מבחנים נוספים לחזרה

חלק זה כולל 10 מבחנים נוספים לחזרה בהתאם למבנה של שאלון 035806. מבחנים אלו ממוספרים 30-21.

לתשומת ליבכם!
הנושאים: בעיות תערובת, אינדוקציה מתמטית וסדרות מעורבות, אינם נכללים עוד בתכנית הלימודים של שאלון זה.
כמו כן, החל מהמועד הקרוב – קיץ תשע"ד, 2014,
שאלון 806 יכלול 8 שאלות ולא 9 שאלות כפי שהיה עד עכשיו.
(הפרק השני בשאלון יכלול 2 שאלות במקום 3.)
המבחנים 30-21 מותאמים לשינויים הנ"ל.

מבנה השאלון – 806

בשאלון 806 שלושה פרקים.

משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

המבנה של שאלון 035806:

פרק ראשון – בעיות מילוליות, סדרות, הסתברות (40 נקודות).
הפרק כולל 3 שאלות, מתוכן יש לענות על 2 שאלות
(לכל שאלה – 20 נקודות).

פרק שני – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות).
הפרק כולל 2 שאלות, מתוכן יש לענות על שאלה אחת
(לכל שאלה – 20 נקודות).

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות עם שורשים ריבועיים ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות).
הפרק כולל 3 שאלות, מתוכן יש לענות על 2 שאלות.
(לכל שאלה – 20 נקודות).

מבחן 21

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

1. משאית יצאה מעיר א׳ לכיוון עיר ב׳ במהירות מסוימת.
באותו זמן יצא אוטובוס מעיר ב׳ לכיוון עיר א׳ במהירות הגבוהה ב- 30 קמ״ש ממהירות המשאית. אחרי שעתיים של נסיעה טרם נפגשו השניים והמרחק ביניהם היה 150 ק״מ.
המשאית הגיעה לעיר ב׳ $4\frac{1}{2}$ שעות לאחר הפגישה עם האוטובוס.
מצא את מהירות המשאית ואת המרחק בין עיר א׳ לעיר ב׳.

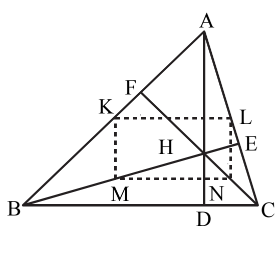
2. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $a_n = 2n - 4 + T_n$
כאשר $T_n = 3n + (3n+2) + (3n+4) + \dots + 5n$.
א. הצג סדרה זו על-ידי תבנית לפי מקום (כלומר, מצא נוסחה ל- a_n כפונקציה של n בלבד).
ב. חשב את ההפרש $(a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99})$.

3. בכל אחת משתי הקופסאות A ו- B יש חרוזים כחולים ולבנים.
בכל קופסה יש 6 חרוזים. בקופסה A יש 4 חרוזים כחולים ו- 2 חרוזים לבנים. מוציאים באקראי חרוז אחד מכל קופסה ומחזירים אותו לקופסה שהוא הוצא ממנה.
חוזרים על התהליך 3 פעמים.
נתון כי ההסתברות להוציא לפחות חרוז אחד לבן מקופסה A שווה להסתברות להוציא לפחות חרוז אחד כחול מקופסה B.
א. (1) מצא את ההסתברות להוציא לפחות חרוז אחד לבן מקופסה A.
(2) מצא כמה חרוזים לבנים יש בקופסה B.
ב. אסף בוחר באקראי קופסה ומוציא ממנה שני חרוזים זה אחר זה עם החזרה. לאחר שאסף מחזיר את החרוזים לקופסה שהוצאו ממנה, רונן מוציא באקראי חרוז אחד מכל קופסה.
מצא את ההסתברות:
(1) שאסף יוציא שני חרוזים שצבעיהם שונים.
(2) שרונן יוציא שני חרוזים שצבעיהם שונים.

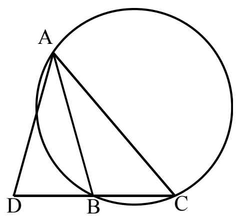
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על אחת מבין השאלות 4-5.

4. גבהי המשולש ABC נפגשים בנקודה H.
נתון: $CL = LA$, $BK = KA$,
$BM = MH$, $CN = NH$.
א. הוכח: המרובע KLNM הוא מלבן.
ב. הוכח: את המשושה KFLENM ניתן לחסום במעגל.



5. משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R.
נקודה D נמצאת על המשך הצלע BC
כך ש: $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ACB$.
נתון: $\sphericalangle ADB = \alpha$, $\sphericalangle ABD = \beta$.
א. הבע באמצעות R , α ו- β
את שטח המשולש ABD.
ב. נתון גם: $AB = AD$, שטח המשולש ABD הוא $\frac{R^2}{4}$.
חשב את α אם נתון כי $\alpha > 60^\circ$.

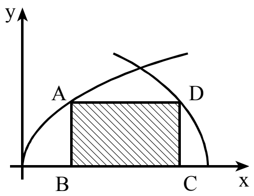


פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות.

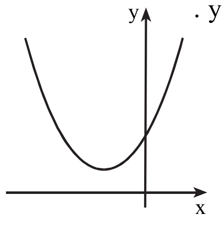
ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x - 2 - \tan(x-1)$ בתחום $-0.25 \le x \le 2.25$.
א. מצא: **(1)** נקודות קיצון. **(2)** תחומי עלייה וירידה.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. חשב את $f(1)$ ורשום את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 \le x \le 2$.

7. לפניך הגרפים של הפונקציות $f(x) = \sqrt{mx}$ $(m > 0)$
ו- $g(x) = \sqrt{36 - 4x}$.
בין שני הגרפים וציר ה- x חסום מלבן $ABCD$
שצלעותיו מקבילות לצירים.
ידוע כי שטח המלבן $ABCD$
הוא מקסימלי כאשר $x_A = 2$.
מצא את השטח המקסימלי של המלבן.



8. בציור שלפניך מתוארת פרבולה שמשוואתה $y = x^2 + x + 1$.
א. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה
הנ"ל העוברים דרך ראשית הצירים $(0;0)$.
ב. השטח המוגבל בין גרף הפרבולה לבין שני
המשיקים הנ"ל מסתובב סביב ציר ה- x.
חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



תשובות למבחן 21:

1. 60 קמ"ש, 450 ק"מ.

2. א. $4n^2+6n-4$. ב. 20500 .

3. א. (1) $\frac{19}{27}$. (2) 4 חרוזים לבנים. ב. (1) $\frac{4}{9}$. (2) $\frac{5}{9}$.

5. א. $\frac{2R^2\sin^3(\alpha+\beta)\sin\beta}{\sin\alpha}$. ב. 75° .

6. א. (1) $(-0.25;0.5096)$ מקסימום,

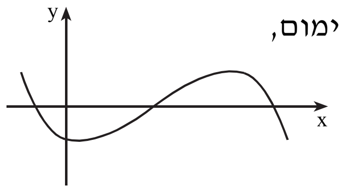
$\left(0.2146;-\frac{\pi}{2}+1\right)$ מינימום, $\left(1.7854;\frac{\pi}{2}-1\right)$ מקסימום,

$(2.25;-0.5096)$ מינימום.

(2) עלייה: $0.2146<x<1.7854$;

ירידה: $1.7854<x<2.25$

או $-0.25<x<0.2146$.



ג. $f(1)=0$. חיוביות: $1<x\le 2$; שליליות: $0\le x<1$.

7. 12 .

8. א. $y=3x$, $y=-x$. ב. $1\frac{1}{15}\pi$.

