מבחנים לחזרה

חלק זה כולל 20 מבחנים לחזרה בהתאם למבנה של שאלון 035806.
המבחנים לקוחים מתוך הספר 806 ד מאת יואל גבע ואריק דז'לדטי

לתשומת ליבכם! החל מהמועד הקרוב – קיץ תשע״ד, 2014,
שאלון 806 יכלול 8 שאלות ולא 9 שאלות כפי שהיה עד עכשיו.
(הפרק השני בשאלון יכלול 2 שאלות במקום 3.)
כדי להתאים את המבחנים שבספר למבנה החדש,
מחקנו במבחנים המקוריים את שאלה 5, הנמצאת בפרק השני.
כמו כן, הנושאים: בעיות תערובת, אינדוקציה מתמטית וסדרות מעורבות,
אינם נכללים עוד בתכנית הלימודים, לכן החלפנו את השאלות בנושאים
אלה בשאלות אחרות הנכללות בתכנית הלימודים.

מבנה השאלון – 806

בשאלון 806 שלושה פרקים.

משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

המבנה של שאלון 035806:

פרק ראשון – בעיות מילוליות, סדרות, הסתברות (40 נקודות).
הפרק כולל 3 שאלות, מתוכן יש לענות על 2 שאלות
(לכל שאלה – 20 נקודות).

פרק שני – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות).
הפרק כולל 2 שאלות, מתוכן יש לענות על שאלה אחת
(לכל שאלה – 20 נקודות).

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות עם שורשים ריבועיים ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות).
הפרק כולל 3 שאלות, מתוכן יש לענות על 2 שאלות.
(לכל שאלה – 20 נקודות).

מבחן 1

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

1. מעיר A יצאה מכונית א' לכיוון עיר B. 6 שעות לאחר מכן יצאה מעיר B מכונית ב' לכיוון עיר A. שתי המכוניות נפגשו בדרך.
עד נקודת הפגישה עברה מכונית א' 120 ק"מ יותר משעברה מכונית ב'.
מכונית א' הגיעה לעיר B 9 שעות אחרי הפגישה ומכונית ב' הגיעה לעיר A 8 שעות אחרי הפגישה (המכוניות נסעו במהירויות קבועות).
א. מצא את המרחק שעברה מכונית ב' עד שהגיעה לנקודת הפגישה.
ב. מצא את המהירות של מכונית א' ואת המהירות של מכונית ב'.

2. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל:

$$a_1 = c$$
$$a_n + a_{n+1} = 4n$$

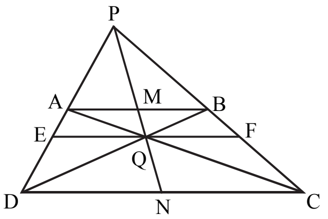
א. הראה שהאיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים בסדרה מהווים סדרה חשבונית, וגם האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה מהווים סדרה חשבונית.
ב. הוכח כי סכום $2n$ האיברים הראשונים של הסדרה (S_{2n}) אינו תלוי ב- c.
ג. מצא עבור איזה ערך של c סדרת האיברים במקומות האי זוגיים זהה לסדרת האיברים במקומות הזוגיים (שתי הסדרות מתלכדות).

3. $\frac{3}{4}$ מהתלמידים בכיתה אוהבים שוקולד או גלידה (כולל תלמידים האוהבים שוקולד וגם גלידה). 9 תלמידים לא אוהבים שוקולד וגם לא אוהבים גלידה. כל תלמיד בכיתה שאוהב שוקולד כתב על פתק: אוהב, וכל תלמיד שלא אוהב שוקולד כתב על פתק: לא אוהב.
ערבבו את כל הפתקים, ובחרו מביניהם באקראי 5 פתקים עם החזרה.
נתון כי ההסתברות שעל 3 מהם כתוב "אוהב" שווה להסתברות שעל 2 מהם כתוב "אוהב".
א. מצא כמה תלמידים בכיתה אוהבים שוקולד.
ב. בוחרים באקראי (ללא החזרה) שני תלמידים שלא אוהבים שוקולד. מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם אוהב גלידה?

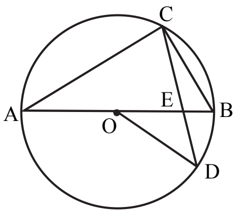
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

4. המרובע $ABCD$ הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.
המשכי השוקיים נפגשים בנקודה P.
Q היא נקודת החיתוך של האלכסונים.
PQ חותך את הבסיס AB בנקודה M.
המשכו של PQ חותך את הבסיס DC
בנקודה N.
EF עובר דרך נקודה Q ומקביל ל- DC.
א. הוכח: $QE = QF$.
ב. הוכח: $AM = BM$.
ג. הוכח: $S_{ADNQ} = S_{BCNQ}$.



5. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.
המיתר CD חותך את הקוטר AB
בנקודה E (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BOD = \alpha$.
א. הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש BCD.
ב. נתון גם כי $BC = \sqrt{3}R$, ושטח המשולש BCD
הוא $8\sqrt{3}$. חשב את R.

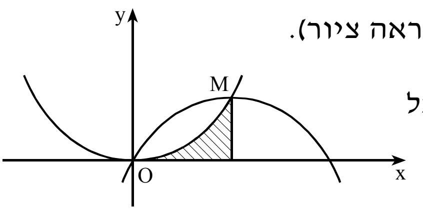


פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות.

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = a\sin^3 x - 3b\sin x$ בתחום $0 \le x \le \pi$.
ישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{6}$, מקביל לציר ה- x.
א. הראה כי $a = 4b$.
ב. נתון: $b > 0$. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$
בתחום הנתון (הבע באמצעות b לפי הצורך), וקבע את סוגן.
ג. הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של פונקציה אחרת $g(x)$.
בהנחה שתחום ההגדרה של $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של $f(x)$,
מצא בתחום $0 \le x \le \pi$ את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ ואת
תחומי הקעירות כלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $g(x)$.

7. הגרפים של הפונקציות: $f(x) = -x^2 + x$, $g(x) = ax^2$
$(a > 0)$ נחתכים בנקודות M ו- O.
מהנקודה M הורידו אנך לציר ה- x (ראה ציור).
א. הבע באמצעות a את שיעור ה- x
של הנקודה M, ואת השטח המוגבל
על ידי גרף הפונקציה $g(x)$,
על ידי האנך ועל ידי ציר ה- x
(השטח המקווקו בציור).



ב. חשב את הערך של a, שעבורו השטח שהבעת בסעיף א׳ הוא מקסימלי.

8. נתונה הפונקציה $y = x^2 + \frac{8}{x}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה (דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

ג. מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

ד. מצא באילו תחומים הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$ ובאילו תחומים היא קעורה כלפי מעלה $\cup$.

ה. הישר ℓ מחבר את נקודת הפיתול של הפונקציה עם נקודת הקיצון שלה. מנקודת הקיצון הנ"ל מורידים אנך לציר ה- x .
השטח המוגבל בין הישר ℓ , האנך וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x , כך שנוצר חרוט. חשב את נפח החרוט.

תשובות למבחן 1 :

1. א. 360 ק"מ. ב. מכונית א' – 40 קמ"ש, מכונית ב' – 60 קמ"ש.

2. ג. $c = 2$.

3. א. 18 תלמידים. ב. $\frac{13}{17}$.

5. א. $2R^2 \sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}$. ב. $R = 4$.

6. ב. $(\pi;0)$ מקסימום, $\left(\frac{5\pi}{6};-b\right)$ מינימום, $\left(\frac{\pi}{2};b\right)$ מקסימום, $\left(\frac{\pi}{6};-b\right)$ מינימום,

$(0;0)$ מקסימום. ג. $\cup$: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ או $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$; $\cap$: $0 < x < \frac{\pi}{6}$ או $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$.

7. א. $x_M = \frac{1}{a+1}$, $S = \frac{a}{3(a+1)^3}$. ב. $\frac{1}{2}$.

8. א. $x \neq 0$. ב. $(1.59;7.56)$ מינימום. ג. $(-2;0)$.

ד. קעורה כלפי מטה $\cap$: $-2 < x < 0$; קעורה כלפי מעלה $\cup$: $x > 0$ או $x < -2$.

ה. 214.68 .

מבחן 2

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

1. שני הולכי רגל יצאו בו זמנית מעיר א׳ לעיר ב׳. המרחק בין עיר א׳ לעיר ב׳ הוא 30 ק״מ. הולך הרגל הראשון הלך במהירות הגדולה ב- 2 קמ״ש מהמהירות של הולך הרגל השני. כעבור 1.5 שעות הקטין הולך הרגל הראשון את מהירותו לחצי ממהירותו הקודמת, והגיע לעיר ב׳ שעה לאחר הולך הרגל השני (המהירויות לפני השינוי ואחרי השינוי הן קבועות).
א. מה הייתה המהירות של הולך הרגל השני, אם ידוע שהיא קטנה מ- 5 קמ״ש?
ב. כמה זמן לאחר ששני הולכי הרגל יצאו מעיר א׳, השיג הולך הרגל השני את הולך הרגל הראשון?

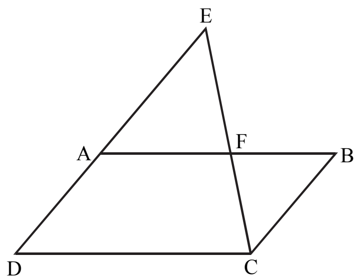
2. א. הוכח שבסדרה הנדסית מתקיים: $S_n\cdot(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$.
ב. בסדרה הנדסית יש 24 איברים. סכום כל איברי הסדרה הוא 16777215 וסכום 8 האיברים הראשונים הוא 255 .
בעזרת סעיף א׳, חשב את סכום 16 האיברים הראשונים בסדרה.

3. בחדר נמצאים x גברים ו- $2x$ נשים, המשחקים את המשחק שלהלן:
בוחרים באקראי שני אנשים מהחדר בזה אחרי זה (בלי החזרה).
ידוע שההסתברות לבחור במשחק זה שני אנשים שאחד מהם גבר והאחר אישה, היא $\frac{1}{2}$.
א. חשב את x .
ב. ידוע שהאדם השני שנבחר היה אישה.
מהי ההסתברות שהאדם הראשון שנבחר היה אישה?
ג. משחקים את המשחק חמש פעמים (בכל פעם יש בהתחלה x גברים ו- $2x$ נשים בחדר).
מהי ההסתברות שבדיוק שלוש פעמים בוחרים שתי נשים?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

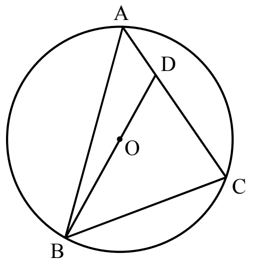
ענה על אחת מבין השאלות 4-5.

4. המרובע ABCD הוא מקבילית (ראה ציור).



א. הוכח: $\frac{BF}{FA}=\frac{AD}{AE}$.
ב. (1) הוכח: $\frac{S_{\Delta ADF}}{S_{\Delta AEF}}=\frac{AD}{AE}$
(2) הוכח: $S_{\Delta ADF}=S_{\Delta BEF}$.
(3) הוכח: $S_{\Delta BCE}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

5. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.
D היא נקודה פנימית על הצלע AC
כך ש- BD עובר דרך מרכז המעגל (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle ABD = \alpha$, $\sphericalangle DBC = \beta$.
א. הבע באמצעות α ו- β את היחס $\frac{AD}{DC}$.
ב. הראה כי <u>לא</u> ייתכן שהיחס $\frac{AD}{DC}$
שווה ל- $\frac{1}{2}$, אם $\alpha = \frac{1}{2}\beta$.
ג. מצא את היחס $\frac{AD}{DC}$, כאשר AC הוא קוטר. נמק.

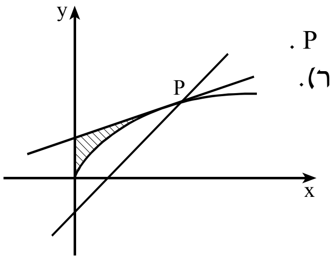


פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות.

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 8-6.

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{Ax - x^2 - 16}{Bx^2}$, A ו- B הם פרמטרים.
הישר $y = -1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה.
שיפוע הישר, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = -2$, הוא -6.5.
א. מצא את הערך של B ואת הערך של A.
ב. הצב את הערכים של A ו- B ומצא:
(1) את תחום הגדרה של הפונקציה.
(2) נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
(3) אסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
(4) נקודות קיצון של הפונקציה, ומצא את סוגן.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = (f(x))^2$.
מצא לאילו ערכים של k, אין פתרון למשוואה $g(x) = k$.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax}$ $(a > 0)$.
הישר $y = x - 2a$ חותך את הפונקציה בנקודה P.
בנקודה זו העבירו משיק לפונקציה (ראה ציור).
השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,
על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y (השטח
המקווקו בציור) מסתובב סביב ציר ה- x.
נפח גוף הסיבוב שנוצר הוא 36π.
מצא את שיעורי הנקודה P.



8. נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2}{4} - \sin x$, בתחום $0 \le x \le 2\pi$.
א. (1) מצא בתחום הנתון את שיעורי ה- x וה- y של נקודות הפיתול של הפונקציה.
(2) מצא באילו תחומים הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$ ובאילו תחומים היא קעורה כלפי מעלה $\cup$.
ב. ידוע שבתחום הנתון הנגזרת של הפונקציה מתאפסת רק ב- $x = 1.025$ בקירוב. על סמך הנתונים ועל סמך סעיף א', שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות למבחן 2 :

1. א. 4 קמ"ש. ב. 4.5 שעות.

2. ב. 65535 .

3. א. $x=3$. ב. $\frac{5}{8}$. ג. 0.2462 .

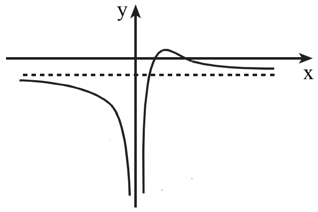
5. א. $\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$. ג. 1 .

6. א. $A=10$, $B=1$.

ב. (1) $x\neq 0$. (2) $(8;0)$, $(2;0)$.

(3) $x=0$, $y=-1$. (4) $(3\frac{1}{5};\frac{9}{16})$ מקסימום.

ג.



ד. $k<0$.

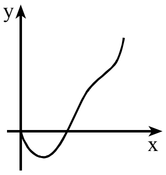
7. $(12;6)$

8. א. (1) $\left(\frac{11\pi}{6};8.79\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6};3.86\right)$.

(2) קעורה כלפי מטה $\cap$: $\frac{7\pi}{6}<x<\frac{11\pi}{6}$;

קעורה כלפי מעלה $\cup$: $\frac{11\pi}{6}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{7\pi}{6}$.

ב.



מבחן 3

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

1. מעיר א׳ לעיר ב׳ אפשר להגיע בדרך סלולה שאורכה 35 ק״מ או במסלול עפר שאורכו 20 ק״מ. מהירות הרכיבה באופניים בדרך הסלולה גבוהה ביותר מ- 4 קמ״ש ממהירות הרכיבה באופניים בדרך העפר.
זמן הרכיבה בדרך הסלולה ארוך בחצי שעה מזמן הרכיבה בדרך העפר.
א. באיזה תחום מספרי נמצא זמן הרכיבה על אופניים בדרך העפר?
ב. רוכב עבר את הדרך מעיר א׳ לעיר ב׳ בדרך סלולה וחזר מיד מעיר ב׳ לעיר א׳ בדרך העפר. מהו התחום המספרי שבו נמצא הזמן מהרגע שיצא מעיר א׳ ועד שחזר אליה?

