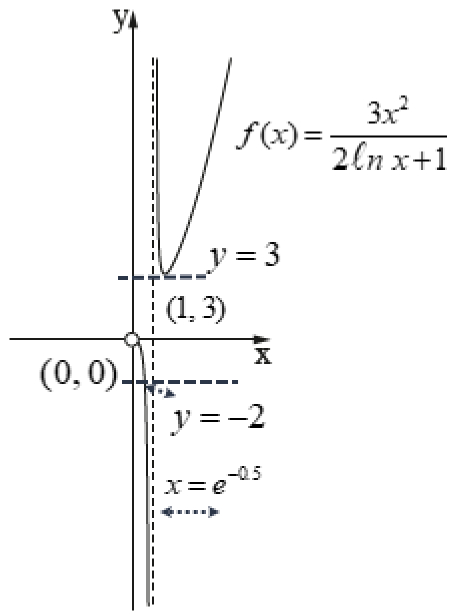
$$f'(0.5)<0 \qquad \searrow$$

תשובה: $(1,3)$ **מינימום .**

ג. תשובה: עלייה $x>1$ **, ירידה** $e^{-0.5}<x<1$ **או** $0<x<e^{-0.5}$.

ד. הגרף המתאים הוא גרף III על פי האסימפטוטה האנכית $x=e^{-0.5}$, הנקודה הריקה $(0, 0)$,

תחומי העלייה והירידה, ונקודת המינימום $(1, 3)$.



III

תשובה: גרף III הוא גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. הישר $y=t$, שהוא פונקציה קבועה, משיק לגרף הפונקציה $f(x)$,

ולכן ההשקה היא בנקודת המינימום $(1, 3)$, שכן רק בה מתקיים $f\,'(x)=0$ והמשיק הוא $y=3$.

מכאן ש- $t=3$, והישר $y=t-5$ הוא הישר $y=-2$, שחותך את הגרף פעם אחת בלבד,(ראו חץ בסרטוט).

תשובה: כן, הישר $y=t-5$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ פעם אחת.