מבחן 22

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

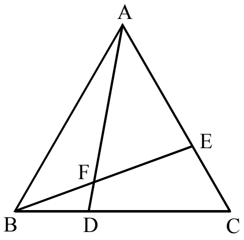
1. מעיר א׳ לעיר ב׳ אפשר להגיע בדרך סלולה שאורכה 35 ק״מ או במסלול עפר שאורכו 20 ק״מ. מהירות הרכיבה באופניים בדרך הסלולה גבוהה ביותר מ- 4 קמ״ש ממהירות הרכיבה באופניים בדרך העפר.
זמן הרכיבה בדרך הסלולה ארוך בחצי שעה מזמן הרכיבה בדרך העפר.
א. באיזה תחום מספרי נמצא זמן הרכיבה על אופניים בדרך העפר?
ב. רוכב עבר את הדרך מעיר א׳ לעיר ב׳ בדרך סלולה וחזר מיד מעיר ב׳ לעיר א׳ בדרך העפר. מהו התחום המספרי שבו נמצא הזמן מהרגע שיצא מעיר א׳ ועד שחזר אליה?

2. את איברי הסדרה החשבונית $2\ ,5\ ,8\ ,11\ ,14\ ,17\ ,...$
חילקו לקבוצות בצורה הבאה: $(2)\ ;\ (5\ ,\ 8)\ ;\ (11\ ,\ 14\ ,\ 17)\ ;\ ...$.
בקבוצה ראשונה יש איבר אחד, בקבוצה השנייה יש שני איברים וכו׳.
בכל קבוצה יש איבר אחד יותר מאשר בקבוצה הקודמת לה.
א. מצא נוסחה לאיבר האחרון בקבוצה ה- n-ית.
ב. נתון כי האיבר האחרון בקבוצה ה- n-ית הוא 134 .
(1) מצא לכמה קבוצות חילקו את הסדרה החשבונית.
(2) עבור הערך של n , שמצאת בסעיף ב׳ (1), מצא כמה איברים יש בסך הכול ב- n הקבוצות.

3. בעיר מסוימת חלק מהתושבים, צעירים ומבוגרים, תומכים בבניית קניונים והשאר מתנגדים לבנייתם. אם בוחרים באקראי תושב מהעיר, ההסתברות שהוא מתנגד לבנייה היא 0.6 . 35% מבין התומכים בבנייה הם צעירים. ההסתברות לבחור באקראי מתנגד לבנייה שהוא גם צעיר קטנה פי 2 מההסתברות לבחור באקראי תומך בבנייה שהוא גם מבוגר.
א. בוחרים באקראי תושב מהעיר.
מהי ההסתברות שהוא מבוגר ו/או תומך בבנייה?
ב. נתון כי $\frac{8}{9}$ מהצעירים גולשים באינטרנט ו- $\frac{25}{37}$ מאלו שגולשים באינטרנט הם מבוגרים. איזה חלק מהתושבים לא גולשים באינטרנט?
ג. ידוע כי מבין תושבי העיר התומכים בבניית קניונים, 80% גולשים באינטרנט. בוחרים באקראי תושב שאינו גולש באינטרנט.
מהי ההסתברות שהוא מתנגד לבניית קניונים?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.



4. המשולש ABC הוא שווה-צלעות. הנקודות D ו- E נמצאות על הצלעות BC ו- AC כך ש- $DC = AE$.

א. הוכח: $\Delta ACD \cong \Delta BAE$.

ב. חשב את הזווית DFE.

ג. הוכח שהמרובע $CDFE$ בר-חסימה במעגל.

ד. הוכח: $\sphericalangle DFC = \sphericalangle DEC$.

5. מעגל חוסם משולש ישר-זווית שבו חסום מעגל נוסף.
מצא את זוויות המשולש אם היחס בין רדיוס המעגל החוסם לרדיוס המעגל החסום הוא $\frac{13}{4}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות.

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

6. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = \sin 2x \sin x$.

א. חקור את הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ ומצא עבורה בתחום $0 \le x \le 2\pi$:

(1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון.

(3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים.

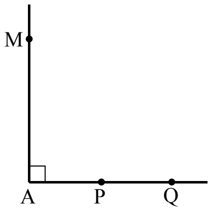
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.

ג. מצא עבור הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$:

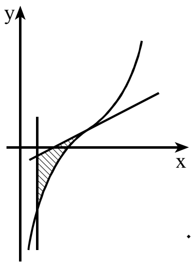
(1) את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון וקבע את סוג הקיצון.

(2) את שיעורי ה- x של נקודות הפיתול.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$,
אם ידוע כי $f(0) = f(\pi) = f(2\pi) > 0$.



7. P ו- Q הן נקודות על אחת משוקיה של זווית ישרה A. נתון: $AP = a$, $AQ = b$.
M היא נקודה על השוק השנייה של הזווית.
מה צריך להיות אורך הקטע MA, כדי שזווית הראייה שבה רואים את הקטע PQ מנקודה M תהיה הגדולה ביותר?



8. לגרף הפונקציה $f(x) = x^2 - \frac{27}{x^2}$
מעבירים משיק בנקודת הפיתול שעל הגרף ברביע הראשון.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק שאת משוואתו מצאת בסעיף א' והישר $x = 2$.

תשובות למבחן 22:

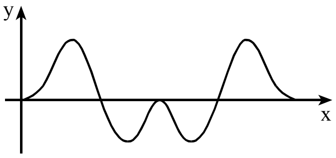
1. א. בין שעה ורבע לשעתיים. ב. בין 3 ל- 4.5 שעות.

2. א. $1.5n^2+1.5n-1$. ב. **(1)** 9 קבוצות. **(2)** 45 איברים.

3. א. 0.87. ב. $\frac{13}{50}$. ג. $\frac{9}{13}$.

4. ב. 120°.

5. $67.38^\circ, 22.62^\circ$.



6. א. **(1)** $0 \le x \le 2\pi$. **(2)** $(0;0)$ מינימום, ב.

$(0.9553;0.7698)$ מקסימום,

$(2.186;-0.7698)$ מינימום,

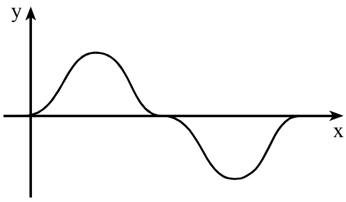
$(\pi;0)$ מקסימום, $(4.097;-0.7698)$ מינימום,

$(5.328;0.7698)$ מקסימום, $(2\pi;0)$ מינימום.

(3) עלייה: $0<x<0.9553$ **או** $2.186<x<\pi$ **או** $4.097<x<5.328$;

ירידה: $0.9553<x<2.186$ **או** $\pi<x<4.097$ **או** $5.328<x<2\pi$.

(4) $(0;0)$, $(\frac{\pi}{2};0)$, $(\pi;0)$, $(\frac{3\pi}{2};0)$, $(2\pi;0)$. ד.



ג. **(1)** $x=0$ מינימום, $x=\frac{\pi}{2}$ מקסימום,

$x=1\frac{1}{2}\pi$ מינימום, $x=2\pi$ מקסימום.

(2) $x=0.9553$, $x=2.186$, $x=\pi$,

$x=4.097$, $x=5.328$.

7. $\sqrt{ab}$.

8. א. $y=8x-18$. ב. $\frac{1}{6}$.

מבחן 23

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 3-1.

1. ב- $8:00$ יצא רוכב אופניים מעיר א׳ לעיר ב׳ וב- $9:00$ יצא רוכב אופניים מעיר ב׳ לעיר א׳. הם נפגשו בדרך והמשיכו ליעדיהם.
הרוכב הראשון הגיע לעיר ב׳ 4 שעות לאחר הפגישה, ואילו הרוכב השני הגיע לעיר א׳ 3 שעות לאחר הפגישה.
באיזו שעה הגיע כל רוכב ליעדו?

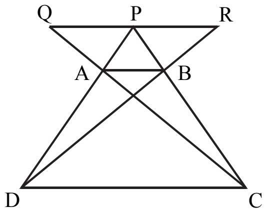
2. נתונה הסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה : $a_1 = c$, $a_{n+1} = a_n + 2n - 20$.
א. הוכח שסדרת ההפרשים שבין כל שני איברים סמוכים בסדרה היא סדרה חשבונית.
ב. הבע את a_n בעזרת n ו- c בלבד.
ג. מצא עבור אילו ערכים של c כל איברי הסדרה הם חיוביים.