2. נתונה סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה היא $4q^2$ $(0 < q < \frac{1}{2})$.
בין כל שני איברים בסדרה הנתונה הכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה שכל איבריה חיוביים.
א. הבע באמצעות q את מנת הסדרה החדשה.
ב. נתון כי סכום הסדרה החדשה גדול פי $48q^2$ מסכום הסדרה הנתונה. חשב את q.
ג. עבור הערך של q שמצאת בסעיף ב׳, חשב בסדרה החדשה את היחס בין האיבר במקום הראשון ובין סכום האיברים שאחרי האיבר הראשון.

3. נתון כי אם בוחרים באקראי 3 אנשים מעיר גדולה מאוד, אז ההסתברות שלכל היותר 2 מהם אוהבים מוזיקה קלאסית היא 0.657.
א. בוחרים באקראי 10 אנשים מעיר זו.
מהי ההסתברות שבדיוק 6 מהם אוהבים מוזיקה קלאסית?

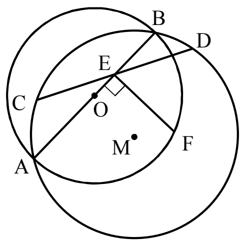
בוחרים באקראי מעיר זו קבוצה של 5 אנשים, ואחר כך בוחרים קבוצה שנייה של 5 אנשים.
ב. מהי ההסתברות שבכל אחת מהקבוצות יהיו בדיוק 3 אנשים שאוהבים מוזיקה קלאסית?
ג. אם ידוע כי בשתי הקבוצות ביחד יש בדיוק 6 אנשים שאוהבים מוזיקה קלאסית, מהי ההסתברות שבכל אחת מהקבוצות יהיו בדיוק 3 אנשים שאוהבים מוזיקה קלאסית?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

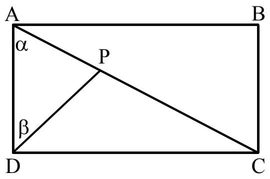
4. א. הוכח: אם שני מיתרים נחתכים במעגל, אז הם מחלקים זה את זה לשני קטעים כך שמכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני.

ב. שני מעגלים M ו- O נחתכים בנקודות A ו- B.
AB הוא קוטר במעגל O ומיתר במעגל M.
CD הוא מיתר במעגל M החותך את AB בנקודה E, כך ש- $CE = ED$.
F נקודה על מעגל O כך ש- $EF \perp AB$.



(1) נתון: $CD = 8$ ס"מ. חשב את אורך הקטע EF.
(2) מהו גודל הזווית $\sphericalangle CFD$?

5. נתון מלבן $ABCD$. האלכסון AC יוצר זווית α עם הצלע AD.
P היא נקודה על האלכסון AC, כך ש- $\sphericalangle PDA = \beta$ (ראה ציור).
r הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש APD.
R הוא רדיוס המעגל החוסם את המלבן $ABCD$.



א. הבע באמצעות α ו- β את היחס $\frac{r}{R}$.

ב. הבע באמצעות α ו- β
את יחס השטחים $\frac{S_{\Delta APD}}{S_{ABCD}}$.

ג. נתון כי $\frac{1}{4} = \frac{S_{\Delta APD}}{S_{ABCD}}$. הוכח: $\alpha = \beta$.

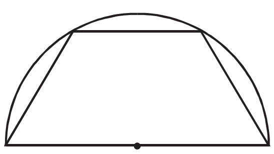
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות.

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

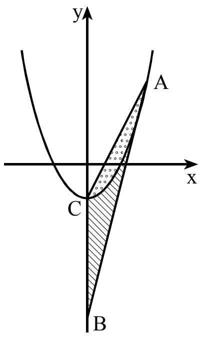
6. נתונה הפונקציה $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.
א. גזור והוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא $y' = -\sin 4x$.

בתחום הנתון:
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
ג. מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה.
ד. מצא את התחומים שבהם הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$
ואת התחומים שבהם הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$.
ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

7. נתון חצי מעגל שרדיוסו R.
במעגל זה חסום טרפז שווה-שוקיים,
כך שהבסיס הגדול של הטרפז הוא קוטר
במעגל (ראה ציור). מבין כל הטרפזים
החסומים באופן זה, הבע באמצעות R
את אורך הבסיס הקטן בטרפז ששטחו מקסימלי.



8. גרף הפרבולה $y = x^2 - 1$ חותך את ציר ה- y
בנקודה C. ישר משיק לפרבולה בנקודה A,
וחותך את ציר ה- y בנקודה B (ראה ציור).
גרף הפרבולה מחלק את המשולש ABC
לשני שטחים. חשב את היחס בין השטח
העליון (השטח המנוקד בציור) לבין השטח
התחתון (השטח המקווקו בציור).



תשובות למבחן 3:

1. א. בין שעה ורבע לשעתיים. ב. בין 3 ל- 4.5 שעות.

2. א. $2q$. ב. $\frac{1}{6}$. ג. 2 .

3. א. 0.2001 . ב. 0.0953 . ג. 0.4762 .

4. ב. (1) 4 ס"מ. (2) 90° .

5. $\frac{r}{R}=\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. ב. $\frac{S_{APD}}{S_{ABCD}}=\frac{\cos\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

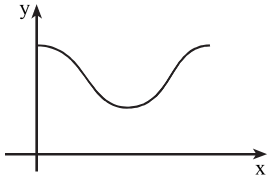
6. ב. $(0;1)$ מקסימום, $\left(\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$ מינימום,

$\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ מקסימום.

ג. $\left(\frac{\pi}{8};0.75\right)$, $\left(\frac{3\pi}{8};0.75\right)$.

ד. $\cup$: $\frac{\pi}{8}<x<\frac{3\pi}{8}$; $\cap$: $\frac{3\pi}{8}<x<\frac{\pi}{2}$ או $0<x<\frac{\pi}{8}$.

ה.



7. R .

8. $\frac{1}{2}$.

מבחן 4

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

1. שלושה ברזים יכולים למלא בריכה. אם פותחים יחד את הברז הראשון ואת הברז השני, הבריכה מתמלאת בתוך 6 שעות. אם פותחים יחד את הברז השני ואת הברז השלישי, הבריכה מתמלאת בתוך 4 שעות ו- 48 דקות. אם פותחים יחד את הברז הראשון ואת הברז השלישי, בתוך 3 שעות הבריכה מתמלאת עד כדי $\frac{7}{8}$ מנפחה.

א. בכמה שעות ממלא את הבריכה כל ברז לבדו?

ב. בתוך כמה שעות מתמלאת הבריכה אם שלושת הברזים נפתחים יחד?

2. סדרה מוגדרת על-ידי כלל הנסיגה: $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$.

א. מגדירים סדרה חדשה לפי $b_n=\frac{1-2a_n}{a_n}$.
הוכח שסדרת b_n היא חשבונית.

ב. מצא נוסחה ל- a_n כפונקציה של n בלבד.

3. במשחק אחד אפשר לזכות באחת משלוש האפשרויות: ב- 10 נקודות, ב- 15 נקודות או ב- 30 נקודות. ההסתברות לזכות במשחק אחד ב- 30 נקודות היא 0.2 וההסתברות לזכות ב- 10 נקודות במשחק אחד היא p $(p>0.4)$. ההסתברות לזכות ב- 2 משחקים רצופים בסכום כולל של בדיוק 25 נקודות היא 0.3 .

א. חשב את p .

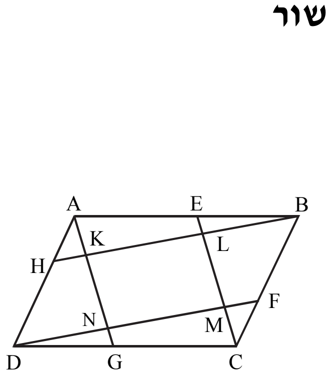
ב. חשב את ההסתברות לזכות ב- 3 משחקים רצופים בסכום כולל של בדיוק 50 נקודות.

ג. 5 אנשים משחקים במשחק. כל אחד מהם משחק 3 משחקים רצופים. מהי ההסתברות שלכל היותר אחד מהאנשים יזכה בסכום כולל של בדיוק 50 נקודות?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על אחת מבין השאלות 4-5.

4. המרובע ABCD הוא מקבילית.
E , F , G , ו- H הן נקודות על צלעות המקבילית. נתון: $AH=CF$, $BE=DG$.



א. הוכח: המרובע KLMN הוא מקבילית.

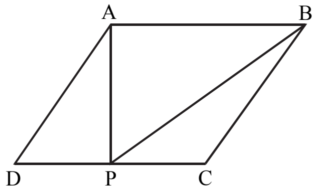
ב. הוכח: $AK=CM$.

ג. נתון: $BF=2CF$, $DG:CG=4:5$.

(1) חשב את יחס השטחים $S_{KLMN}:S_{AGCE}$.

(2) חשב את יחס השטחים $S_{KLMN}:S_{ABCD}$.

.5 המרובע ABCD הוא מעוין.



הנקודה P היא אמצע הצלע CD .

נתון : $DP = m$, $\sphericalangle ADP = \beta$.

א. הבע את AP ואת BP באמצעות m ו- β .

ב. נתון : $\sphericalangle APB = \alpha$, $\beta = 60^\circ$.

הוכח כי $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

ג. נתון כי $\beta = 60^\circ$.

הבע באמצעות m את רדיוס המעגל החוסם את המשולש APB .

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

.6 המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{b}(\sin 4x - \cos 4x)$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$ מקביל לישר $x + y - \frac{\pi}{2} = 0$.

א. מצא את ערך הפרמטר b .

ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

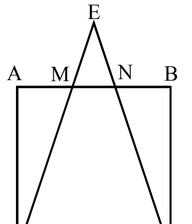
ג. עבור איזה ערך של m יש למשוואה $f(x) = m$ בדיוק שלושה פתרונות בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$?

ד. (1) הוכח : $f''(x) = -16f(x)$.

(2) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ והקעירות כלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

(3) שרטט באותה מערכת צירים את הגרפים של $f(x)$ ושל $f''(x)$ בתחום $0 \le x \le \pi$.

.7 נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו 10 ס"מ.



E היא נקודה כלשהי מחוץ לריבוע, כך שהמשולש DEC הוא שווה-שוקיים $(ED = EC)$. שוקי המשולש חותכים את הצלע AB בנקודות M ו- N (ראה ציור).

מצא מה צריך להיות אורך הקטע AM כדי שהסכום של שטחי המשולשים EMN , AMD ו- BNC יהיה מינימלי.

.8 נתונה הפונקציה $y = -\frac{4x^3 + 4x^2 - 15x - 18}{2x + 3}$ $\quad (x \ne -\frac{3}{2})$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $y = 6$.

למשיק יש שיפוע שלילי. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x .

תשובות למבחן 4:

1. א. 8 שעות, 24 שעות, 6 שעות. ב. 3 שעות.

2. ב. $a_n = \frac{1}{2n}$.

3. א. 0.5 . ב. 0.15 . ג. 0.83521 .

4. ג. (1) $\frac{18}{31}$. (2) $\frac{10}{31}$.

5. $BP = m\sqrt{5+4\cos\beta}$, $AP = m\sqrt{5-4\cos\beta}$. ג. $\frac{\sqrt{7}m}{2}$.

6. א. $b = 4$.

ב. עלייה: $\frac{7\pi}{16} < x < \frac{\pi}{2}$ או $0 < x < \frac{3\pi}{16}$;

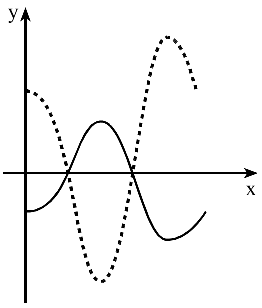
ירידה: $\frac{3\pi}{16} < x < \frac{7\pi}{16}$.

ג. $m = -\frac{1}{4}$.

ד. (2) $\cup$: $0 < x < \frac{\pi}{16}$ או $\frac{5\pi}{16} < x < \frac{\pi}{2}$;

$\cap$: $\frac{\pi}{16} < x < \frac{5\pi}{16}$.

(3)



7. 3.54 ס"מ $= \sqrt{12.5}$ ס"מ.

8. $12\frac{3}{8}$.

מבחן 5

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

1. בני וגל התחרו בריצה במסלול AB שאורכו 50 מטר.
שניהם זינקו מנקודה A ורצו אל נקודה B. בני זינק ראשון.
גל זינק שנייה אחת אחרי בני והשיג אותו במרחק 10 מטרים מנקודת
הזינוק A. כאשר גל הגיע ל- B, הוא רץ מיד בחזרה ל- A, ופגש שוב
את בני שהיה עדיין בדרכו ל- B.
הפגישה השנייה אירעה 10 שניות לאחר שבני זינק מ- A.
המהירויות של בני וגל לא השתנו במהלך כל הריצה.
באיזה מרחק מנקודה B אירעה הפגישה השנייה?

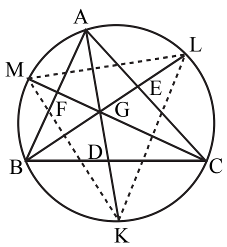
2. סדרה מקיימת לכל n טבעי: $a_n = (-1)^{n+1} \cdot (4n+4)$.
א. הוכח שהסימנים של איברי הסדרה מתחלפים לסירוגין,
והערכים המוחלטים של האיברים מהווים סדרה חשבונית.
ב. הבע באמצעות n את הסכום של:
(1) $2n$ האיברים הראשונים של הסדרה.
(2) $2n+1$ האיברים הראשונים של הסדרה.
ג. נתון כי סכום כל איברי הסדרה הוא -300.
מצא את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

3. בבית האריזה של פרדס מסוים, 30% מהארגזים מכילים תפוזים,
40% מהארגזים מכילים אשכוליות, ושאר הארגזים מכילים מנדרינות.
חלק מהארגזים מיועד ליצוא, ומודבק עליהם פתק ליצוא. פתק ליצוא
מודבק על 20% מבין הארגזים המכילים תפוזים, על 50% מבין הארגזים
המכילים אשכוליות, ועל 60% מבין הארגזים המכילים מנדרינות.
א. על ארגז שנבחר באקראי מודבק פתק ליצוא.
מהי ההסתברות שארגז זה אינו מכיל תפוזים?
ב. ידוע כי ב- 1% מהארגזים בבית האריזה יש פירות פגומים.
בוחרים באקראי 4 ארגזים. מהי ההסתברות שבכל ארבעת הארגזים
לא יהיו פירות פגומים וגם יהיה מודבק על כל אחד מהם פתק ליצוא?
הנח כי קיימת אי-תלות בין העובדה שבארגז יש פירות פגומים לכך
שהארגז מיועד לייצוא.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על אחת מבין השאלות 4-5.

4. המשולש ABC חסום במעגל. AD, BE ו- CF
הם חוצי-זוויות המשולש, הנפגשים בנקודה G.
המשכי הקטעים AD, BE ו- CF חותכים
את המעגל בנקודות K, L ו- M בהתאמה
א. הוכח: G היא נקודת מפגש הגבהים
של המשולש KLM.
ב. הוכח: אם $KL = KM$, אז $BG = CG$.



5. שטחו של משולש ABC הוא $3\sqrt{3}$ סמ"ר.
נתון: $BC=\sqrt{37}$ ס"מ , $\sphericalangle BAC=120^\circ$.
א. חשב את אורכי הצלעות AB ו- AC .
ב. חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש ABC .

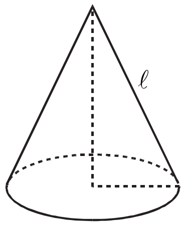
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 8-6.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4a}{x^2}-\frac{4a}{x}+3$, $a>0$.
א. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (הבע באמצעות a במידת הצורך), וקבע את סוג הקיצון.
ג. קבע את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. נמק.
ד. מצא את התחום שבו הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$, ואת התחום שבו הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$.
ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור $a>3$.