3. בחנות ספרים ערכו הגרלת ספרים. כל משתתף בהגרלה מקבל כרטיס שיש בו 16 משבצות, שצבען נחשף על ידי גירוד.
בכל כרטיס יש אותו מספר משבצות אדומות, ושאר המשבצות צבען אחר. כל משתתף מגרד משבצת אחת ולאחריה עוד אחת.
אם בכל אחד משני הגירודים נחשפת משבצת אדומה, המשתתף זוכה בספר. ההסתברות שהמשתתף יזכה בספר היא $\frac{1}{20}$.
א. כמה מבין 16 המשבצות בכרטיס הן אדומות?
ב. בהגרלה השתתפו 11 אנשים.
(1) מהי ההסתברות שלכל היותר 2 משתתפים יזכו בספר?
(2) מהי ההסתברות שבדיוק 2 משתתפים זכו בספר, אם ידוע כי לכל היותר 2 משתתפים זכו בספר?

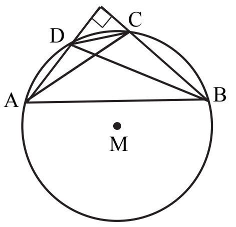
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על אחת מבין השאלות 5-4.

4. המרובע $ABCD$ הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.
המשכי השוקיים של הטרפז נחתכים בנקודה P . נתון : $QR \parallel AB$, $AB = b$, $DC = a$.
א. הוכח : $PQ = PR = \frac{ab}{a-b}$.
ב. נתון : $S_{ABCD} = k$.
הבע באמצעות a , b ו- k את S_{ABRQ} .



5. המרובע ABCD חסום במעגל.
הצלעות הנגדיות AD ו- BC של המרובע
נמצאות על ישרים המאונכים זה לזה.
נתון: $BC = a$, $\sphericalangle ABD = \alpha$, $\sphericalangle DBC = \beta$.
א. הוכח: $AC = \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+2\beta)}$, $BD = \frac{a\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+2\beta)}$.
ב. נתון: $\sphericalangle DAB = 45^\circ$. הוכח: $AC = BD$.

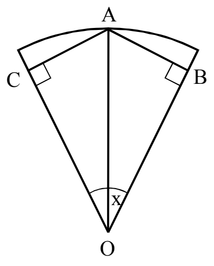


פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות.

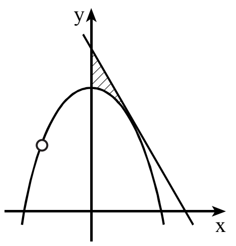
ענה על שתיים מבין השאלות 8-6.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x^2-ax+b}$. הישר $x = 3$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.
א. מצא את a ואת b .
ב. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.
(4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. מצא את נקודות החיתוך בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין הישר $y = x-8$.

7. בציור מתוארת גיזרת מעגל שמרכזו O .
הזווית המרכזית המתאימה לגיזרה
היא $\sphericalangle COB = 60^\circ$. על הקשת של הגיזרה
בוחרים נקודה A כלשהי ומורידים
אנכים (AC ו- AB) לשני הרדיוסים.
מצא מה צריכה להיות הזווית AOB ,
כדי ששטח המרובע ABOC יהיה מקסימלי.



8. נתונה הפונקציה $y = \frac{ax^3+2ax^2+8x+b}{x+2}$ $(a < 0)$.
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה
שבה $x = 2$ הוא -2 . כמו כן, ידוע כי הפולינום
$y = ax^3+2ax^2+8x+b$ מתחלק ב- $x+2$ ללא שארית.
א. חשב את a ואת b
ב. חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה,
המשיק, ציר ה- y (השטח המקווקו).



תשובות למבחן 23:

1. הראשון ב- $16:00$, השני ב- $15:00$.

2. ב. $a_n = n^2 - 21n + c + 20$. ג. $c > 90$.

3. א. 4 משבצות. ב. (1) 0.98476. (2) 0.088.

4. ב. $\frac{kb^2(3a-b)}{(a+b)(a-b)^2}$.

6. א. $a = 6$, $b = 9$.

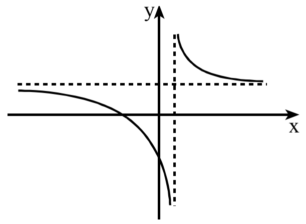
ב. (1) $x \neq 3$. (2) אין.

(3) עלייה: אין; ירידה: $x > 3$ או $x < 3$.

(4) $(0;-1\frac{1}{3})$, $(-4;0)$.

(5) $x = 3$, $y = 1$.

ג.



ד. $(10;2)$, $(2;-6)$.

7. 30°.

8. א. $a = -\frac{1}{2}$, $b = 16$. ב. $1\frac{1}{3}$.

מבחן 24

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

1. שלושה פועלים יכולים לסיים יחד עבודה מסוימת בייצור כיסאות בתוך 6 שעות ו- 15 דקות. הפועל הראשון יכול לבצע את העבודה לבדו בזמן הקצר ב- 80 שעות מהזמן שבו הפועל השלישי יכול לבצע אותה לבדו.
הפועל השני יכול לבצע את העבודה לבדו ב- 50% מהזמן שבו יכול הפועל הראשון לסיים את העבודה לבדו.
א. בכמה שעות יכול כל פועל לסיים את העבודה לבדו?
ב. נתון כי הפועל הראשון מייצר 15 כיסאות בשעה.
תוך כמה שעות מייצרים שלושת הפועלים יחד 144 כיסאות?

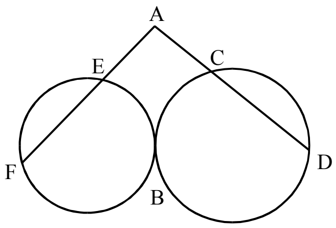
2. נתונה סדרה הנדסית $a_1 , a_2 , a_3 ,...$ $(a_1 \neq 0)$, שהמנה שלה היא q,
ונתונה סדרה הנדסית $b_1 , b_2 , b_3 ,...$ $(b_1 \neq 0)$, שהמנה שלה היא 2 $(a_1 \neq b_1)$. הסדרה $c_1 , c_2 , c_3 ,...$ מקיימת: $c_n = a_n - b_n$ $(n \geq 1)$.
נתון כי c_n היא סדרה הנדסית.
א. מצא את q.
ב. נתון: $a_4 = 40$, $b_5 = 24$, $c_1 + c_2 + c_3 + \ ... \ + c_n = 1788.5$ מצא את n.

3. בכד יש n כדורים. 3 כדורים הם אדומים, כדור אחד הוא שחור, וכל שאר הכדורים הם צהובים. אם מוציאים באקראי מהכד כדור אדום, זוכים ב- 100 שקלים. אם מוציאים באקראי מהכד כדור צהוב זוכים ב- 50 שקלים. אם מוציאים באקראי מהכד כדור שחור, לא זוכים כלל.
א. כאשר מוציאים באקראי כדור אחד מהכד, מחזירים אותו לכד ושוב מוציאים באקראי כדור אחד, ההסתברות לזכות בדיוק ב- 50 שקלים היא 0.12. חשב את n.
ב. מחזירים את כל הכדורים לכד ומוסיפים לכד k כדורים אדומים.
כעת חוזרים על הפעולה הבאה 4 פעמים: מוציאים באקראי כדור מהכד. אם הוא שחור או צהוב, מחזירים אותו לכד ואם הוא אדום משאירים אותו בחוץ. ידוע כי ההסתברות שלפחות אחד הכדורים שנבחר הוא אדום היא $\frac{15}{16}$. מצא את k.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

4. שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה B.
נקודה A נמצאת מחוץ לשני המעגלים,
כך ש- AB הוא משיק משותף לשני המעגלים.
ACD ו- AEF הם חותכים למעגלים.



א. הוכח: $AE \cdot AF = AC \cdot AD$.
ב. הוכח: המרובע $DCEF$ בר חסימה במעגל.
ג. הוכח: $\frac{S_{DCEF}}{S_{\Delta AEC}} = \frac{AD^2 - AE^2}{AE^2}$

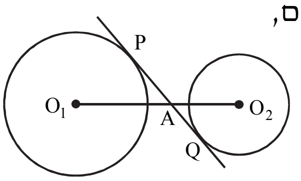
5. אחת הזוויות במשולש ABC היא בת 60°. חוצה זווית זו מחלק את המשולש לשני משולשים חלקיים. אורכי הרדיוסים של המעגלים החוסמים את המשולשים החלקיים הם 3 ס״מ ו- 5 ס״מ.
מצא את גודלן של שתי הזוויות האחרות במשולש.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות.

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + \frac{2a^3}{x}$.
א. עבור $a > 0$, מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):
(1) את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
(2) את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
(3) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
(4) את תחומי הקעירות של הפונקציה כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור $a > 0$.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור $a < 0$.
הסבר את שיקוליך בשרטוט הגרף.

7. נתונים שני מעגלים O_1 ו- O_2, שאורכי רדיוסיהם, בהתאמה, הם 6 ס״מ ו- 2 ס״מ. אורך קטע המרכזים O_1O_2 הוא k. הנקודה A נעה על קטע המרכזים. מנקודה A מעבירים משיק AP למעגל O_1 ומשיק AQ למעגל O_2.



הוכח שסכום האורכים של שני המשיקים $(AP + AQ)$ הוא מקסימלי, כאשר A, P ו- Q נמצאות על ישר אחד.

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{\sin x}\cdot\cos^2 x$, בתחום $0\le x\le\pi$.

א. מצא בתחום הנתון את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. מנקודות המקסימום של הפונקציה בתחום הנתון מורידים אנכים
לציר ה- x . השטח המוגבל בתחום הנתון בין גרף הפונקציה,
שני האנכים וציר ה- x , מסתובב סביב ציר ה- x .
חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

תשובות למבחן 24:

1. א. 20 שעות, 10 שעות, 100 שעות. ב. 3 שעות.

2. א. 2 . ב. 9 .

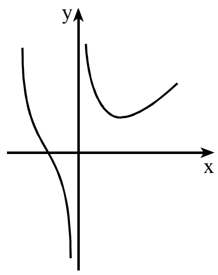
3. א. 10 . ב. 4 .

5. 83.41° , 36.59° .

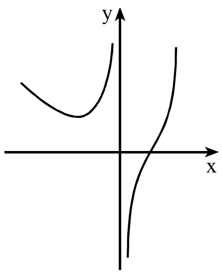
6. א. **(1)** $x=0$. **(2)** $(-1.26a;0)$. **(3)** $(a;3a^2)$ מינימום.

(4) $\cup$: $x>0$ או $x<-1.26a$. $\cap$: $-1.26a<x<0$.

ב. $a>0$:



ג. $a<0$:



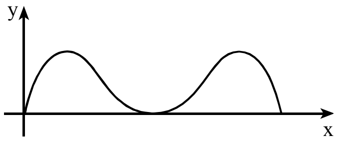
8. א. $(0;0)$ מינימום,

$(0.4636;0.535)$ מקסימום,

$\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ מינימום,

$(2.678;0.535)$ מקסימום, $(\pi;0)$ מינימום.

ב.



ג. 0.7193 .

מבחן 25

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

1. שני פועלים התבקשו להרכיב אותו מספר של כיסאות. הפועל הראשון סיים את עבודתו בתוך 9 שעות. הפועל השני החל את עבודתו זמן מה לאחר הפועל הראשון וסיים אותה שעה לפניו. ידוע כי 4 שעות לאחר שהפועל השני החל בעבודתו, מספר הכיסאות הכולל שהרכיב הפועל הראשון היה שווה למספר הכיסאות הכולל שהרכיב הפועל השני.
מצא כמה שעות לאחר שהפועל הראשון החל בעבודתו החל הפועל השני בעבודתו.

2. א. בסדרה החשבונית ..., 45 , 40 , 35 , 30 , 25 , 20 ישנם 200 איברים.
כמה איברים בסדרה מתחלקים ב- 3 ללא שארית?

ב. סדרה מוגדרת על-ידי הנוסחה: $a_n = -2n^2 + 13n - 1$.
מצא את מקומו ואת ערכו של האיבר הגדול ביותר בסדרה.

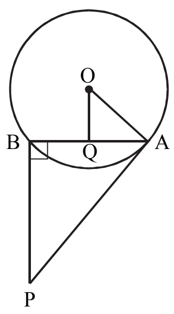
הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

3. בשכבה י' בבית ספר מסוים יש שלוש כיתות: י'1, י'2, י'3.
בכל כיתה יש 20 בנים ו- 12 בנות.
א. מוציאים באקראי 3 תלמידים מכיתה י'1 בזה אחר זה.
תלמיד שהוצא מהכיתה אינו חוזר לכיתה.
מהי ההסתברות להוציא 3 בנים?
ב. אחרי ששלושת התלמידים שהוצאו חזרו לכיתה שלהם,
מוציאים באקראי תלמיד אחד מכיתה י'1, תלמיד אחד מכיתה י'2 ותלמיד אחד מכיתה י'3.
(1) מהי ההסתברות להוציא לפחות 2 בנים?
(2) ידוע שהוציאו לפחות 2 בנים.
מהי ההסתברות שלא כל השלושה שהוצאו היו בנים?

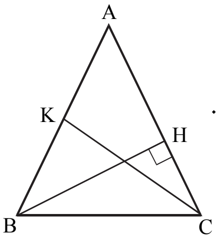
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על אחת מבין השאלות 4-5.

4. PA משיק בנקודה A למעגל שמרכזו O .
נקודה Q היא אמצע המיתר AB .
נתון: $PB \perp AB$. R רדיוס המעגל.
א. הוכח: $OQ \cdot BP = 2 \cdot AQ^2$.
ב. נסמן ב- R את רדיוס המעגל.
הוכח: $2R^2 = OQ(2OQ + BP)$.



.5 במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB=AC)$, שווה אורך הבסיס ל- a, והזווית שלידו ל- β $(\beta > 45^\circ)$.
BH הוא גובה לשוק AC, ו- CK הוא תיכון לשוק AB.
א. הבע באמצעות a ו- β את שטח המשולש AKH.
ב. נתון: $S_{AKH}=\frac{1}{4}S_{ABC}$. הוכח: $KH \parallel BC$.



פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות.

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

.6 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=\frac{4x-x^2}{\sqrt{10-2x}}$.
א. מצא עבור פונקציית הנגזרת $f'(x)$:
(1) תחום הגדרה.
(2) נקודות חיתוך עם הצירים.
(3) נקודות קיצון.
(4) תחומי עלייה וירידה.
(5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ב. שרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.
ג. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $x \geq 5$.
(1) מצא את שיעור ה- x של נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבע את סוג הקיצון.
(2) מצא את שיעור ה- x של נקודת הפיתול של $f(x)$.
(3) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם נתון $f(0)=f(5)=0$.

.7 נתון מלבן $KLMN$. על הצלע MN בוחרים נקודה כלשהי O.
מעבירים דרכה ישר LO שהמשכו חותך את המשך הצלע KN בנקודה P.
הוכח: סכום השטחים של המשולש ΔMOL ו- ΔPON הוא מינימלי,
כאשר $\frac{ON}{OM}=\sqrt{2}-1$.

.8 נתונה הפונקציה $f(x)=x^2+x$.
א. מצא: (1) נקודות חיתוך עם הצירים.
(2) נקודות קיצון.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $|f(x)|$.
ד. מהן נקודות החיתוך בין גרף הפונקציה $|f(x)|$ והישר $y=2$?
ה. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $|f(x)|$ ועל ידי הישר $y=2$.

תשובות למבחן 25:

1. שעתיים.

2. א. 66 . ב. $a_3 = 20$.

3. א. $\frac{57}{248}$. ב. (1) $\frac{175}{256}$. (2) $\frac{9}{14}$.

5. א. $\frac{-a^2\sin^2\beta\cos2\beta}{4\sin2\beta} = \frac{-a^2\cos2\beta\sin2\beta}{16\cos^2\beta}$.

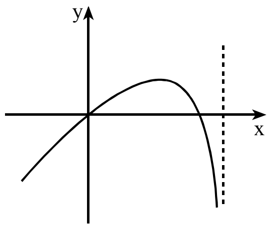
6. א. (1) $x < 5$. (2) $(0;0)$, $(4;0)$.