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.
א. הראה כי הפונקציה עולה לכל x .
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה הנתונה בנקודה שבה הפונקציה חותכת את ציר ה- x .
(1) הראה כי המשיק אינו חותך את הפונקציה בנקודות נוספות.
(2) המשיק נפגש עם הישר $y=1$ בנקודה A . מנקודה A העבירו אנך לציר ה- x . חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי האנך מ- A .

8. נתון כי מבין על החרוטים הישרים שאורך הקו היוצר שלהם הוא ℓ (ראה ציור), רדיוס החרוט בעל הנפח המקסימלי הוא $\sqrt{\frac{2}{3}}$. מצא את האורך ℓ .



תשובות למבחן 5:

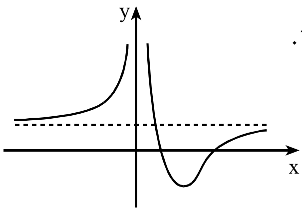
1. 10 מטרים.

2. ב. (1) $S_{2n} = -4n$. (2) $S_{2n+1} = 4n+8$. ג. -23100 .

3. א. $\frac{19}{22}$. ב. 0.036 .

5. א. 3 ס״מ, 4 ס״מ או 4 ס״מ, 3 ס״מ. ב. 0.79435 ס״מ.

6. א. $x = 0$, $y = 3$. ב. $(2;3-a)$ מינימום. ה.

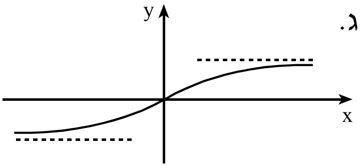


ג. עלייה: $x > 2$ או $x < 0$; ירידה: $0 < x < 2$.

ד. קעורה כלפי מטה $\cap$: $x > 3$.

קעורה כלפי מעלה $\cup$: $0 < x < 3$ או $x < 0$.

7. ב. $y = 1$, $y = -1$. ג.



ד. (2) $4.5 - 3\sqrt{2} = 0.2574$.

8. $\ell = 1$.

מבחן 6

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 3-1.

1. שתי מכונות, I ו- II, מכינות עוגיות. ביום ראשון הפעילו את שתי המכונות באותה שעה, וסגרו אותן באותה שעה. מכונה I הכינה 80 עוגיות יותר ממכונה II. ביום שני הכינה מכונה II אותו מספר עוגיות שהכינה מכונה I ביום ראשון, ומכונה I הכינה אותו מספר עוגיות שהכינה מכונה II ביום ראשון. זמן העבודה של מכונה II ביום שני היה גדול פי $\frac{25}{9}$ מזמן העבודה של מכונה I ביום שני (קצב העבודה של כל אחת מהמכונות היה קבוע).

א. חשב כמה עוגיות הכינו שתי המכונות יחד ביום ראשון.

ב. נסמן: t_1 – הזמן הדרוש למכונה I להכין עוגייה אחת.
t_2 – הזמן הדרוש למכונה II להכין עוגייה אחת. חשב את היחס $\frac{t_1}{t_2}$.

2. נתונה סדרה: $7, 10, 16, 25, \ldots$. ההפרשים בין כל שני איברים סמוכים בסדרה (הכוונה להפרש בין איבר לבין הקודם לו) מהווים סדרה חשבונית.

א. מצא את הנוסחה לאיבר ה- n בסדרה הנתונה.

ב. החל באיזה איבר יהיו כל אחד מאיברי הסדרה הנ"ל גדולים מ- 602?

3. במבחן רב-ברירה (מבחן אמריקאי) יש 4 שאלות שוות-משקל.
לכל שאלה יש 3 אפשרויות תשובה, ורק אחת מהן נכונה.
תשובה נכונה לשאלה מזכה ב- 25 נקודות.

א. תלמיד שלא התכונן למבחן בחר באקראי תשובה לכל אחת מארבע השאלות. מהי ההסתברות שהציון של התלמיד שלא התכונן למבחן יהיה גבוה מ- 50 נקודות?

ב. כל תלמיד שקיבל ציון הגבוה מ- 50 נקודות עבר את המבחן.
20% מתלמידי הכיתה לא התכוננו למבחן ובחרו תשובות באקראי.
90% מבין התלמידים שהתכוננו למבחן קיבלו ציון הגבוה מ- 50 נקודות.

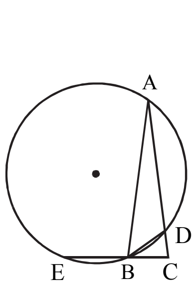
(1) מהי ההסתברות שאם בוחרים תלמיד באקראי, הוא לא התכונן למבחן **וגם** קיבל ציון הגבוה מ- 50 נקודות?

(2) מבין התלמידים שנכשלו במבחן, בוחרים באקראי תלמיד אחד. מהי ההסתברות שהתלמיד שבוחרים התכונן למבחן?
בתשובותיך תוכל להשאיר שלוש ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.

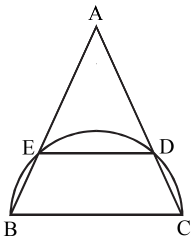
4. המשולש ABC הוא שווה-שוקיים (AB = AC).
חוצה-הזווית של $\sphericalangle ABC$ חותך את הצלע AC בנקודה D. המעגל החוסם את המשולש ABD חותך את המשך הצלע BC בנקודה E.



א. הוכח: AD = CE.

ב. הוכח: AD = DE.

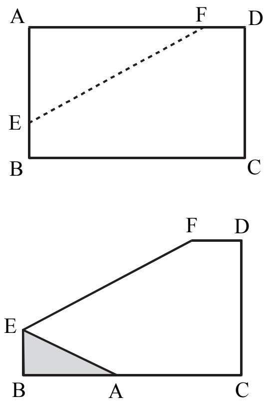
5. נתון משולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$.
חצי מעגל, שהבסיס BC הוא הקוטר שלו,
חותך את שוקי המשולש גם בנקודות D ו- E
(ראה ציור).
נתון : $ED = 2k$, $\sphericalangle BAC = 2\alpha$.
בטא באמצעות k ו- α את שטח הטרפז $EDCB$.



פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות.

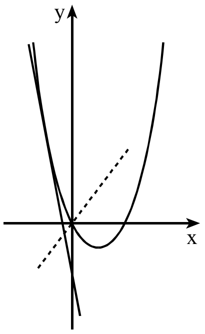
ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

6. נתון דף נייר בצורת מלבן $ABCD$.
אורך הצלע AB הוא 30 ס"מ (ואורך הצלע AD
הוא 40 ס"מ). בוחרים נקודות E ו- F על הצלעות
AB ו- AD בהתאמה, כך שכאשר מקפלים
את המלבן לאורך הקו המקווקו EF
(ראה ציור א'), הקדקוד A יהיה מונח
על הצלע BC , כמתואר בציור ב'.
מבין כל המשולשים ABE הנוצרים באופן זה,
(ראה ציור ב') מצא את השטח המקסימלי
של המשולש ABE .



7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x+a}{1-x^2}$, a פרמטר $a \neq \pm 1$.
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. לאילו ערכי a הפונקציה עולה בכל נקודה x בתחום ההגדרה שלה?
ג. נתון : $0 < a < 1$.
(1) הבע באמצעות a את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
(2) רשום את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
(3) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

8. נתונה הפרבולה $y = 2x^2 - x$.
בנקודה על הפרבולה שבה $y = 6$ מעבירים
משיק לפרבולה ששיפועו שלילי (ראה ציור).
א. מצא את משוואת המשיק.
ב. דרך ראשית הצירים מעבירים ישר
המחלק לשני שטחים שווים את השטח
המוגבל על ידי הפרבולה, על ידי המשיק
ועל ידי ציר ה- y (ראה ציור).
הישר חותך את המשיק שמצאת בסעיף א'
בנקודה שבה $x = a$. מצא את הערך של a .



תשובות למבחן 6:

1. א. 320 עוגיות. ב. $\frac{t_1}{t_2}=\frac{3}{5}$.

2. א. $a_n=\frac{3n^2-3n+14}{2}$. ב. a_{21}.

3. א. $\frac{1}{9}$. ב. (1) $\frac{1}{45}$. (2) $\frac{9}{29}$.

5. $\frac{2k^2\cos^2\alpha\sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}$.

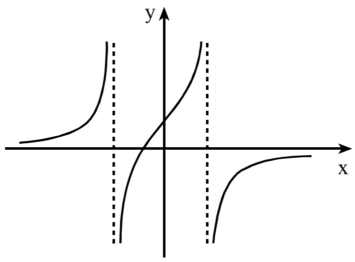
6. $50\sqrt{3}=86.6$.

7. א. $x\neq 1$, $x\neq -1$. ב. $-1<a<1$.

ג. (1) $(-a;0)$, $(0;a)$.

(2) $x=1$, $x=-1$, $y=0$.

(3)



8. א. $y=-7x-4\frac{1}{2}$. ב. $-\frac{1}{2}$.

מבחן 7

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

1. מכונית צעצוע יצאה מנקודה A , ונעה לכיוון נקודה B במהירות קבועה ובקו ישר. המרחק בין נקודה A לנקודה B הוא 2.5 מטרים.
כעבור 1.5 שניות מיציאת המכונית, נזרק כדור מנקודה B .
הכדור נע בקו ישר לעבר המכונית במהירות קבועה של 3 מטרים לשנייה.
לאחר שהכדור התנגש במכונית, המשיכה המכונית לנוע בקו ישר לכיוון הנקודה B במהירות הקטנה ב- 40% ממהירותה עד ההתנגשות.
המכונית הגיעה לנקודה B כעבור 7 שניות מרגע יציאתה מנקודה A .
מה הייתה מהירות המכונית עד רגע ההתנגשות?

2. לאורך כביש מונחות אבנים במרחק 10 מ׳ זו מזו. מספר האבנים אינו זוגי. פועל הנמצא ליד האבן השמאלית הקיצונית, אוסף אבן אחרי אבן ומביאן למקום בו מונחת האבן האמצעית. בדרך זו הוא לוקח את האבן השמאלית הקיצונית, מביאה לאמצע, חוזר ואוסף את האבן השנייה מהקצה השמאלי וכו׳. לאחר שאסף את כל האבנים משמאל לאבן האמצעית, הוא לוקח את האבן הקרובה לה מימין ומביאה לאמצע.
לאחר מכן את האבן השנייה מימין, השלישית וכו׳.
כדי לאסוף את כל האבנים עובר הפועל הנ״ל דרך של 3 ק״מ.
כמה אבנים מונחות לאורך הכביש?
הדרכה: שים לב שכדי להביא את האבן הקיצונית השמאלית לאמצע, הוא עובר דרך זו רק פעם אחת.

3. כדי להתקבל לעבודה בחברה השקעות גדולה, המועמדים צריכים לעבור בהצלחה מבחן קבלה ולאחריו ראיון (רק מי שמצליח במבחן הקבלה ניגש לראיון). 62% מהמועמדים עוברים בהצלחה את מבחן הקבלה.
$\frac{3}{4}$ מבין העוברים בהצלחה את המבחן, עוברים בהצלחה את הראיון.
א. בוחרים באקראי 5 מועמדים.
מהי ההסתברות שבדיוק אחד מחמשת המועמדים התקבל לעבודה, אם ידוע שלכל היותר אחד מהם התקבל לעבודה?
ב. בוחרים באקראי 4 מועמדים מבין המועמדים שעברו בהצלחה את מבחן הקבלה.
מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם יעבור בהצלחה את הראיון?
ג. בוחרים באקראי שני מועמדים שלא התקבלו לעבודה.
מהי ההסתברות שהראשון לא עבר בהצלחה את מבחן הקבלה והשני לא עבר בהצלחה את הראיון?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

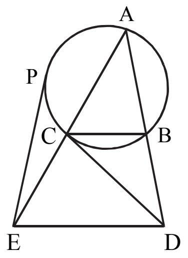
ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.

.4 משולש ABC חסום במעגל. הנקודות D ו- E נמצאות על המשכי הצלעות AB ו- AC, בהתאמה. CD ו- EP הם משיקים למעגל.

נתון: $DE \parallel BC$.

א. הוכח: $DE = PE$.

ב. הוכח: $\frac{CE}{AE} = \left(\frac{BD}{CD}\right)^2$.

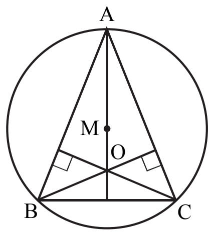


.5 במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$ אורך הבסיס הוא a והזווית שמולו היא α $(\alpha < 60^\circ)$.

א. הבע באמצעות a ו- α את המרחק בין מרכז המעגל החוסם את המשולש (M) לבין נקודת הפגישה של הגבהים (O).

ב. (1) קח דוגמה ל- $\alpha < 60^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, $\alpha > 60^\circ$, ומצא את הסימן של המרחק OM שמצאת בסעיף א'.

(2) הסבר את משמעותה ההנדסית של התוצאה המתקבלת עבור $\alpha = 60^\circ$.



פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות.

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 8-6.

.6 נתונה הפונקציה $f(x) = 8\sin^2 x - \cos 4x$ בתחום $0 \le x \le \frac{4\pi}{5}$.

א. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. מצא כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 0$ בתחום הנתון. נמק.

ג. מצא את התחום שבו הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$, ואת התחום שבו הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום הנתון.

ד. מבין כל הישרים המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון, מצא את משוואתו של הישר ששיפועו מקסימלי.

.7 נתונות שתי פונקציות: $f(x) = ax^2$, $a > 0$ ו- $g(x) = \frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}$, $b > 0$.

א. מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

ב. הבע באמצעות b אסימפטוטות (אם יש כאלה) של הפונקציה $g(x)$ המקבילות לצירים.

ג. הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים בשתי נקודות בלבד. שרטט, במערכת צירים אחת, סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. נתון כי אחת מנקודות החיתוך שבין הגרפים של שתי הפונקציות היא ב- $x = 1$ וכן נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות הוא $\frac{5}{3} - \sqrt{2}$. חשב את ערכי הפרמטרים a ו- b.

8. מכונית צריכה לנסוע S ק״מ. כאשר מהירות המכונית היא v קמ״ש, הוצאות הנסיעה הן $0.004v$ שקלים לכל ק״מ של נסיעה ו- $0.001v^2$ שקלים לכל שעת נסיעה.
כמו כן יש הוצאות נוספות של 32 שקלים לכל שעת נסיעה.
מה צריכה להיות המהירות v של המכונית, כדי שהוצאות הנסיעה יהיו מינימליות?

תשובות למבחן 7:

1. 0.5 מטר לשנייה.

2. 25 .

3. א. 0.813 . ב. 0.9961 . ג. 0.2058 .

5. א. $\frac{a\cos1\frac{1}{2}\alpha}{2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{\tan\alpha}-\tan\frac{\alpha}{2}\right)$.

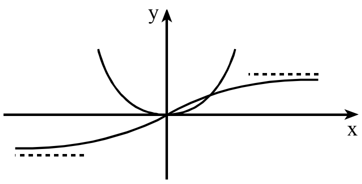
ב. $\alpha<60^\circ$ – סימן חיובי, $\alpha=60^\circ$ – מרחק שווה ל- 0 , $\alpha>60^\circ$ – סימן שלילי.

6. א. $(\frac{4\pi}{5};3.573)$ מינימום, $(\frac{\pi}{2};7)$, מקסימום, $(0;-1)$ מינימום. ב. אחד.

ג. קעורה כלפי מעלה $\cup$: $0<x<\frac{\pi}{6}$; קעורה כלפי מטה $\cap$: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{4\pi}{5}$.

ד. $y=6\sqrt{3}\cdot x+2.5-\sqrt{3}\pi$

7. א. עלייה: כל x ; ג.



ירידה: אין.

ב. $y=-b$, $y=b$. ג.

ד. $a=1$, $b=\sqrt{2}$.

8. 80 קמ"ש.

מבחן 8

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

1. ממלאים בריכה ריקה באמצעות שני צינורות, I ו- II. (כל צינור מזרים מים בקצב קבוע). כאשר צינור II פתוח, הוא מזרים 18 מ"ק מים בדקה. ביום ראשון, כאשר הייתה הבריכה ריקה, פתחו את צינור I, וכעבור m דקות פתחו גם את צינור II. כאשר התמלאה הבריכה, הייתה כמות המים שהוזרמו דרך צינור I גדולה פי 2 מכמות המים שהוזרמה דרך צינור II. למחרת רוקנו את הבריכה וכאשר היא שוב הייתה ריקה, פתחו את שני הצינורות בו-זמנית, והבריכה התמלאה ב- 12 דקות פחות מהזמן שבו התמלאה ביום ראשון.

א. הבע באמצעות m:

(1) את כמות המים שצינור I מזרים בדקה.

(2) את הזמן שבו התמלאה הבריכה ביום ראשון.

ב. מצא עבור אילו ערכים של m יש פתרון לבעיה.

2. א. הבע באמצעות n את הסכום (החשבוני):

$$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+...+(4n+3)$$

ב. הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי לפי: $a_n = 40n - 48 - b_n$

כאשר $b_n = (2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+...+(4n+3)$.

כמה איברים חיוביים יש בסדרה a_n? נמק.

3. בחפיסת קלפים יש 84 קלפים. על כל קלף מצוירת אחת מארבע הצורות: לב אדום, משולש אדום, עיגול אדום, עיגול שחור.
ידוע שההסתברות להוציא באקראי קלף שמצויר עליו ציור אדום גדולה פי 6 מההסתברות להוציא באקראי קלף שמצויר עליו ציור שחור.
נתון גם שמספר הקלפים עליהם ציור אדום מתחלק באופן שווה בין 3 הצורות.

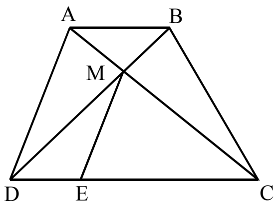
א. מהי ההסתברות להוציא בזה אחר זה (ללא החזרה) מהחפיסה של 84 הקלפים 3 קלפים שמצויר עליהם עיגול אדום?

ב. נתונות 4 חפיסות קלפים הזהות לחפיסה הנתונה.
מוציאים באקראי מכל חפיסה 3 קלפים בזה אחר זה (ללא החזרה).
מהי ההסתברות שבדיוק ב- 2 חפיסות הוצאו 3 קלפים שמצויר עליהם לב אדום?

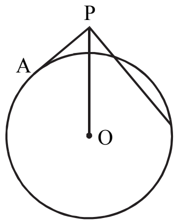
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

4. המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.
אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה M.
נתון: $\frac{AM}{MC} = \frac{1}{3}$, $ME \parallel AD$.
א. מצא את יחס השטחים $\frac{S_{ADC}}{S_{MEC}}$.
ב. הוכח: $S_{ADC} = 3 \cdot S_{ABC}$.
ג. הוכח: $S_{ADM} = S_{\Delta BCM}$.
ד. נסמן: $S_{\Delta BCM} = k$.
הבע באמצעות k את שטח המשולש DEM.



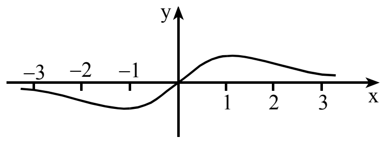
5. א. הוכח את המשפט: האנך ממרכז המעגל למיתר – חוצה את המיתר.
ב. PA הוא משיק למעגל O בנקודה A.
נתון: $\sphericalangle OPA = \alpha$, $(\alpha > 45^\circ)$, $PA = m$.
בנקודה P מעלים אנך ל- PA.
הוכח שאורך המיתר שאנך זה חותך
מהמעגל הוא $\frac{2m\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\cos\alpha}$.



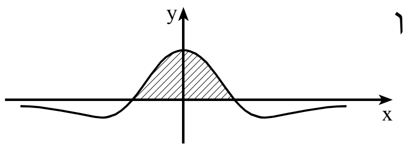
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות.

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

6. בציור I משורטטת סקיצה של הגרף
של פונקציית הנגזרת $g'(x)$.
א. על סמך ציור I בלבד, שרטט סקיצה
של הגרף של $g(x)$, אם נתון $g(0) = 0$.
סמן בסקיצה את שיעורי ה- x
של נקודות הפיתול של $g(x)$.
הסבר את השיקולים שעל פיהם שרטטת את הסקיצה.



ב. בציור II משורטטת סקיצה של הגרף
של $g''(x)$. חשב את השטח הכלוא בין
הגרף של $g''(x)$ ובין ציר ה- x
(השטח המקווקו בציור),
אם נתון כי $g'(x) = \frac{x}{1+x^2}$.



7. נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x^2+2}$.
א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה, מצא את משוואת המשיק
ששיפועו מינימלי.
ב. מצא את גודל הזווית בין הכיוון החיובי של ציר x ובין המשיק,
שאת משוואתו מצאת בסעיף א'.

8. נתונה הפונקציה $y = 4\cos^3 x + 15\cos x$ בתחום $0 \le x \le \pi$. בתחום הנתון :

א. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של הפונקציה, וקבע באילו תחומים הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$, ובאילו תחומים היא קעורה כלפי מעלה $\cup$.

תשובות למבחן 8:

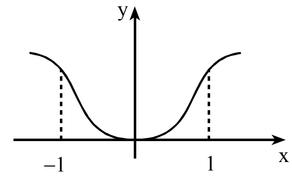
1. א. $\left(\frac{3m}{2}-18\right)$ מ״ק בדקה. **(2)** $\frac{24m}{36-m}$ דקות. ב. $36 < m < 12$.

2. א. $3n^2+8n+4$. ב. 6 איברים.

3. א. 0.0212. ב. 0.0026.

4. א. $\frac{16}{9}$. ד. $\frac{3}{4}k$

6. א.



ב. 1.

7. $y=\sqrt{2}x$. ב. $\alpha = 54.74^\circ$.

8. א. $(\pi;-19)$ מינימום מוחלט, $(0;19)$ מקסימום מוחלט.

ב. נקודות פיתול: $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{2\pi}{3}$; קעורה כלפי מטה $\cap$: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{2\pi}{3}$

או $0<x<\frac{\pi}{3}$; קעורה כלפי מעלה $\cup$: $\frac{2\pi}{3}<x<\pi$ או $\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$.

מבחן 9

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

1. שני צינורות יכולים למלא יחד בריכה מסוימת בתוך 35 דקות.
יום אחד שימש אחד הצינורות כצינור מרוקן במקום ממלא ואז התמלאה הבריכה בתוך פחות משעה ו- 45 דקות.
א. מצא את הערך המקסימלי של הזמן שבו הצינור הראשון יכול למלא את הבריכה לבדו.
ב. מצא את הערך המינימלי של הזמן שבו הצינור השני יכול למלא את הבריכה לבדו.

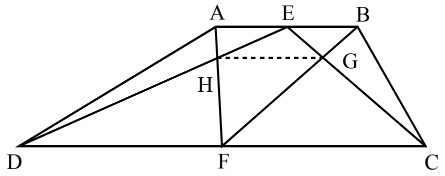
2. נתון טור הנדסי אינסופי יורד שכל איבריו חיוביים.
מסמנים ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים בטור.
מסמנים ב- S את סכום כל איברי הטור.
בונים טור חדש שהאיבר ה- n-י שלו הוא ההפרש $S-S_n$.
א. הראה שגם הטור החדש שנוצר הוא טור הנדסי אינסופי יורד.
ב. ידוע שבטור הנתון: $S=243$, $S_2=216$.
חשב את סכום הטור האינסופי החדש.

3. בחנות ממתקים יש שקיות של סוכריות הנקראות "לימותות".
בכל אחת מהן יש 6 סוכריות בטעם תות ו- 4 סוכריות בטעם לימון.
א. ראובן קנה שקית אחת של "לימותות". הוא מוציא ממנה באקראי 4 סוכריות, זו אחר זו (בלי החזרה).
מהי ההסתברות שכל הסוכריות שהוא יוציא יהיו בטעם לימון?
ב. יוסי קנה 4 שקיות של "לימותות". הוא מוציא באקראי מכל אחת מהשקיות סוכרייה אחת.
האם ההסתברות שהוא יוציא 4 סוכריות בטעם לימון גבוהה או נמוכה מההסתברות שחישבת בסעיף א'? נמק.
ג. יוסי הוציא באקראי מכל אחת מהשקיות שקנה סוכרייה אחת.
(בכל שקית 6 סוכריות בטעם תות ו- 4 סוכריות בטעם לימון).
ידוע שבין 4 הסוכריות שהוציא יוסי יש יותר סוכריות בטעם לימון.
מהי ההסתברות שכל 4 הסוכריות שהוציא יוסי הן בטעם לימון?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

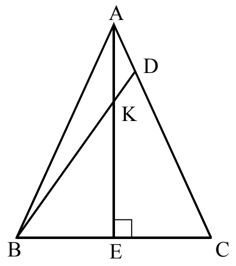
ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.

.4 בטרפז $ABCD$, הנקודות E ו- F הן אמצעי הבסיסים AB ו- DC בהתאמה.
הקטעים BF ו- CE נחתכים בנקודה G ,
והקטעים AF ו- DE נחתכים בנקודה H .
נתון: $DC = 3 \cdot AB$.



א. הוכח כי הקטע HG מקביל לבסיסי הטרפז.
ב. המשכי הקטעים FA ו- CE נפגשים בנקודה K .
הוכח: $KG = CG$.
ג. פי כמה גדול שטח המשולש FGK משטח המשולש BCG ?

.5 המשולש ABC הוא שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
K היא נקודה על הגובה AE , כך ש- $AK = \frac{1}{3}AE$.
הישר BK חותך את השוק AC בנקודה D .
נתון: $\sphericalangle DBC = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \beta$, $EC = a$.



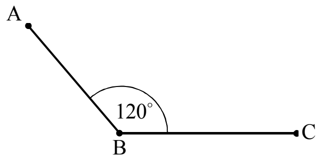
א. מצא את היחס: $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$.
ב. מצא את היחס: $\frac{AC}{DC}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 8-6.

.6 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$, $a > 0$.
א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):
(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.
(2) נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
(3) אסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
(4) תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ב. על פי תשובותיך לסעיף א', שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי הישר $y = \sqrt{3}$
ועל ידי הצירים מסתובב סביב ציר ה- x .
הבע באמצעות a את נפח של גוף הסיבוב שמתקבל.

7. נתון כי המרחק בין יישוב A ליישוב B הוא d ק"מ (d הוא קבוע). רוכב אופניים יצא בשעה מסוימת מיישוב A ליישוב B, ורכב במהירות קבועה של 10 קמ"ש.
באותה שעה יצא מיישוב B רוכב אופניים שני שרכב ליישוב C במהירות קבועה של 12 קמ"ש.
נתון כי הזווית ABC היא בת 120° (ראה ציור).
ידוע כי המרחק בין הרוכבים יהיה מינימלי כעבור 2.5 שעות לרכיבתם (לפני שהרוכב מ- A יגיע ל- B). מצא את המרחק שבין יישוב A ליישוב B.



8. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin x + \cos x$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$.
השטח הנמצא מתחת לציר ה- x בתחום הנתון, ומוגבל על ידי גרף הפונקציה ועל ידי ציר ה- x, מסתובב סביב ציר ה- x.
חשב את הנפח של גוף הסיבוב שנוצר. הראה את כל שלבי הפתרון.

תשובות למבחן 9:

1. א. 52.5 דקות. ב. 105 דקות.

2. ב. 121.5.

3. א. $\frac{1}{210}$. ב. גבוהה יותר, כיוון ש- $\frac{1}{210} > \frac{16}{625}$. ג. $\frac{1}{7}$.

4. ג. פי 3.

5. א. 1.5. ב. 1.25.

6. א. (1) $-a \le x \le a$, $x \ne 0$.

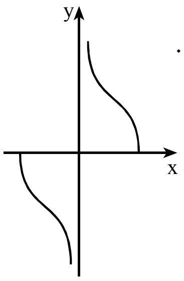
(2) $(a;0)$, $(-a;0)$.

(3) $x = 0$.

(4) עלייה: אין;

ירידה: $0 < x < a$ או $-a < x < 0$.

ב.



ג. $2\pi a$.

7. 77.5 קמ"ש.

8. π^2.

מבחן 10

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

1. רכבת יצאה מתחנה A ונסעה במהירות קבועה לתחנה B. שעתיים אחרי היציאה הגיעה הרכבת לנקודה C, ואז קיבל הנהג הוראה להאט. מיד אחרי ההוראה המשיכה הרכבת לנסוע במהירות שהייתה $\frac{1}{3}$ מהמהירות הקודמת. הרכבת הגיעה לתחנה B 40 דקות אחרי השעה המתוכננת. למחרת יצאה הרכבת מתחנה A באותה מהירות קבועה, אך הפעם, 14 ק"מ אחרי הנקודה C, קיבל הנהג הוראה להאט. מיד אחרי ההוראה המשיכה הרכבת לנסוע במהירות שהייתה $\frac{1}{3}$ מהמהירות הקודמת. הפעם הגיעה הרכבת לתחנה B 20 דקות אחרי השעה המתוכננת.

א. מצא את המרחק בין תחנה A לתחנה B.

ב. מצא את המהירות שבה נסעה הרכבת עד שהנהג קיבל הוראה להאט.

2. סכום n האיברים הראשונים של סדרה הוא $S_n = -2n^2 + 5n + c$.

א. לאיזה ערך של c הסדרה היא סדרה חשבונית? נמק.

ב. עבור הערך של c שמצאת בסעיף א',
חשב את הסכום $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{26}$.

3. תלמיד ניגש למבחן רב ברירה (מבחן אמריקאי). לכל השאלות במבחן אותו משקל. לכל שאלה יש 4 אפשרויות תשובה, ורק אחת מהן נכונה. התלמיד יודע את התשובה הנכונה לחצי מהשאלות במבחן, ומנחש את התשובה לחצי האחר של השאלות.

א. נתון שעל שאלה מסוימת ענה התלמיד תשובה נכונה.
מהי ההסתברות שהוא ידע את התשובה ולא ניחש אותה?

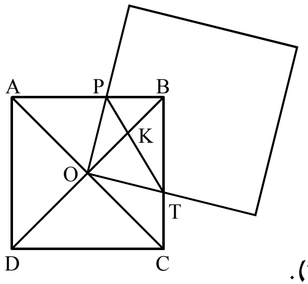
ב. בוחרים באקראי 4 שאלות מהמבחן.
מהי ההסתברות שהתלמיד יענה נכון על כל 4 השאלות?

ג. בוחרים באקראי 4 שאלות שהתלמיד ענה עליהן נכון.
מהי ההסתברות שבשתיים מהן הוא ידע את התשובה ובשתיים מהן הוא ניחש?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

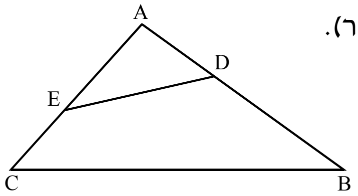
ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.

4. אלכסוני הריבוע ABCD נפגשים בנקודה O.
בנקודה O נמצא קדקוד של ריבוע אחר.
שתי צלעות של הריבוע האחר חותכות
את הצלעות AB ו- BC בנקודות P ו- T
בהתאמה (ראה ציור).



א. (1) הוכח כי אפשר לחסום במעגל
את המרובע OTBP.
(2) OB ו- PT נפגשים בנקודה K (ראה ציור).
הוכח כי $\Delta PKB \sim \Delta OKT$.
ב. הוכח כי $\Delta POB \cong \Delta TOC$.