(3) $(2.367;1.684)$ מקסימום.

(4) עלייה: $x < 2.367$; ירידה: $2.367 < x < 5$.

(5) $x = 5$.

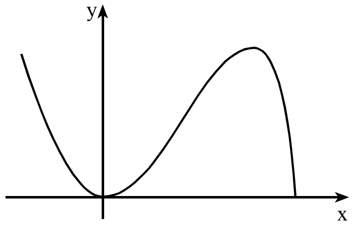
ב.



ג. (1) $x = 0$ מינימום, $x = 4$ מקסימום, $x = 5$ מינימום.

(2) 2.367 .

(3)



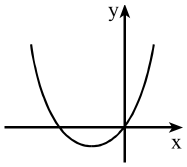
8. א. (1) $(0;0)$, $(-1;0)$.

(2) $(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4})$ מינימום.

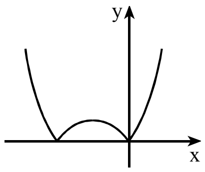
ד. $(1;2)$, $(-2;2)$.

ה. $4\frac{1}{6}$.

ב.



ג.



מבחן 26

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

1. בשעה $7:00$ בבוקר יצא הולך רגל ממחנה צבאי בסביבת עכו לכיוון חיפה. באותה שעה יצא מחיפה הולך רגל למחנה הנ״ל. השניים הלכו לאורך אותו כביש, ומהירותו של כל אחד מהם לא השתנתה בזמן ההליכה. בשעת הפגישה התברר כי הולך הרגל שיצא מחיפה עבר 2 ק״מ יותר מהמרחק שעבר זה שיצא מהמחנה. 40 דקות לאחר הפגישה הגיע הולך הרגל מחיפה למחנה, ואילו הולך הרגל שיצא מהמחנה הגיע לחיפה שעה וחצי לאחר הפגישה.

א. מהו המרחק מהמחנה הנ״ל לחיפה?

ב. מהי מהירותו של כל אחד מהולכי הרגל?

2. בסדרה הנדסית סכום $(n-1)$ האיברים הראשונים שווה ל- 372.
אם נחסר מסכום n האיברים הראשונים של הסדרה את האיבר הראשון, נקבל 186, ואם נחסר מסכום n האיברים הראשונים של הסדרה את שני האיברים הראשונים, נקבל 90.

א. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

ב. חשב את מכפלת האיברים $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ \dots \ a_n$.

3. במפעל גדול מציעים לעובדים מלגה ללימודים מתקדמים במדעי המחשב. כדי להתקבל ללימודים על העובדים להצליח בבחינות כניסה, הכוללות בחינה באנגלית ובחינה במתמטיקה.
כל עובדי המפעל ניגשו לבחינה, והתוצאות הראו כי $\frac{8}{15}$ מהעובדים לא עברו אף אחת מהבחינות ו- 1400 עובדים עברו לפחות אחת מהבחינות.
כמו כן, 80% מהעובדים שלא עברו את הבחינה באנגלית, לא עברו את הבחינה במתמטיקה, ו- $\frac{3}{4}$ מבין העובדים שעברו את הבחינה באנגלית, לא עברו את הבחינה במתמטיקה.

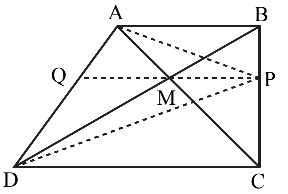
א. בוחרים באקראי אחד מעובדי המפעל.
מהי ההסתברות שהוא עבר רק אחת מן הבחינות?

ב. בוחרים באקראי בזה אחר זה (בלי החזרה) 2 עובדים מבין אלה שהצליחו בבחינה במתמטיקה ובאותו אופן בוחרים שני עובדים שלא הצליחו בבחינה במתמטיקה.
מהי ההסתברות שארבעת העובדים הנ״ל הצליחו בבחינה באנגלית?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על אחת מבין השאלות 5-4.

4. המרובע ABCD הוא טרפז ישר-זווית $(\sphericalangle BCD = 90^\circ \ , \ AB \parallel CD)$.
PQ מקביל לבסיסים ועובר דרך
נקודת החיתוך של האלכסונים.



א. הוכח: $\Delta ABP \sim \Delta DCP$.

ב. הוכח: $\frac{AQ}{DQ} = \frac{AP}{DP}$.

ג. הוכח: $\frac{AQ}{DQ} = \frac{AB}{CD}$.

5. במלבן ABCD האלכסון AC יוצר זווית α עם הצלע CD.
P היא נקודה על האלכסון AC, כך ש- $\sphericalangle PDC = \beta$.

א. הוכח שהיחס בין שטח המשולש DPC לשטח המלבן הוא $\frac{\sin\beta\cos\alpha}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

ב. בדוק מה הקשר בין α ל- β אם היחס הנ"ל שווה ל- $\frac{1}{4}$,
והסבר את המשמעות הגיאומטרית.

ג. בדוק מהי β אם היחס הנ"ל שווה ל- $\frac{1}{2}$, והסבר את המשמעות
ההנדסית.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות.

ענה על שתיים מבין השאלות 8-6.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x(x-a)(x-b)}$, $a > b > 0$.

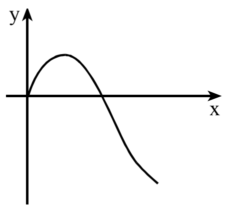
א. מצא (במידת הצורך הבע באמצעות a ו- b):

(1) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(2) את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. נתון: $b = 2$. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x מסתובב
סביב ציר ה- x. נפח גוף הסיבוב שנוצר הוא 4π.
מצא את הערך של a.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^3 - 12\cos x$ בתחום $0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$.
בשרטוט משמאל מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$
בתחום $0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$.



הגרף של $f'(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה אחת
ששיעור ה- x שלה, בקירוב, היא 1.935.

א. מצא את שיעורי נקודת הפיתול של פונקציית
הנגזרת $f'(x)$ בתחום הנתון.

ב. דרך נקודת הפיתול של $f'(x)$ מורידים אנך לציר ה- x.
חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הנגזרת $f'(x)$, ציר ה- x
והאנך הנ"ל.

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^3}{x-2}$.

א. חקור את הפונקציה ומצא:

(1) תחום הגדרה.

(2) נקודות קיצון.

(3) תחומי עלייה וירידה.

(4) נקודות חיתוך עם הצירים.

(5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. כמה פתרונות יש למשוואה $x^3-5x+10=0$?
היעזר בסעיפים קודמים.

ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x-2)$.
שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות למבחן 26:

1. א. 10 ק"מ. **ב.** 4 קמ"ש, 6 קמ"ש.

2. **א.** $a_1 = 192$ **,** $q = 0.5$. **ב.** 1528823808 .

3. **א.** $\frac{23}{60}$. **ב.** 0.015 .

6. א. **(1)** $(0;0)$ **,** $(b;0)$ **,** $(a;0)$. **(2)** $x \geq a$ **או** $0 \leq x \leq b$. **ב.** 4 .

7. **א.** $\left(\frac{7\pi}{6};-46.3\right)$. **ב.** 35.87 .

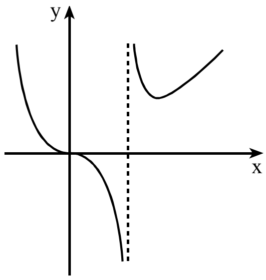
8. **א.** **(1)** $x \neq 2$.

(2) $(3;27)$ מינימום.

(3) עלייה: $x > 3$;

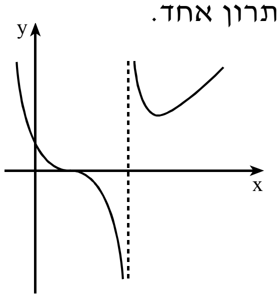
ירידה: $2 < x < 3$ **או** $x < 2$.

(4) $(0;0)$. **(5)** $x = 2$.



ג. פתרון אחד.

ד.