5. במשולש ABC הנקודות D ו- E מונחות
על הצלעות AB ו- AC בהתאמה (ראה ציור).
נתון: $\measuredangle ADE = \measuredangle C = \gamma$, $\measuredangle AED = \measuredangle B = \beta$,
$BC = 5$ ס"מ , שטח המרובע
BCED הוא 4 סמ"ר.

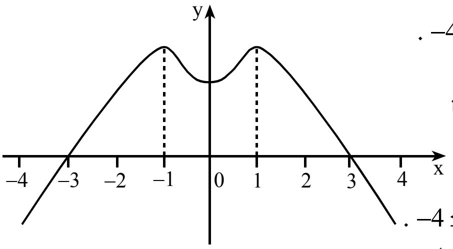


הראה כי $DE = \sqrt{25 - 8\left(\frac{1}{\tan\beta} + \frac{1}{\tan\gamma}\right)}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 8-6.

6. $f(x)$ היא פונקציה בתחום $-4 \le x \le 4$.
בציור שלפניך מוצגת סקיצת הגרף
של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום
$-4 \le x \le 4$.



א. שרטט סקיצה של גרף
הפונקציה $f''(x)$ בתחום $-4 \le x \le 4$.
ציין מספרים על ציר ה- x והסבר
את שיקוליך בשרטוט הגרף.
ב. נתון: $f(-3) = 0$, $f(4) > 0$.
(1) בתחום $-4 \le x \le 4$ רשום עבור הפונקציה $f(x)$ את:
שיעורי ה- x של נקודות הקיצון וסוגן.
שיעורי ה- x של נקודות הפיתול, ותחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$
וכלפי מטה $\cap$. נמק.
(2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 4$.
ציין מספרים על ציר ה- x , סמן את נקודות הפיתול ושרטט
את תחומי הקעירות.

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$.

א. מצא:

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.

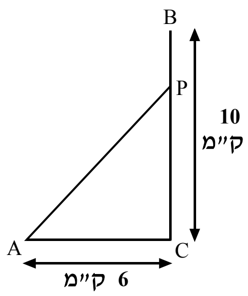
(2) אסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(3) השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת הקיצון הפנימית שלה.
השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי ציר ה- y , ועל ידי המשיק מסתובב סביב ציר ה- x . חשב את נפח גוף הסיבוב.

8. ג'יפ יוצא מנקודה A שבחולות, וצריך להגיע לנקודה B שעל הכביש הישר BC . מרחק הנקודה A מהכביש הוא 6 ק"מ $AC=$, ומרחק הנקודה C מהנקודה B הוא 10 ק"מ $BC=$ (ראה ציור).
מהירות הג'יפ בחולות היא v קמ"ש, ומהירותו בכביש היא $2.6v$ קמ"ש. נקודה P נמצאת על הכביש BC . באיזה מרחק מהנקודה C צריכה להימצא הנקודה P , כדי שזמן הנסיעה של הג'יפ במסלול APB (ראה ציור) יהיה הקצר ביותר?



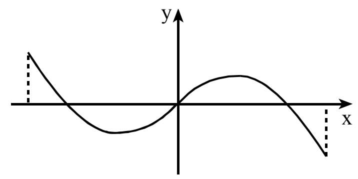
תשובות למבחן 10:

1. א. 196 ק"מ. ב. 84 קמ"ש.

2. א. 0 . ב. -637 .

3. א. $\frac{4}{5}$. ב. $0.1526 = \frac{625}{4096}$. ג. 0.1536 .

6. א.



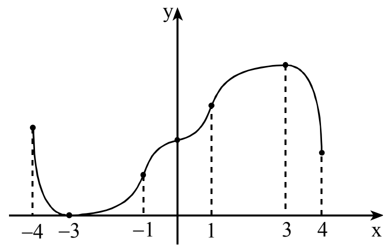
ב. (1) $x=-3$ מינימום, $x=4$ מינימום, $x=3$ מקסימום, $x=-4$ מקסימום.

נקודות פיתול: $x=-1$, $x=0$, $x=1$.

קעירות כלפי מעלה $\cup$: $-4<x<-1$ או $0<x<1$;

קעירות כלפי מטה $\cap$: $-1<x<0$ או $1<x<4$.

(2)

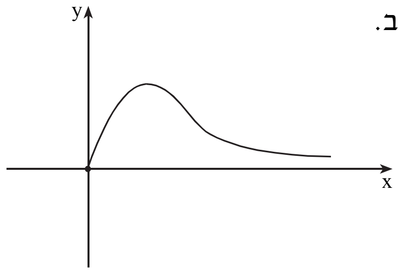


7. א. (1) תחום הגדרה: $x \geq 0$.

(2) $y=0$.

(3) $(0;0)$ מינימום; $(1;1)$ מקסימום.

ב.



ג. $\frac{1}{3}\pi$.

8. 2.5 ק"מ.

מבחן 11

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

1. במפעל לעיבוד מתכת יש שתי מכונות המייצרות ברגים, מכונה I ומכונה II. המפעל קיבל הזמנה לברגים. שתי המכונות עבדו יחד, וסיימו את ההזמנה ב- 30 שעות. אם מכונה I תייצר 30% מהכמות שהיא ייצרה עבור ההזמנה, ומכונה II תייצר $26\frac{2}{3}\%$ מהכמות שהיא ייצרה עבור ההזמנה, ייצרו המכונות בסך 480 ברגים.
אם מכונה I תייצר $\frac{2}{3}$ מהכמות שייצרה מכונה II עבור ההזמנה, ומכונה II תייצר 0.3 מהכמות שייצרה מכונה I עבור ההזמנה, תעבוד מכונה II במקרה זה 3 שעות פחות ממכונה I.
מצא כמה ברגים בשעה מייצרת כל אחת מהמכונות.
(קצב העבודה של כל אחת מהמכונות קבוע.)

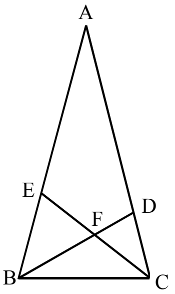
2. נתונה סדרה $\ldots, -20, 18, -16, 14, -12, 10$.
הסימנים של איברי הסדרה מתחלפים וערכיהם המוחלטים של האיברים מהווים סדרה חשבונית.
א. מצא נוסחה לסכום n האיברים הראשונים של הסדרה:
(1) אם n הוא מספר זוגי. (2) אם n הוא מספר אי-זוגי.
ב. מצא כמה איברים ישנם בסדרה:
(1) אם סכום הסדרה הוא 28. (2) אם סכום הסדרה הוא -24.

3. בעיר גדולה ידוע כי אם בוחרים באקראי 4 מהתושבים, ההסתברות שכל הארבעה קוראים ספרים הוא $\frac{81}{256}$.
ההסתברות לבחור באקראי תושב שרואה סרטים מבין אלה שקוראים ספרים גדולה פי $4\frac{1}{9}$ מההסתברות לבחור באקראי תושב שרואה סרטים מבין אלה שלא קוראים ספרים.
א. ידוע שתושב מהעיר רואה סרטים. מהי ההסתברות שהוא קורא ספרים?
ב. ידוע כי אם בוחרים באקראי 3 מתושבי העיר שאינם קוראים ספרים, אז ידוע כי ההסתברות ששלושתם אינם רואים סרטים היא $\frac{64}{125}$.
מהי ההסתברות שתושב בעיר קורא ספרים וגם רואה סרטים?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

4. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$,
CE הוא חוצה-זווית ACB.
D היא נקודה על AC, כך ש- $BD = BC$.
BD ו- CE נחתכים בנקודה F.
א. הוכח: $\Delta AEC \sim \Delta BFC$.
ב. נתון כי היקף המשולש AEC גדול פי 2 מהיקף המשולש BFC. הוכח כי BF הוא תיכון לצלע EC במשולש BEC.
ג. הוכח: שטח המשולש AEC גדול פי 4 משטח המשולש BEF.

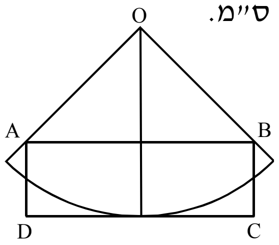


5. נתונה מקבילית שאורכי צלעותיה a ו- b, ואורכי אלכסוניה m ו- n.
נתון: $a^2-b^2=\frac{mn}{2}$.
חשב את הזווית החדה שבין אלכסוני המקבילית.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

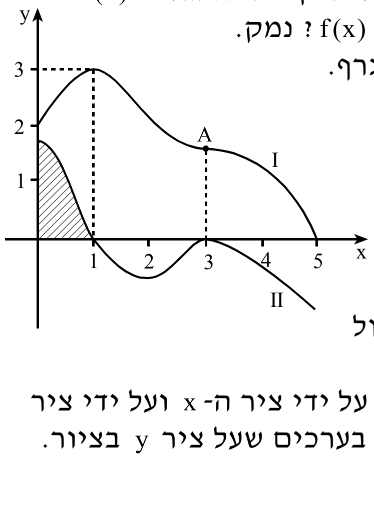
ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

6. נתונה גזרה של רבע עיגול שמרכזו O ורדיוסו 10 ס"מ.
בונים מלבן ABCD, כך שרבע המעגל משיק לצלע DC בנקודת האמצע שלה, והקדקודים A ו- B נמצאים על הרדיוסים התוחמים את הגזרה (ראה ציור). מבין כל האלכסונים של המלבנים ABCD שנוצרים באופן זה, מצא את אורך האלכסון הקצר ביותר.



7. נתונה הפונקציה $y=2x^2-\frac{a^3}{2x}$.
א. עבור $a>0$, מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):
(1) את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
(2) את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
(3) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
(4) את תחומי הקעירות של הפונקציה כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור $a>0$.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור $a<0$.
הסבר את שיקוליך בשרטוט הגרף.

8. בציור שלפניך מוצגים הגרפים I ו- II בתחום $0\le x\le 5$. אחד הגרפים הוא סקיצה של הפונקציה $f(x)$ והאחר של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
א. איזה גרף, I או II, הוא של הפונקציה $f(x)$? נמק.
ב. בנקודה A שעל גרף I העבירו משיק לגרף.
מהו שיפוע המשיק. נמק.
ג. (1) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f''(x)$ בתחום $0\le x\le 5$, אם נתון כי שיפוע הישר, המשיק לגרף II בנקודה שבה $x=0$, הוא אפס.
הסבר את שיקוליך בשרטוט הגרף.
(2) מהם שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של $f(x)$ בתחום $0<x<5$? נמק.



ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף II, על ידי ציר ה- x ועל ידי ציר ה- y (השטח המקווקו בציור). השתמש בערכים שעל ציר y בציור.

תשובות למבחן 11:

1. א. מכונה I: 32 ברגים בשעה. ב. מכונה II: 24 ברגים בשעה.

2. א. (1) $-n$. (2) $n+9$. ב. (1) 19. (2) 24.

3. א. $\frac{37}{40}$. ב. $\frac{37}{60}$.

4. ב. 2.

5. 60°.

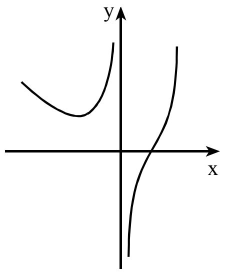
6. $\sqrt{80} = 8.94$ ס״מ ס״מ.

7. א. (1) $x = 0$. (2) $\left(\frac{a}{\sqrt[3]{4}};0\right)$. (3) $\left(\frac{-a}{2};1\frac{1}{2}a^2\right)$ מינימום.

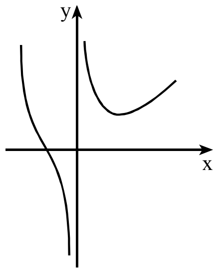
(4) קעירות כלפי מעלה $\cup$: $x > \frac{a}{\sqrt[3]{4}}$ או $x < 0$.

קעירות כלפי מטה $\cap$: $0 < x < \frac{a}{\sqrt[3]{4}}$.

ב. $a > 0$:



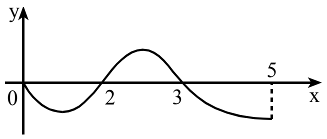
ג. $a < 0$:



8. א. גרף I הוא של $f(x)$.

ב. השיפוע הוא אפס.

ג. (1)



(2) $x = 2$, $x = 3$.

ד. 1.

מבחן 12

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

1. המרחק בין תחנת הרכבת A לתחנת הרכבת B הוא 240 ק"מ.
תחנה C נמצאת בין A ל- B, במרחק 90 ק"מ מ- A.
בשעה $7:00$ יוצאת רכבת משא מ- A ונוסעת ל- B במהירות קבועה.
בשעה $8:00$ יוצאת רכבת נוסעים מ- C ונוסעת ל- B במהירות קבועה, הגדולה ב- 20 קמ"ש מהמהירות של רכבת המשא.
א. ביום א' הגיעה רכבת הנוסעים לתחנה B לפני שהגיעה לשם רכבת המשא. היא הקדימה את רכבת המשא ביותר מחצי שעה.
באיזה תחום מספרים נמצאת המהירות של רכבת המשא ביום א'?
ב. למחרת הגיעה רכבת הנוסעים לתחנה B, בדיוק חצי שעה לפני שהגיעה ל- B רכבת המשא. באיזה מרחק מ- A הייתה רכבת המשא, כאשר רכבת הנוסעים הגיעה ל- B?

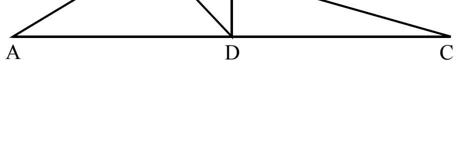
2. נתונה סדרה המוגדרת לכל n טבעי על-ידי: $a_1 = k$, $a_{n+1} = 4n - a_n$.
א. הבע את a_{n+2} באמצעות a_n.
ב. מספר האיברים בסדרה הנתונה הוא $2m$. הבע באמצעות k ו- m את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה.
ג. הראה כי סכום $2m$ האיברים בסדרה הנתונה אינו תלוי ב- k.

3. בעיר מסוימת יש 3 מועמדים לתפקיד ראש העיר: מועמד א', מועמד ב' ומועמד ג'. המצביעים לראש העיר הם צעירים ומבוגרים. למועמד א' הצביעו 30% מהמצביעים. למועמד ב' הצביעו 40% מהמצביעים.
למועמד ג' הצביעו שאר המצביעים. $\frac{1}{3}$ מבין המצביעים למועמד א' הם מבוגרים. $\frac{3}{5}$ מבין המצביעים למועמד ב' הם מבוגרים.
$\frac{1}{4}$ מבין המבוגרים הצביעו למועמד א'.
א. מהו אחוז הצעירים מבין המצביעים לראש העיר?
ב. מהו אחוז המצביעים שהם צעירים וגם מצביעים למועמד ב'?
ג. מהו אחוז המבוגרים מבין המצביעים למועמד ג'?

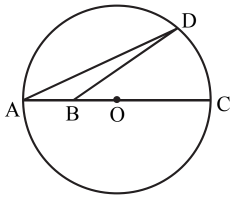
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על שתיים מבין השאלות 4-5.

4. במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע AC. דרך הנקודה D מעבירים אנך לצלע AC. האנך חותך את הצלע BC בנקודה E (ראה ציור). נתון: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBD = 2\alpha$, $\sphericalangle BCD = \alpha$.
א. הוכח כי $\sphericalangle BAE = \alpha$.
ב. הוכח:
(1) $\frac{BE}{BD} = \frac{AB}{DC}$.
(2) $\Delta ABD \sim \Delta BED$.
ג. חשב את α.



5. קטע AC הוא קוטר במעגל.
נקודה D נמצאת על מעגל זה,
ונקודה B נמצאת על הקוטר AC.
נסמן: $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle DBC = \beta$.



א. הבע באמצעות α ו- β את היחס
בין שטח המשולש ADB $(S_{\Delta ADB})$
לבין שטח המשולש ADC $(S_{\Delta ADC})$.
ב. מצא את β, אם $S_{\Delta ADB} = \frac{1}{2}S_{\Delta ADC}$ ו- $\alpha = 60^\circ$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות.

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

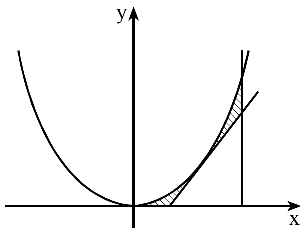
6. נתונה הפונקציה $f(x) = \cos^2 x - a^2 \cos x$, $a > \sqrt{2}$, בתחום $0 \le x \le 2\pi$.
א. בתחום הנתון מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):
(1) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x.
(2) את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.
(3) את התחום שבו פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חיובית, ואת התחום שבו $f'(x)$ שלילית. נמק.
ב. (1) על סמך תת-סעיף א(2) ותת-סעיף א(3), שרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום הנתון.
(2) נתון כי כל השטח בין הגרף של $f'(x)$ ובין ציר ה- x בתחום הנתון הוא 16. מצא את הערך של a.

7. הממוצע של פונקציה על קטע $[a;b]$ מוגדר על ידי הנוסחה $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

עבור איזה ערך של c יש לפונקציה $f(x) = (x^2 - 2x)^4(x-1)$

ממוצע קטן ביותר על הקטע $[0;c]$, $c > 0$?

8. מעבירים ישר המשיק לפרבולה $y = x^2$
בנקודה שבה $x = t$, $0 < t < 3$ (ראה ציור).



א. מצא את השטח המינימלי (ערך מספרי) המוגבל על ידי המשיק, על ידי הפרבולה, על ידי הישר $x = 3$ ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו בציור).
ב. השטח המוגבל על ידי הישר $x = 3$,
על ידי ציר ה- x ועל ידי המשיק המתקבל עבור השטח המינימלי שמצאת בסעיף א', מסתובב סביב ציר ה- x.
מצא את הרדיוס של בסיס החרוט שנוצר.

תשובות למבחן 12:

1. א. בין 0 קמ"ש ל- 80 קמ"ש. **ב.** 200 ק"מ.

2. **א.** $a_{n+2}=a_n+4$. **ב.** $m(k+2m-2)$.

3. א. 60% . **ב.** 16% . **ג.** 20% .

4. ג. 15° .

5. **א.** $\frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta ADC}}=\frac{\sin(\beta-\alpha)\cos\alpha}{\sin\beta}$ **ב.** $\beta=120^\circ$.

6. א. **(1)** $(\frac{1}{2}\pi;0)$, $(1\frac{1}{2}\pi;0)$.

(2) $(0;1-a^2)$ מינימום מוחלט,

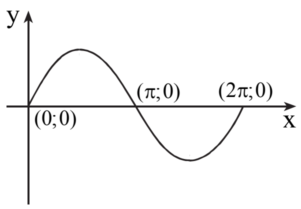
$(2\pi;1-a^2)$ מינימום מוחלט,

$(\pi;1+a^2)$ מקסימום מוחלט.

(3) $f'(x)$ חיובית : $0<x<\pi$.

$f'(x)$ שלילית : $\pi<x<2\pi$.

ב. **(1)**



(2) $a=2$.

7. $c=\frac{8}{9}$.

8. א. 1 . **ב.** 8 .

מבחן 13

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

1. רוכב אופניים יצא בשעה 08:00 מעיר A, ורוכב אופניים שני יצא בשעה 09:00 מעיר A. כל אחד מהרוכבים רכב במהירות קבועה לעיר B.
המרחק בין A ל- B הוא 45 ק"מ. כאשר הרוכב הראשון הגיע לעיר B, הרוכב השני עדיין לא הגיע לעיר B והיה במרחק של 25 ק"מ ממנה.
מהירות הרוכב הראשון גדולה ב- m קמ"ש ממהירות הרוכב השני, וידוע כי $0<m<5$.
א. הבע באמצעות m את שני הפתרונות האפשריים למהירות הרוכב השני.
ב. נסמן את שני הפתרונות שהבעת בסעיף א' ב- x_1 וב- x_2.
מצא עבור אילו ערכי m מתקיים $|x_1-x_2|<11$.

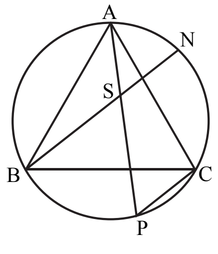
2. א. מצא את סכום כל המספרים הדו-ספרתיים שמתחלקים ב- 3 וגם ב- 5 ללא שארית.
ב. מצא את סכום כל המספרים הדו-ספרתיים שמתחלקים ב- 3 או ב- 5 ללא שארית.
ג. מצא את סכום כל המספרים הדו-ספרתיים שאינם מתחלקים ב- 3 ואינם מתחלקים ב- 5 ללא שארית.

3. ידוע כי בכפר מסוים 20% מהתושבים חולים במחלת מעיים.
רופא הכפר בדק את כל התושבים. 90% מהחולים בכפר אובחנו על ידו כחולים, ו- 10% מהבריאים בכפר אובחנו על ידו כחולים.
א. מהו אחוז התושבים בכפר שלגביהם הרופא ביצע אבחנה שגויה?
הרופא נתן תרופה לכל מי שאובחן על ידו כחולה.
התרופה גרמה לפריחה אצל 60% מהחולים שאובחנו כחולים, ואצל 25% מהבריאים שאובחנו כחולים.
ב. מהי ההסתברות שתושב בכפר הוא חולה, אם ידוע שיש לו פריחה?

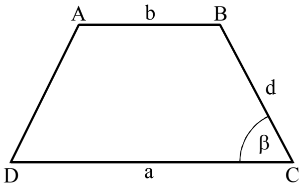
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

4. ABC הוא משולש שווה-צלעות החסום במעגל.
N ו- P הן נקודות על המעגל.
BN ו- AP נפגשים בנקודה S (ראה ציור).
נתון: $BN \parallel PC$. הוכח כי:
א. המשולש BSP הוא שווה-צלעות.
ב. המרובע SPCN הוא מקבילית.
ג. $AN = PC$.



5. בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ $(AB \parallel DC)$
אורך הבסיס הגדול CD הוא a ,
אורך הבסיס הקטן AB הוא b
ואורך השוק הוא d .
הזווית ליד הבסיס הגדול DC
היא β (ראה ציור).

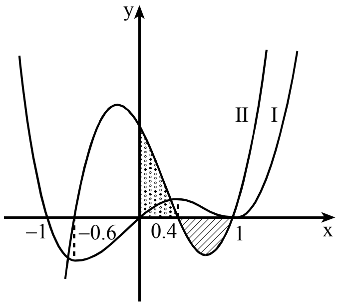


א. הוכח כי אורך אלכסון הטרפז הוא $\sqrt{ab+d^2}$.
ב. הזווית בין אלכסון הטרפז ובין הבסיס הגדול של הטרפז היא α .
הוכח כי אם $\alpha+\beta=90^\circ$, אז $\sqrt{\frac{a^2-ab}{2b^2}}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

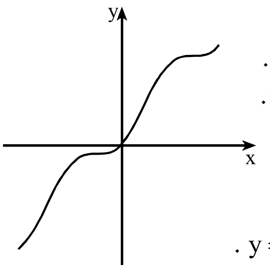
ענה על שתיים מבין השאלות 8-6.

6. בציור שלפניך מוצגות סקיצות
של שני גרפים: גרף I וגרף II .
אחד הגרפים הוא הגרף של פונקציית
הנגזרת $f'(x)$, והגרף האחר הוא הגרף
של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.



א. איזה גרף הוא של $f'(x)$,
ואיזה גרף הוא של $f''(x)$? נמק.
ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון
של הפונקציה $f(x)$. נמק.
ג. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$. נמק.
ד. הוכח שהשטח המוגבל על ידי גרף II וציר ה- x (השטח המקווקו בציור)
שווה לשטח המוגבל על ידי גרף II והצירים (השטח המנוקד בציור).

7. נתונה הפונקציה $f(x)=x-\frac{\sin(2x)}{2}$.
א. הראה כי $f'(x)=2\sin^2 x$.
ב. (1) האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.
(2) האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול? נמק.
ג. בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה
$g(x)=x+\sin^2 x$ בתחום $-\pi\le x\le\pi$.
בתחום הנתון מצא את כל השטח
המוגבל על ידי הגרף של $g(x)$ ועל ידי הישר $y=x$.



8. נתון משולש שאחת מצלעותיו היא 10 ס״מ, וגובה המשולש לצלע זו
הוא 5 ס״מ (המשולש אינו קהה-זווית).
א. מבין כל המשולשים שהם כאלה, מצא את צלעות המשולש
שהיקפו מינימלי.
ב. מה הן תכונות המשולש שאת צלעותיו מצאת בסעיף א׳?

תשובות למבחן 13:

1. א. $x_1 = \frac{25-m+\sqrt{m^2-130m+625}}{2}$, $x_2 = \frac{25-m-\sqrt{m^2-130m+625}}{2}$.

ב. $4 < m < 5$.

2. א. 315 . ב. 2295 . ג. 2610 .

3. א. 10% . ב. $\frac{27}{32}$.

6. א. גרף I – $f'(x)$, גרף II – $f''(x)$.

ב. $x = 0$ מינימום, $x = -1$ מקסימום.

ג. $x = 1$, $x = 0.4$, $x = -0.6$.

7. ב. (1) לא. (2) כן. ג. π .

8. א. 10 ס״מ, $5\sqrt{2}$ ס״מ, $5\sqrt{2}$ ס״מ.

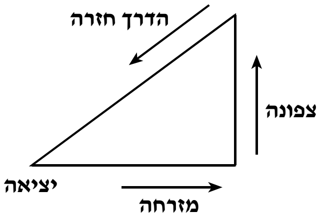
ב. המשולש הוא ישר זווית ושווה-שוקיים.

מבחן 14

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

1. הולך רגל יוצא כל בוקר להליכה לאורך מסלול שאורכו הכולל הוא 24 ק"מ.
הוא יוצא מביתו לכיוון מזרח והולך m ק"מ.
אחר כך הוא פונה צפונה והולך 1.5 שעות.
לאחר מכן הוא חוזר לביתו בדרך הקצרה ביותר (ראה ציור). בדרכו חזרה הוא הולך 60 דקות פחות מהזמן שבו הוא הולך בשני הכיוונים יחד, מזרחה וצפונה.
בכל קטעי הדרך הוא הולך באותה מהירות קבועה.
חשב את m.



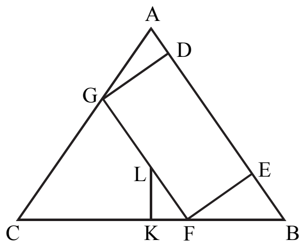
2. נתונה סדרה הנדסית שכל n האיברים שלה הם חיוביים. סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים.
א. חשב את מנת הסדרה.
ב. נתון כי n הוא מספר זוגי. נסמן: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$
$T_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots - a_n$
($a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ הם איברי הסדרה הנתונה). חשב את היחס $\frac{S_n}{T_n}$.

3. בשכבה י"א יש שתי כיתות: י"א 1 ו-י"א 2.
בכיתה י"א 1 יש 40 תלמידים, ולמחציתם יש מחשב נישא.
בכיתה י"א 2 יש 35 תלמידים, ול- 40% מהם יש מחשב נישא.
א. בחרו באקראי תלמיד משכבה י"א, ונמצא שיש לו מחשב נישא.
מהי ההסתברות שהוא לומד בכיתה י"א 2?
ב. בחרו באקראי בזה אחר זה (בלי החזרה) 2 תלמידים מכיתה י"א-1, ובאותו אופן בחרו 2 תלמידים מכיתה י"א 2.
מהי ההסתברות של- 2 התלמידים מכיתה י"א 1 וגם ל- 2 התלמידים מכיתה י"א 2 אין מחשב נישא?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.

.4 במשולש שווה-שוקיים ABC $(AC = AB)$ חסום מלבן $GFED$ כך שהקדקודים D ו- E מונחים על הצלע AB, והקדקודים F ו- G מונחים על הצלעות BC ו- CA בהתאמה. נקודה L, הנמצאת על צלע המלבן GF, היא מפגש התיכונים במשולש ABC. דרך הנקודה L העבירו אנך לצלע BC, החותך את BC בנקודה K (ראה ציור).



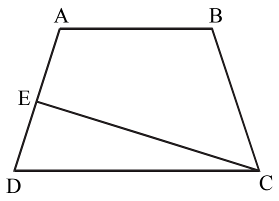
א. הוכח: $\Delta KAB \sim \Delta KLF \sim \Delta EFB$.

אם נתון: $BC = 18$ ס"מ, $AB = 15$ ס"מ, חשב:

ב. את אורך הקטע KF. נמק.

ג. את אורך הקטע FE. נמק.

.5 בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ הזווית שליד הבסיס הגדול היא α.
E היא נקודה על השוק AD כך ש- $\sphericalangle ECD = \beta$ (ראה ציור).
נתון כי אורך השוק של הטרפז שווה לאורך הבסיס הקטן AB.



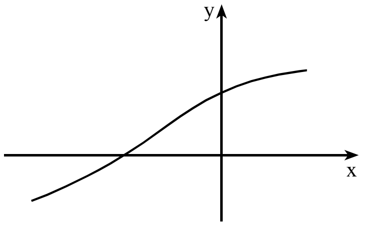
א. הבע באמצעות α ו- β את היחס בין שטח המשולש DEC לשטח המשולש BDC $\left(\frac{S_{\Delta DEC}}{S_{\Delta BDC}}\right)$.

ב. נתון: $\sphericalangle AEC = 90°$, אורך האלכסון הטרפז גדול פי 1.5 מאורך הבסיס הקטן AB.
חשב את היחס $\frac{S_{\Delta DEC}}{S_{\Delta BDC}}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

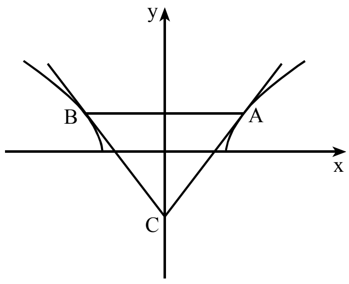
ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 8-6.

.6 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}}$ בחלק מהתחום $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (ראה ציור).
מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- y.
מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x.



7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-a}{x-b}$; $a , b > 0$; $a \neq b$.
המשיקים לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם הצירים מקבילים זה לזה.
א. הוכח כי $a = 2b$.
הצב $a = 2b$, וענה על הסעיפים ב-ז (הבע באמצעות b במידת הצורך).
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.
ג. מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה). נמק.
ד. מצא נקודות חיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
ה. מצא תחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$.
ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ז. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $b < 0$.
נמק את שיקוליך בשרטוט הגרף עבור תחומי עלייה וירידה
ועבור תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה.

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2-24}$.
העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה
בנקודה A שבה $x = t$. מנקודה A
העבירו ישר המקביל לציר ה- x
וחותך את גרף הפונקציה בנקודה B .
בנקודה B העבירו עוד משיק לגרף
הפונקציה. המשיקים נפגשים בנקודה C
שעל ציר ה- y (ראה ציור).
א. הראה כי הפונקציה זוגית.
ב. מצא את שטח המינימלי של המשולש ABC .



תשובות למבחן 14:

1. $m=8$.

2. **א.** 2 . **ב.** -3 .

3. $\frac{7}{17}=0.4118$, $\frac{19}{221}=0.086$.

4. **ב.** 3 ס"מ. **ג.** 4.8 ס"מ.