מבחן 27

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

1. שני פועלים מתכננים לחפור תעלה. אם פועל אחד יסיים $\frac{1}{5}$ מהחפירה והפועל השני יבצע את שאר החפירה, תסתיים העבודה בתוך 28 ימים.
ידוע כי הפועל הראשון יכול לבצע את החפירה לבדו בתוך m ימים.
א. הבע באמצעות m את מספר הימים שבהם הפועל השני יכול לבצע את החפירה לבדו.
ב. ידוע כי אם שני הפועלים מתחילים יחד לחפור את התעלה, אז כעבור 12 ימים הם עדיין לא מסיימים אותה.
מצא את התחום המספרי שבו נמצא m .

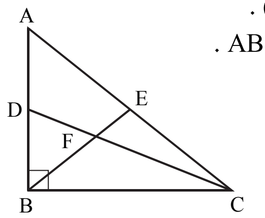
2. סדרה מוגדרת על-ידי כלל הנסיגה: $a_1 = 6$, $a_{n+1} = 2 + 7n - a_n$.
א. הוכח שלכל n טבעי מתקיים: $a_{n+2} = a_n + 7$.
ב. מצא נוסחה לסכום $2n + 1$ האיברים הראשונים בסדרה.
ג. נתון שבסדרה יש מספר אי-זוגי של איברים וסכום כל איברי הסדרה הוא 526 . מצא כמה איברים בסדרה.

3. בעיר מסוימת חלק מהנבחנים במבחן תיאוריה של נהיגה למדו בקורס הכנה למבחן זה.
כל מי שנכשל במבחן ניגש למבחנים חוזרים, עד שהוא מצליח.
ידוע כי אם נבחן למד בקורס הכנה, הסיכוי שיצליח במבחן הוא 75% .
סיכוי זה נשאר קבוע גם במבחנים החוזרים (אפילו אם עוברים שוב קורס הכנה).
א. מצא מהו הסיכוי של מי שלמד בקורס הכנה להצליח במבחן רק בפעם השלישית.

20% מתלמידי התיכון בעיר לומדים בקורס הכנה (השאר אינם לומדים).
ידוע כי כל עוד תלמיד לא למד בקורס הכנה, הסיכוי שיצליח במבחן התיאוריה הוא $\frac{1}{2}$.
ב. תלמיד תיכון בעיר הצליח במבחן התיאוריה.
מהי ההסתברות שהתלמיד למד בקורס הכנה?
ג. בבית ספר מסוים בעיר כל התלמידים <u>לא</u> למדו בקורס הכנה.
ההנהלה החליטה שכל תלמיד שנכשל במבחן יחויב ללמוד בקורס, לפני שייגש למבחן חוזר.
מצא מהו הסיכוי של תלמיד בבית ספר זה להצליח במבחן רק בפעם השלישית.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.



4. משולש ABC הוא משולש ישר-זווית $(\measuredangle ABC = 90^\circ)$.
BE הוא תיכון לצלע AC, ו- CD הוא תיכון לצלע AB.
התיכונים BE ו- CD נחתכים בנקודה F.
א. חשב את היחס בין היקף המשולש BFC להיקף המשולש EFD.
ב. נתון גם כי הנקודה M היא אמצע הקטע FC, והנקודה N היא אמצע הקטע FB.
הוכח כי שטח המרובע $DEMN$ שווה לשטח המשולש BFC.
ג. הוכח: $S_{DEMN} = \frac{1}{6} AB \cdot BC$.

5. ABC הוא משולש שאורכי צלעותיו הם $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$ $(c > b)$.
P היא נקודה על המשך הצלע AC (בכיוון של A), כך ש- $PB = PC$.
הבע את אורך הקטע PC באמצעות a, b ו- c.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות.

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$.
א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.
(4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) נקודות פיתול.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

7. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = 2x(x^2 - 1)^3$, $g(x) = 2x$.
א. הוכח שהפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ הן פונקציות אי-זוגיות.
ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות.

8. נתון משולש ישר-זווית ABC $(\measuredangle C = 90^\circ)$. קדקודיו הם בנקודות:
$A(-4;0)$, $C(x;0)$ ו- B הנמצאת על הפרבולה $2y = 4x - x^2$.
א. בטא את שטח המשולש $S(x)$, כפונקציה של x עבור $0 \le x \le 4$.
ב. חשב את הערך המקסימלי של השטח הנ"ל.
ג. מצא פונקציה $f(x)$, כך ש- $f'(x) = S(x)$ ו- $f(1) = 4$.

תשובות למבחן 27:

1. א. $\frac{140-m}{4}$. ב. $20<m<84$.

2. ב. $7n^2+9n+6$. ג. 17 איברים.

3. א. $\frac{3}{64}$. ב. $\frac{3}{11}$. ג. $\frac{3}{32}$.

4. א. 2 .

5. $\frac{a^2b}{a^2+b^2-c^2}$.

6. א. (1) $0\le x\le 2\pi$.

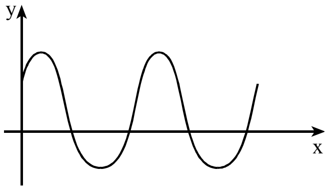
(2) $(0;2)$ מינימום, $(\frac{\pi}{6};3)$ מקסימום, $(\frac{2\pi}{3};-1)$ מינימום,

$(\frac{7\pi}{6};3)$ מקסימום, $(\frac{5\pi}{3};-1)$ מינימום, $(2\pi;2)$ מקסימום.

(3) עלייה: $0<x<\frac{\pi}{6}$ או $\frac{2\pi}{3}<x<\frac{7\pi}{6}$

או $\frac{5\pi}{3}<x<2\pi$;

ירידה: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{2\pi}{3}$ או $\frac{7\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{3}$.



(4) $(0;2)$, $(\frac{\pi}{2};0)$, $(\frac{5\pi}{6};0)$, $(\frac{3\pi}{2};0)$, $(\frac{11\pi}{6};0)$.

(5) $\left(\frac{5\pi}{12};1\right)$, $\left(\frac{11\pi}{12};1\right)$, $\left(\frac{17\pi}{12};1\right)$, $\left(\frac{23\pi}{12};1\right)$.

7. ב. 4 .

8. א. $S(x)=-\frac{1}{4}x^3+4x$. ב. $\frac{32\sqrt{3}}{9}$. ג. $f(x)=-\frac{1}{16}x^4+2x^2+2\frac{1}{16}$.

מבחן 28

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

1. שני פועלים מסיימים עבודה מסוימת בתוך 24 ימים כאשר הם עובדים יחד. אם הפועל הראשון מבצע לבדו $\frac{1}{3}$ מהעבודה ואז הפועל השני מבצע לבדו את העבודה הנותרת, העבודה מסתיימת בתוך m ימים.

א. הבע באמצעות m את הזמן שבו מסיים הפועל הראשון את העבודה לבדו.

ב. מצא לאיזה ערך של m הפועל הראשון מסיים את העבודה לבדו ב- 36 ימים יותר מהזמן שבו הפועל השני מסיים את העבודה לבדו.

2. א. נתונה הסדרה החשבונית $\dots, -26, -28, -30$ שבה 137 איברים. מהו סכום האיברים החיוביים בסדרה, המתחלקים ב- 6 ?

ב. נתונה סדרה הנדסית : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

האיבר השלישי בסדרה גדול ב- 2 מהאיבר השני, והאיבר הרביעי גדול פי 2 מהאיבר השלישי.

נתונה סדרה הנדסית נוספת : $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$.

משתי הסדרות בונים סדרה חדשה : $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$.

מנת הסדרה החדשה היא 3, וסכום 10 האיברים הראשונים בסדרה החדשה הוא 7381.

מצא את הערך של n, שעבורו $b_n = 4 \cdot \frac{8}{27}$.

<u>הערה:</u> אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

3. במשחק מזל ניתן לזכות ב- 100 שקלים, ב- 200 שקלים או לא לזכות כלל. ההסתברות לזכות ב- 100 שקלים היא 0.6 וההסתברות לזכות ב- 200 שקלים היא P.

א. אדם משחק פעמיים במשחק הנ״ל. ידוע כי בהינתן שהוא זכה סך הכול לפחות ב- 300 שקלים, אז ההסתברות שהוא זכה בדיוק ב- 300 שקלים היא $\frac{12}{13}$. מצא את P.

ב. אדם משחק n פעמים במשחק הנ״ל. הבע באמצעות n את ההסתברות שלפחות פעמיים הוא יזכה בלפחות 100 שקלים.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

4. המרובע ABCD הוא מקבילית.

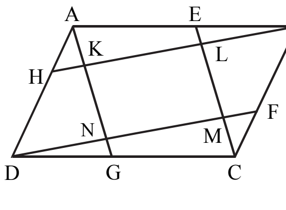
E, F, G, ו- H הן נקודות על צלעות המקבילית. נתון : $AH = CF$, $BE = DG$.

א. הוכח : המרובע KLMN הוא מקבילית.

ב. נתון : $BF = 2CF$, $DG : CG = 3 : 4$.

(1) חשב את יחס השטחים $S_{KLMN} : S_{AGCE}$.

(2) חשב את יחס השטחים $S_{KLMN} : S_{ABCD}$.



.5 במשולש ABC נתון: $BC = a$, $AC = b$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\alpha = \beta + 60^\circ$.

א. הבע את $\tan\beta$ באמצעות a ו- b .

ב. הוכח כי אם $\beta > 45^\circ$, אז $1 < \frac{a}{b} < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

ג. הבע באמצעות b את אורך חוצה-זווית α כאשר $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות.

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

.6 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax-6}{\sqrt{4x^2 - bx - 1}}$.

שתיים מהאסימפטוטות של הפונקציה נפגשות בנקודה $(1;8)$.

א. מצא את a ואת b . כמה פתרונות לבעיה?

הצב את הערך של b ואת הערך החיובי של a וענה על הסעיפים הבאים:

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ג. האם לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם הצירים?

ד. מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $f(x)$.

ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ז. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = -1$ ו- $x = -2$.

.7 א. הוכח את הזהות $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} = 4\cos 2\alpha$.

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x}$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

מצא בתחום הנתון: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון.

(3) תחומי עלייה וירידה. (4) אסימפטוטות אנכיות.

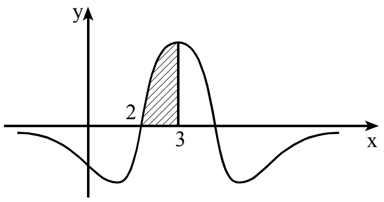
(5) נקודות פיתול. (6) תחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4x-12}{x^2-6x+10}$.

א. מצא: (1) תחום הגדרה.
(2) נקודות קיצון.
(3) תחומי עלייה וירידה.
(4) נקודות חיתוך עם הצירים.
(5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ב. בשרטוט שמשמאל מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$. על ציר ה- x מסומנים נתונים. היעזר בנתונים ומצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ ותחומי הקעירות כלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$.



ג. דרך נקודת המקסימום של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מעבירים אנך לציר ה- x . חשב את השטח המוגבל בין הגרף של $f'(x)$, האנך וציר ה- x (השטח המקווקו).

תשובות למבחן 28:

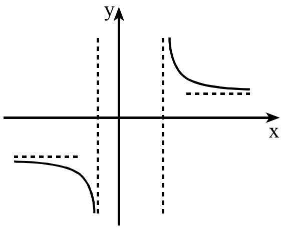
1. א. $\frac{3m-24\pm\sqrt{9m^2-432m+576}}{2}$. ב. $m=48$.

2. א. 4920. ב. 4.

3. א. 0.1. ב. $1-0.3^n-0.7n(0.3)^{n-1}$.

4. ב. (1) $\frac{7}{12}$. (2) $\frac{1}{3}$.

5. א. $\frac{\sqrt{3}b}{2a-b}$. ג. $0.4723b$.



6. א. שני פתרונות: $a=16$, $b=3$ או $a=-16$, $b=3$.

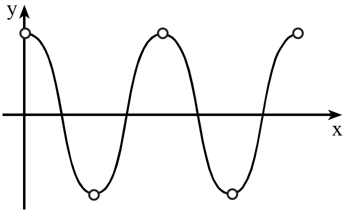
ב. $x>1$ או $x<-0.25$. ג. לא.

ד. ירידה: $x>1$ או $x<-0.25$; עלייה: אף x.

ה. $y=8$, $y=-8$, $x=1$, $x=-0.25$.

ז. 8.532.

7. ב. (1) $0<x<2\pi$, $x\neq\frac{\pi}{2}$, $x\neq\pi$, $x=\frac{3\pi}{2}$. (2) אין.



(3) עלייה: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ או $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$;

ירידה: $0<x<\frac{\pi}{2}$ או $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$.

(4) אין.

(5) $\left(\frac{\pi}{4};0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4};0\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4};0\right)$, $\left(\frac{7\pi}{4};0\right)$.

(6) $\cup$: $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$ או $\frac{5\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{4}$;

$\cap$: $0<x<\frac{\pi}{4}$ או $\frac{3\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$ או $\frac{7\pi}{4}<x<2\pi$.

8. א. (1) כל x. (2) $(2;-2)$ מינימום, $(4;2)$ מקסימום.

(3) עלייה: $2<x<4$; ירידה: $x>4$ או $x<2$.

(4) $(0;-1.2)$, $(3;0)$. (5) $y=0$.

ב. $\cup$: $x>4.732$ או $1.268<x<3$; $\cap$: $3<x<4.732$ או $x<1.268$. ג. 2.

מבחן 29

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 3-1.

1. אחד הנוסעים באוטובוס הבחין ברגע מסוים במכר שלו, שהלך בכיוון נגדי לתנועת האוטובוס. 8 שניות לאחר מכן עצר האוטובוס. הנוסע ירד והלך בעקבות מכרו כדי להשיגו. מהירותו הייתה גבוהה פי שניים ממהירות מכרו ונמוכה פי חמישה ממהירות האוטובוס.
כעבור כמה שניות (מאז שהבחין הנוסע במכרו) הדביק הנוסע את מכרו?

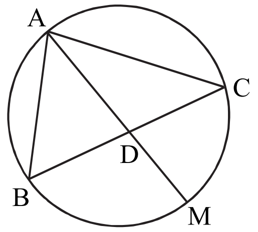
2. האיבר ה- n-י של סדרה נתון ע"י $a_n = k \cdot t^{n-1}$ (k , t – קבועים; $t \neq 1$).
נסמן: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; $T_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$.
א. מצא את S_n . הבע את תשובתך באמצעות k , t ו- n .
ב. הוכח: $(1-t)\,T_n + t \cdot S_n = k \cdot n$.
ג. בדוק אם השוויון בסעיף ב' יישאר בתוקפו כאשר $t=1$.

3. יוסי נוסע מביתו לעבודה. מסלול נסיעתו עובר בשני כבישים:
תחילה בכביש A ואחריו בכביש B .
ההסתברות שיהיה פקק תנועה בכביש A היא 0.6 .
ההסתברות שיהיה פקק תנועה בכביש B היא $\frac{4}{5}$.
כאשר יש פקק תנועה בכביש B , ההסתברות שגם בכביש A יש פקק תנועה היא $\frac{3}{4}$.
א. קבע עבור כל אחד מההיגדים (i) – (iii) שלפניך אם הוא נכון או לא נכון. נמק כל קביעה.
(i) אם כביש A פקוק, אז גם כביש B פקוק.
(ii) אם כביש B אינו פקוק, ההסתברות שכביש A אינו פקוק היא $\frac{1}{2}$.
(iii) ההסתברות שכביש B אינו פקוק אם כביש A אינו פקוק, שווה להסתברות שכביש A אינו פקוק אם כביש B אינו פקוק.
ב. יוסי נוסע לעבודה בימים א, ב ,ג, ד, ה. מהי ההסתברות שיוסי ייקלע לפקק תנועה בימים א, ב, ג, ולא ייקלע לפקק תנועה בימים ד ו-ה?

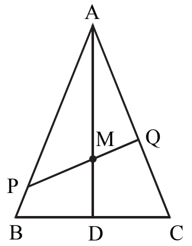
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.