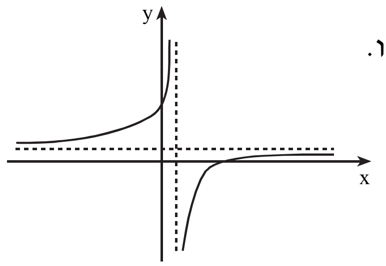
5. **א.** $\frac{\sin 1\frac{1}{2}\alpha \sin\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin(\alpha+\beta)}=\frac{(1+2\cos\alpha)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **ב.** 0.1562 .

6. $3-2\sqrt{2}=0.1716$.

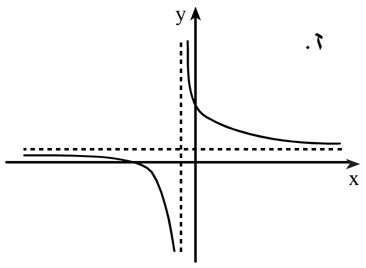
7. **ב.** $x=b$, $y=1$. **ג.** עלייה: $x>b$ או $x<b$; ירידה: אין. **ד.** $(0;2)$, $(2b;0)$.

ה. $\cup$: $x<b$; $\cap$: $x>b$.

ו.



ז.



8. **ב.** $\frac{216}{\sqrt{12}}=62.35$.

מבחן 15

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

1. שני צינורות, צינור I וצינור II, ממלאים יחד במים את כל הנפח של בריכה במשך 6 שעות (קצב הזרמת המים של כל אחד מהצינורות אינו משתנה).
יום אחד, צינור I מילא לבדו רבע מנפח הבריכה, וצינור II מילא לבדו עוד רבע מנפח הבריכה, וכך התמלא חצי מנפח הבריכה במשך m שעות.
א. (1) הבע באמצעות m את הזמן הדרוש לצינור I למלא את כל נפח הבריכה לבדו.
(2) מצא עבור איזה ערך של m יש פתרון אחד לבעיה.
ב. נתון כי כאשר כמות המים בבריכה היא 70% מנפח הבריכה, צינור I ממלא לבדו את נפח הבריכה הנותר במשך 3 שעות.
מצא את m במקרה זה.

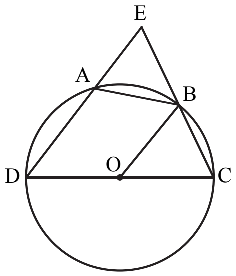
2. בסדרה הנדסית מספר זוגי של איברים. סכום כל האיברים בסדרה הוא 2550, וסכום כל האיברים שבמקומות הזוגיים הוא 1700.
האיבר השלישי בסדרה גדול ב- 10 מסכום שני האיברים הראשונים.
כמה איברים בסדרה?

3. בוחרים באקראי 3 אנשים מעיר גדולה. ההסתברות ששלושתם הם בעלי השכלה גבוהה היא 0.064. ההסתברות לבחור באקראי אדם שמרכיב משקפיים מבין בעלי ההשכלה הגבוהה בעיר קטנה פי 2 מההסתברות לבחור באקראי אדם שמרכיב משקפיים מבין אלו שאינם בעלי השכלה גבוהה.
א. ידוע שאדם מהעיר מרכיב משקפיים.
מהי ההסתברות שהוא בעל השכלה גבוהה?
ב. בוחרים באקראי 4 אנשים מבין תושבי העיר שאינם בעלי השכלה גבוהה. ההסתברות שארבעתם אינם מרכיבים משקפיים היא $\frac{81}{256}$.
מהי ההסתברות שאדם בעיר מרכיב משקפיים והוא גם בעל השכלה גבוהה?

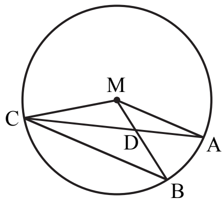
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

4. במעגל שמרכזו O חסום מרובע $ABCD$.
DC הוא קוטר. המשכי הצלעות DA ו- CB
נפגשים בנקודה E (ראה ציור).
נתון: $OB \parallel DE$, $\sphericalangle BOC = \alpha$.
א. הבע באמצעות α את $\sphericalangle ABO$.
ב. נתון כי שטח המשולש OBC
שווה לשטח המשולש BEA.
הוכח כי $\Delta OBC \cong \Delta BEA$.



5. A , B ו- C הן נקודות על מעגל שמרכזו M.
AC ו- BM נחתכים בנקודה D (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle CBM = 2\sphericalangle ACB$,
שטח המשולש CBD גדול פי 1.5
משטח המשולש CDM.
חשב את $\sphericalangle CBM$.



פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות.

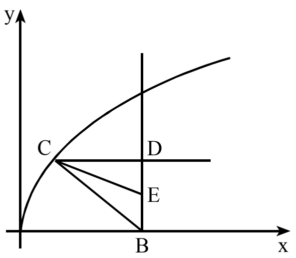
ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x-b)^2}{x^2-4}$, $b>2$.
א. מצא (הבע באמצעות b במידת הצורך):
(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה, ואת האסימפטוטות שלה המקבילות לצירים.
(2) את השיעורים של נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
(3) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. על פי הסקיצה של גרף הפונקציה, מצא את התחום שבו פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית וגם פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ שלילית,
אם ידוע כי ל- $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד. נמק.

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ בתחום $-3\pi \le x \le 3\pi$.

א. הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.
ב. מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה בתחום הנתון.
ג. לפונקציה יש שלוש נקודות מקסימום בתחום הנתון.
מצא את השיעורים של נקודות אלה.
ד. העבירו ישר דרך נקודות המקסימום של הפונקציה.
מצא בתחום $-\pi \le x \le \pi$ את השטח המוגבל על ידי הישר, על ידי גרף הפונקציה, על ידי שתי האסימפטוטות של הפונקציה ועל ידי ציר ה- x .

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$, $a>0$.
מנקודה $B(b;0)$ ($b>0$) העבירו אנך לציר ה- x .
C היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה $f(x)$.
מנקודה C העבירו ישר המקביל לציר ה- x
וחותך את האנך בנקודה D . הנקודה E
היא אמצע הקטע BD (ראה ציור) .
נתון כי עבור $C(2;4)$ שטח המשולש CBE
הוא מקסימלי.
מצא את הערך של a ואת הערך של b .



תשובות למבחן 15:

1. א. **(1)** $2m\pm2\sqrt{m^2-6m}$. הפתרון קיים בתנאי ש- $m\geq6$. **(2)** $m=6$. ב. $m=6.25$.

2. 8 .

3. א. 0.25 . ב. 0.05 .

4. א. $90^\circ-\frac{\alpha}{2}$.

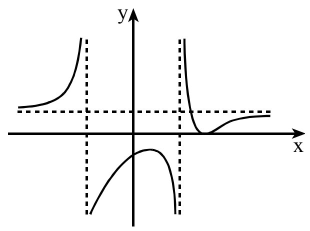
5. 41.41° .

6. א. **(1)** תחום הגדרה: $x\neq2$, $x\neq-2$.

אסימפטוטות: $x=2$, $x=-2$, $y=1$.

(2) $(b;0)$, $\left(0;-\frac{b^2}{4}\right)$. **(3)** $(b;0)$ מינימום, $\left(\frac{4}{b};\frac{4-b^2}{4}\right)$ מקסימום.

ב.



ג. $\frac{4}{b}<x<2$.

7. ב. $x=3\pi$, $x=\pi$, $x=-\pi$, $x=-3\pi$. ג. $\left(2\pi;\frac{1}{2}\right)$, $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-2\pi;\frac{1}{2}\right)$. ד. 2 .

8. $a=8$, $b=6$.

מבחן 16

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

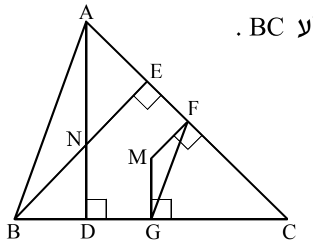
1. רוכב אופניים אחד יצא ממקום A אל מקום B, ובאותה שעה בדיוק יצא רוכב אופניים אחר ממקום B אל מקום A.
כעבור 4 שעות נפגשו רוכבי האופניים. הזמן, שנדרש לרוכב האופניים שיצא מ-A לעבור את הדרך שבין A ל-B, גדול ב-108 דקות מהזמן שנדרש לרוכב האופניים שיצא מ-B לעבור דרך זו.
א. מצא את היחס בין המהירות של רוכב האופניים שיצא מ-B לבין המהירות של רוכב האופניים שיצא מ-A.
ב. מצא בכמה שעות עבר כל אחד מרוכבי האופניים את הדרך שבין A ל-B.

2. נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים $(n>1)$.
האיבר הראשון בסדרה הוא a_1 (שונה מאפס), והפרש הסדרה הוא d.
בונים סדרה חדשה שגם בה n איברים.
האיבר הראשון בסדרה החדשה גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה הנתונה, והפרש הסדרה החדשה גם הוא d.
סכום הסדרה החדשה גדול פי 2 מסכום הסדרה הנתונה.
א. בטא את a_1 באמצעות d ו-n.
ב. אם מגדילים את הפרש הסדרה הנתונה ב-3 (בלי לשנות את a_1 ואת n), מקבלים סדרה חשבונית שסכומה גדול פי 2 מסכום הסדרה הנתונה. הראה כי הפרש הסדרה הנתונה הוא 2.

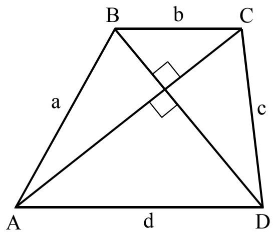
3. באחד הדוכנים בלונה פארק אפשר להשתתף במשחק שבו מסובבים שני גלגלים, A ו-B. כל גלגל מחולק ל-20 גזרות שוות (לכל אחת מהגזרות יש אותה הסתברות שהגלגל ייעצר עליה, והגלגל אינו אינו נעצר בגבול שבין הגזרות).
בגלגל A יש 2 גזרות אדומות והשאר שחורות.
בגלגל B יש 4 גזרות אדומות והשאר שחורות.
תור אחד במשחק מורכב משני שלבים:
בשלב הראשון: משתתף במשחק מסובב את הגלגל A.
בשלב השני: אם הגלגל A נעצר על גזרה אדומה בשלב הראשון, המשתתף מסובב את הגלגל B. אם הגלגל A נעצר על גזרה שחורה בשלב הראשון, המשתתף מסובב שוב את הגלגל A.
א. ידוע שבתור אחד בשלב הראשון נעצר הגלגל A על גזרה אדומה. מהי ההסתברות שבתור זה התקבלה בשלב השני גזרה שחורה?
ב. (1) מהי ההסתברות שבתור אחד תתקבל לפחות גזרה אדומה אחת?
(2) אם ידוע כי בתור אחד הייתה לפחות אחת מהגזרות אדומה, מהי ההסתברות שבתור זה התקבלה רק גזרה אדומה אחת?
ג. משתתף משחק n תורות.
הבע באמצעות n את ההסתברות שלא תתקבל כלל גזרה אדומה.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על אחת מבין השאלות 4-5.



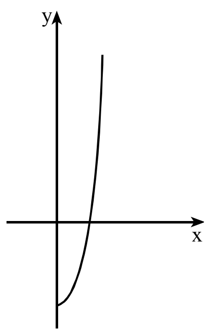
4. נתון משולש ABC חד-זוויות.
BE הוא גובה לצלע AC, ו- AD הוא גובה לצלע BC.
הגבהים נפגשים בנקודה N.
FM הוא אנך אמצעי לצלע AC,
ו- GM הוא אנך אמצעי לצלע BC (ראה ציור).
א. הוכח:
(1) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle GFC$.
(2) $\sphericalangle ABN = \sphericalangle MFG$.
(3) $\Delta ANB \sim \Delta GMF$.
ב. מצא את היחס $\frac{BN}{FM}$. נמק.



5. בטרפז $ABCD$ $(AD \| BC)$ נתון: $AC \perp BD$
$CD = c$, $BC = b$, $AB = a$, $AD = d$, $(d > b)$.
אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה O.
א. הוכח: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.
ב. דרך קדקוד B מעבירים ישר
המקביל לשוק CD. הישר חותך
את הבסיס AD בנקודה M.
נתון: $\sphericalangle ABM = \alpha$. הוכח: $\cos\alpha = \frac{bd}{ac}$.
ג. הבע באמצעות d, b ו- α: (1) את שטח המשולש ABM.
(2) את שטח הטרפז $ABCD$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

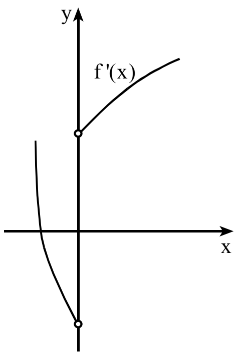
ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.



6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8}{x+2}$, $x \neq -2$.
א. בציור מוצגת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$
עבור $x \geq 0$. מעבירים ישר המשיק לגרף
הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 1$.
מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$,
על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y עבור $x \geq 0$.
ב.(1) מצא תחומי עלייה וירידה
של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה),
עבור כל תחום ההגדרה של הפונקציה.
(2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור כל תחום
ההגדרה שלה.
ג. נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x)|$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = 2 - \cos x - \sin^2 x$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.
עבור התחום הנתון ענה על סעיפים א׳-ד׳:
א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
ב. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
ג. (1) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
(2) שרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (הפונקציה $f(x)$ גזירה גם בקצות התחום הנתון).
(3) מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $-\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3}$.
ד. נתון כי גרף הפונקציה $g(x) = a - \cos x - \sin^2 x$ משיק לציר x בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד. מהו הערך של a? נמק.

8. $f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$. בציור מוצג הגרף של $f'(x)$.
$f(x)$ היא פונקציה רציפה המוגדרת בתחום $x \ge -4$.
נתון: $f'(x) = \frac{6x^2 + 16x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}}$.



א. מצא את תחום ההגדרה של $f'(x)$.
ב. מצא את האסימפטוטה האנכית של $f'(x)$.
ג. מצא את שיעור ה- x של נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$. נמק.
ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$. נמק.
ה. נתון: $f(a) = 4\sqrt{3}$, $-2\frac{2}{3} < a < 0$.
השטח, המוגבל על ידי הגרף של $f'(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = a$, הוא $\frac{28\sqrt{3}}{9}$.
מצא את ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה.
אין צורך למצוא את $f(x)$, ואין צורך למצוא את a.
בתשובתך תוכל להשאיר $\sqrt{3}$ או לדייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

תשובות למבחן 16:

1. א. 1.25 . ב. הרוכב שיצא מ- A : 9 שעות. הרוכב שיצא מ- B : 7.2 שעות.

2. א. $a_1 = \frac{d(n-1)}{4}$.

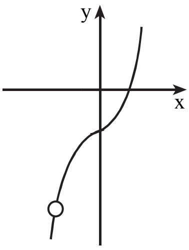
3. א. 0.8 . ב. (1) 0.19 . (2) $\frac{17}{19}$. ג. 0.81^n .

4. ב. 2 .

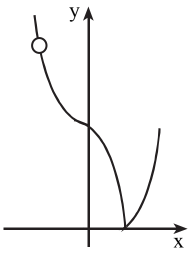
5. ג. (1) $\frac{bd\tan\alpha}{2}$. (2) $\frac{bd(d+b)\tan\alpha}{2(d-b)}$.

6. א. $1\frac{1}{2}$.

ב. (1) עלייה: $x > -2$ או $x < -2$; ירידה: אף x . (2)



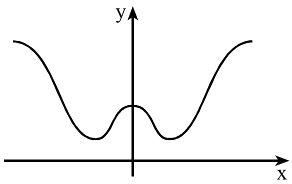
ג.