4. משולש ABC חסום במעגל.
המיתר AM חותך את הצלע BC בנקודה D .
נתון: $AB \cdot BM = AC \cdot CM$.
הוכח: $BD = DC$.



5. המשולש ABC הוא שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
AD הוא תיכון לבסיס. דרך נקודה M - נקודת המפגש של התיכונים במשולש, העבירו ישר החותך את השוקיים AB ו- AC בנקודות P ו- Q בהתאמה. נתון: $BC = 2a$, $\sphericalangle BAC = 2\alpha$, $\sphericalangle AMQ = \beta$.



א. הוכח: $PQ = \frac{2a\cot\alpha\sin\beta\sin 2\alpha}{3\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}$.

ב. נתון: $AP = AQ$. הוכח: $PQ = \frac{4}{3}a$.

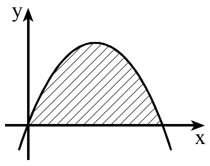
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות.

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

6. האסימפטוטות האופקית והאנכית של הפונקציה $f(x) = \frac{8(x-1)}{(x-a)^2} + b$ נחתכות בנקודה $(7;-8)$.
א. מצא את a ואת b .
ב. חקור את הפונקציה ומצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון.
(3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים.
(5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = \frac{8(x-1)}{(x-7)^2} + k$.
לאילו ערכי k גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא כולו מעל ציר ה- x ?

7. גרף הפונקציה $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 7x - 4$ נפגש עם ציר ה- x בנקודה $(1;0)$.
א. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של הגרף עם ציר ה- x .
ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה ועל ידי ציר ה- x .

8. לפניך גרף הפונקציה $f(x) = ax^2 - (a-3)x$, $a < 0$.
השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x כך שנוצר גוף סיבוב.
לאיזה ערך של a , נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא מינימלי?



תשובות למבחן 29:

1. 96 שניות.

2. א. $S_n = k \cdot \frac{t^n - 1}{t - 1}$.

3. א. (i) ההיגד נכון. (ii) ההיגד לא נכון. (iii) ההיגד לא נכון.

6. א. $a = 7$, $b = -8$.

ב. **(1)** $x \neq 7$. **(2)** $(-5; -8\frac{1}{3})$ מינימום.

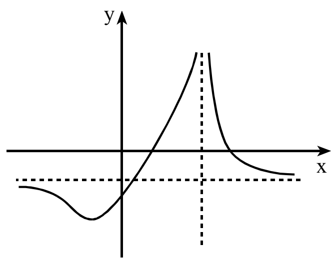
(3) עלייה: $-5 < x < 7$;

ירידה: $x > 7$ או $x < -5$.

(4) $(0; -8\frac{8}{49})$, $(10; 0)$, $(5; 0)$.

(5) $x = 7$, $y = -8$.

ד. $k > \frac{1}{3}$.



7. א. $(-4; 0)$. ב. $52\frac{1}{12}$.

8. $a = -4.5$.

מבחן 30

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

1. בשעה $9:00$ בבוקר יצאה מכונית מעיר A לעיר B, המרוחקת ממנה 100 ק"מ. באותה שעה יצא רוכב אופניים מעיר B לעיר A. הם נפגשו כעבור שעה אחת והמשיכו ליעדיהם. המכונית הגיעה לעיר B, התעכבה שם למשך 15 דקות ויצאה חזרה לעיר A. בדרכה השיגה את הרוכב במרחק 40 ק"מ מעיר B. מצא את מהירויות המכונית והרוכב.

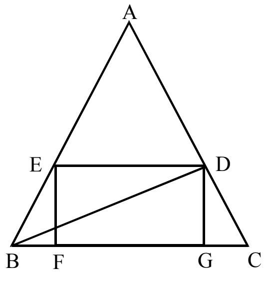
2. נתונה סדרה חשבונית שבה 30 איברים וסכום כל איבריה הוא 2340.
א. מחקו בסדרה את האיברים המופיעים במקומות השני, החמישי, השמיני וכו'.
חשב את סכום האיברים שנותרו.
ב. בסדרה שנותרה מחקו את האיברים המופיעים בסדרה המקורית במקומות הראשון, הרביעי, השביעי וכו'.
סכום האיברים שנותרו הוא 820.
מצא את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה המקורית.

3. בכד יש 16 כדורים – 10 מתוכם לבנים והשאר שחורים.
3 מתוך הכדורים הלבנים הם כבדים והשאר קלים. כמו כן,
4 מתוך הכדורים השחורים הם כבדים והשאר קלים.
א. בוחרים באקראי 2 כדורים (ללא החזרה).
(1) מהי ההסתברות ששניהם לבנים?
(2) מהי ההסתברות ששניהם כבדים?
ב. בוחרים באקראי 2 כדורים לבנים.
מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם קל?

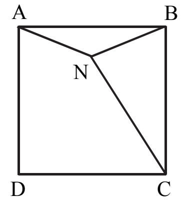
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

4. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$, חסום מלבן $DEFG$. BD חוצה את הזווית ABC ומחלק את השוק AC כך ש- $AD : DC = 2 : 1$. נתון: $BC = 2a$.
בטא באמצעות a:
א. את שטח המלבן $DEFG$.
ב. את מרחק הקדקוד B ממרכז המעגל החסום במשולש ABC.



5. בתוך ריבוע ABCD נתונה הנקודה N ,
כך ש- 2 ס"מ $= AN = BN$,
4 ס"מ $= CN$.
חשב את אורך צלע הריבוע.

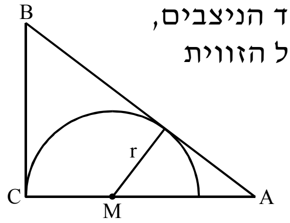


פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

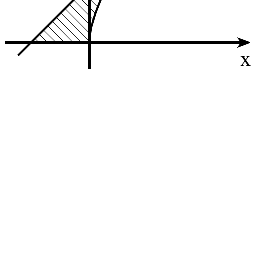
ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 5}$.
א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות חיתוך עם הצירים.
(3) נקודות קיצון. (4) תחומי עלייה וירידה.
ב. (1) הסבר מדוע הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה עבור $x > 0$.
(2) הסבר מדוע עבור $x < 0$ אין לפונקציה אסימפטוטה אופקית.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

7. יש לחסום חצי מעגל בעל רדיוס r במשולש ישר-זווית, כך שחצי המעגל יגע ביתר, קוטרו יימצא על אחד הניצבים, ואחד מקצותיו של הקוטר יתלכד עם הקדקוד של הזווית הישרה במשולש (ראה ציור).
מה צריך להיות גודל הזוויות החדות במשולש ישר-הזווית הנ"ל, כדי ששטח המשולש יהיה מינימלי?



8. גרף הפונקציה $y = x + k\sin x$, המתואר בציור, עובר דרך ראשית הצירים. לגרף העבירו משיק בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{2}$.
השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק וציר ה- x הוא $\frac{\pi - 1}{2}$.
א. מצא את הערך של k .
ב. השטח שבסעיף א' מסתובב סביב ציר ה- x .
היעזר באינטגרל $\int x\sin x dx = \sin x - x\cos x + c$
וחשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



תשובות למבחן 30:

1. 80 קמ"ש, 20 קמ"ש.

2. א. 1560 . ב. $a_1 = 20$, $d = 4$.

3. א. (1) $\frac{3}{8}$. (2) $\frac{7}{40}$. ב. $\frac{14}{15}$.

4. א. $\frac{4}{9}\sqrt{15}\,a^2$. ב. $\frac{2}{5}\sqrt{10}\cdot a$

5. 3.91 ס"מ.

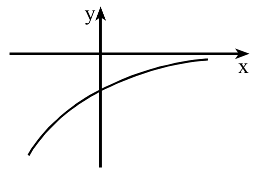
6. א. (1) כל x .

(2) $(0;-\sqrt{5})$.

(3) אין.

(4) עלייה: כל x ; ירידה: אין.

ג.



7. $\sphericalangle A = 30^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$.

8. א. 1 . ב. 1.586π .