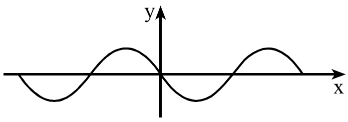
7. א. $(0;1)$. ב. $(\pi;3)$ מקסימום מוחלט, $(-\pi;3)$ מקסימום מוחלט.

$(\frac{\pi}{3};\frac{3}{4})$ מינימום מוחלט, $(-\frac{\pi}{3};\frac{3}{4})$ מינימום מוחלט.

ג. (1)



(2)



(3) $\frac{1}{2}$.

ד. $a = 1$.

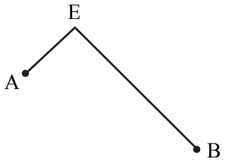
8. א. $x > -4$, $x \neq 0$. ב. $x = -4$. ג. $-2\frac{2}{3}$.

ד. עלייה: $-4 < x < -2\frac{2}{3}$ או $x > 0$; ירידה: $-2\frac{2}{3} < x < 0$. ה. $\frac{64\sqrt{3}}{9} = 12.317$.

מבחן 17

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.



1. רוכב אופניים רכב מעיר A לעיר B.
במסלול שבין שתי הערים יש תחילה עלייה ואחר כך ירידה (ראה ציור).
מהירות הרוכב בירידה היא קבועה, וגדולה ב- 10 קמ"ש ממהירותו בעלייה.
הרוכב עבר את הדרך מ- A ל- B ב- 4.5 שעות. בדרך חזור עבר הרוכב את הדרך מ- B ל- A ב- 6 שעות.
מהירות הרוכב בעלייה שבדרך מ- A ל- B שווה למהירות הרוכב בעלייה שבדרך מ- B ל- A, וגם מהירות הרוכב בירידה בכל אחת מהדרכים היא אותה מהירות.
אורך המסלול בין שתי הערים הוא 70 ק"מ.
א. מצא את מהירות הרוכב בעלייה.
ב. מצא את אורך המסלול מ- E ל- B.

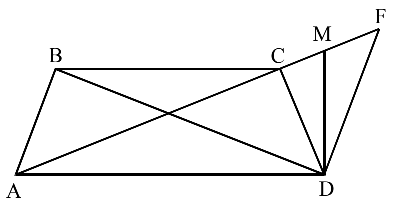
2. a_n ו- a_k הם שני איברים בסדרה חשבונית במקום ה- n ובמקום ה- k בהתאמה. הפרש הסדרה הוא d, והאיבר הראשון בסדרה הוא $a_1 = md$,
m – מספר טבעי, $d \neq 0$.
א. (1) הראה כי מתקיים $a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2)$.
(2) הבע באמצעות n, k ו- m את המקום בסדרה של איבר השווה לסכום של שני האיברים a_n ו- a_k.
ב. (1) הבע באמצעות a_1, d ו- m את הסכום $a_{34} + a_{65}$.
(2) נתון: $a_{34} + a_{65} = a_{109}$, סכום 79 האיברים הראשונים בסדרה הוא 7900. מצא את d ואת a_1.

3. ברשותנו שתי קוביות משחק הנראות זהות. קובייה אחת מאוזנת והאחרת לא מאוזנת. בהטלת הקובייה המאוזנת ההסתברות לקבל אחד מהמספרים הרשומים על פאות הקובייה היא אותה הסתברות עבור כל אחד מהמספרים.
בהטלת הקובייה הלא-מאוזנת ההסתברות לקבל את המספר שש היא $\frac{1}{3}$.
א. (1) זורקים 3 פעמים את הקובייה המאוזנת.
מהי ההסתברות לקבל בדיוק 2 פעמים את המספר שש?
(2) זורקים 3 פעמים את הקובייה הלא-מאוזנת.
מהי ההסתברות לקבל בדיוק 2 פעמים את המספר שש?
ב. בוחרים באקראי אחת משתי הקוביות, וזורקים 3 פעמים את הקובייה שבוחרים.
(1) מהי ההסתברות לקבל בדיוק 2 פעמים את המספר שש?
(2) ידוע כי המספר שש התקבל בדיוק 2 פעמים.
מהי ההסתברות שנבחרה הקובייה הלא-מאוזנת?
ג. זורקים n פעמים את הקובייה הלא-מאוזנת. הבע באמצעות n את ההסתברות לקבל לפחות פעם אחת את המספר שש.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

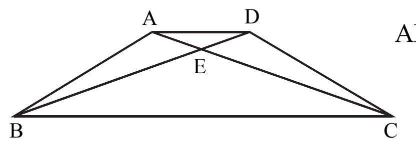
ענה על אחת מבין השאלות 4-5.

4. נתון טרפז שווה-שוקיים $ABCD$ $(BC \parallel AD)$.
דרך הקדקוד D העבירו אנך ל- AD וישר המקביל לשוק AB.
האנך חותך את המשך האלכסון AC בנקודה M,
והישר המקביל חותך את המשך
האלכסון בנקודה F (ראה ציור).



נסמן: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CAD = \beta$.
א. הוכח כי: $\Delta ABC \sim \Delta FDA$.
ב. הוכח כי: $\sphericalangle CDM = \sphericalangle MDF$.
ג. הוכח כי: $\frac{AC}{AF} = \frac{MC}{MF}$.

5. בציור שלפניך טרפז שווה-שוקיים $ABCD$ $(AD \parallel BC)$.
נתון: $\sphericalangle CAD = \alpha$, $\sphericalangle BDC = \beta$.



א. הוכח: היחס בין שטח המשולש AED
לשטח המשולש BEC
הוא $\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta BEC}} = \frac{\sin^2(2\alpha+\beta)}{\sin^2\beta}$.
ב. הוכח: היחס בין שטח המשולש BCD
לשטח המשולש ABE הוא $\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta ABE}} = \frac{2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin(2\alpha+\beta)}$.
ג. נתון גם: $\alpha = 30^\circ$, $\sqrt{\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta BEC}}} = \frac{1}{4}$. מצא את β.

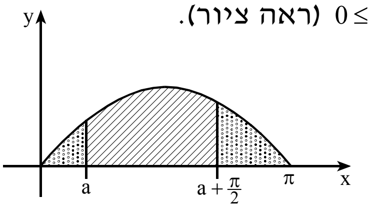
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+6x+12}{x^2-6x+a}$, a הוא פרמטר.
נתון כי הפונקציה אינה מוגדרת רק עבור ערך אחד של x.
א. מצא את הערך של a.

הצב את הערך של a שמצאת, וענה על הסעיפים ב׳-ג׳.
ב. (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.
(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
(4) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ג. (1) מצא את האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המקבילות לצירים.
(2) שרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נמק.

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\sin x$ בתחום $0\le x\le \pi$ (ראה ציור).



מעבירים שני ישרים שמשוואותיהם :
$x=a$, $x=a+\frac{\pi}{2}$, ($0<a<\frac{\pi}{2}$).
S_1 הוא השטח המוגבל על ידי שני הישרים, על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו בציור).
S_2 הוא סכום של שני שטחים, שכל אחד מהם מוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי אחד הישרים ועל ידי ציר ה- x (סכום השטחים המנוקדים בציור).
מצא עבור איזה ערך של a היחס $\frac{S_1}{S_2}$ הוא מקסימלי.

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-15}}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
ג. על סמך סעיפים א׳ ו-ב׳ שרטט סקיצה של גרף הפונקציה,
אם נתון כי הפונקציה יורדת בכל התחום שבו היא מוגדרת.
ד. נתון כי הישר $y=-kx+8k$, $k>0$, אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$.
הישר מחלק את השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,
על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=4$ ו- $x=8$, לשני שטחים שווים.
מצא את הערך של k .

תשובות למבחן 17:

1. א. 10 קמ"ש. ב. 50 ק"מ.

2. א. (2) $n+k+m-1$. ב. (1) $a_1+(97+m)d$. (2) $d=2$, $a_1=22$.

3. א. (1) $\frac{5}{72}$. (2) $\frac{2}{9}$. ב. (1) $\frac{7}{48}$. (2) $\frac{16}{21}$. ג. $1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

5. ג. $\beta=106.1^\circ$.

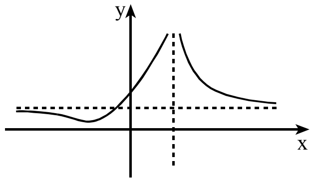
6. א. $a=9$. ב. (1) $x=3$, $y=1$.

(2) $(0;1\frac{1}{3})$.

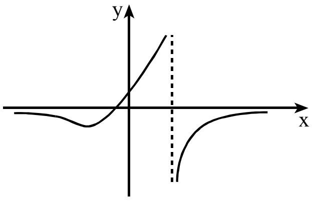
(3) עלייה: $-3.5<x<3$;

ירידה: $x>3$ או $x<-3.5$.

(4)



ג. (1) $x=3$, $y=0$. (2)

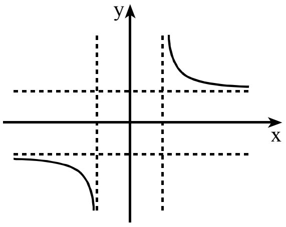


7. $a=\frac{\pi}{4}$. הערה: שים לב שכאשר S_1 הוא מקסימלי, היחס $\frac{S_1}{S_2}$ הוא מקסימלי.

8. א. $x>\sqrt{15}$ או $x<-\sqrt{15}$.

ב. $x=\sqrt{15}$, $x=-\sqrt{15}$, $y=1$, $y=-1$.

ג.



ד. $k=\frac{3}{8}$.

מבחן 18

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

1. נהג יצא מעיר A לכיוון עיר B. המרחק בין שתי הערים הוא 120 ק"מ.
בהתחלה נסע הנהג במהירות קבועה כפי שתכנן, אבל כעבור $\frac{3}{4}$ שעה
מתחילת נסיעתו הייתה תקלה ברכבו. הנהג חזר מיד לכיוון A,
ונסע 10 ק"מ במהירות של 50 קמ"ש עד למוסך הנמצא בדרך ל- A.
המוסך טיפל בתקלה במשך 33 דקות, ומיד לאחר הטיפול יצא הנהג
לכיוון B במהירות הקטנה ב- 10 קמ"ש ממהירות נסיעתו עד התקלה.
הוא הגיע ל- B באיחור של שעה אחת לעומת השעה המתוכננת.
מה הייתה מהירות הנסיעה של הנהג עד התקלה?

2. נתונה סדרה $a_1, a_2, a_3, \ldots$.
מגדירים סדרה חדשה $b_1, b_2, b_3, \ldots$ המקיימת לכל n טבעי: $b_n = 3^{a_n}$
נתון כי סדרת b_n היא הנדסית ומנתה 9.
א. הוכח כי סדרה a_n היא חשבונית וחשב את הפרש הסדרה.
ב. מצא את הערך של n $(n \geq 2)$ אם נתון:

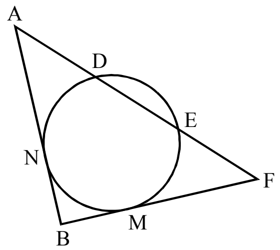
$$\frac{b_2}{b_1}(a_2 - a_1) + \frac{b_3}{b_2}(a_3 - a_2) + \ \ldots\ + \frac{b_n}{b_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) = 198$$

3. משפחה יצאה לטיול במכונית הנוסעת על 4 גלגלים חדשים.
בתא המטען של המכונית יש גלגל רזרבי אחד.
ההסתברות שיהיה נקר (פנצ'ר) בגלגל חדש בזמן הטיול היא 0.05.
ההסתברות שיהיה נקר בגלגל הרזרבי בזמן הטיול היא 0.25.
א. מהי ההסתברות שיהיה נקר בדיוק בגלגל אחד מבין ארבעת הגלגלים החדשים?
ב. בתחילת הטיול היה נקר בגלגל אחד, והמשפחה החליפה את הגלגל בגלגל הרזרבי.
(1) מהי ההסתברות שאחרי ההחלפה יהיה נקר רק בגלגל הרזרבי מבין ארבעת הגלגלים?
(2) מהי ההסתברות שאחרי ההחלפה יהיה נקר רק בגלגל אחד מבין ארבעת הגלגלים?
(3) ידוע כי אחרי ההחלפה היה נקר רק בגלגל אחד מבין ארבעת הגלגלים. מהי ההסתברות שהנקר היה בגלגל הרזרבי?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

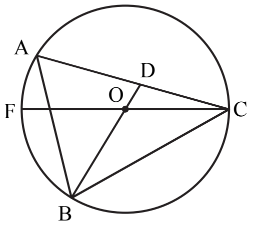
ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.

4. מנקודה A יוצאים למעגל חותך AF
וישר המשיק למעגל בנקודה N.
החותך נפגש עם המעגל בנקודות D ו- E.
מנקודה F יוצא ישר המשיק למעגל
בנקודה M, ונפגש עם המשך המשיק AN
בנקודה B (ראה ציור). נתון: $AD = DE = EF$.



א. הוכח: $AN = MF$.
ב. הוכח: $\Delta ADN \cong \Delta FEM$.
ג. הוכח: במרובע $MNDE$ יש שתי צלעות מקבילות זו לזו.

5. משולש חד-זוויות ABC חסום במעגל
שמרכזו O. CF הוא קוטר במעגל,
והמשך הרדיוס BO חותך את הצלע AC
בנקודה D, כמתואר בציור. נתון: $\sphericalangle ABD = \alpha$.
הקשת $\overset{\frown}{BC}$ ארוכה פי 2 מהקשת $\overset{\frown}{FB}$.



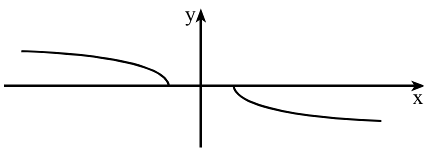
א. חשב את גודל הזווית BAC.
ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש BAD לשטח המשולש BAC.
ג. נתון גם כי: $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$. מצא את α.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 8-6.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - a}{x^2 + 3a} - 1$. a הוא פרמטר, $a > 0$.
א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):
(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.
(2) תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
(3) את שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של הפונקציה. נמק.
(4) נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
(5) אסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ג. הסבר את השינויים בגרף הפונקציה $f(x)$ עבור $a < 0$ לעומת גרף הפונקציה עבור $a > 0$:
(1) בתחום ההגדרה של הפונקציה.
(2) בנקודות הפיתול של הפונקציה.

7. נתונות הפונקציות $f(x)=\sqrt{-x-4}$,
$g(x)=-\sqrt{x-4}$ (ראה ציור).



א. מצא את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות הנתונות.

לפונקציות יש משיק משותף, המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=x_0$.

ב. (1) הבע באמצעות x_0 את השיעורים של הנקודה שבה המשיק המשותף משיק לגרף הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את השיעורים של נקודת ההשקה שהבעת בתת-סעיף ב׳ (1) (ערכים מספריים).

ג. השטח המוגבל על ידי המשיק המשותף, על ידי הגרף של הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x , מסתובב סביב ציר ה- x .
מצא את הנפח של גוף הסיבוב שנוצר.

8. נתונה הפונקציה $f(x)=2\tan^2 x$ בתחום $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

א. בתחום הנתון:

(1) מצא את ערכי ה- x שעבורם הפונקציה $f(x)$ אינה מוגדרת.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצא את פונקציית הנגזרת של הפונקציה $g(x)=\tan x-x$.

(2) בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ מצא את השטח המוגבל על ידי הישר $y=\frac{2}{3}$, על ידי הישר $x=\frac{\pi}{2}$, על ידי הגרף של הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x . היעזר בפונקציית הנגזרת של $g(x)$.

תשובות למבחן 18:

1. 80 קמ"ש.

2. א. 2 . ב. 12 .

3. א. $\frac{6859}{40000}$. ב. (1) $\frac{6859}{32000}$. (2) $\frac{2527}{8000}$. (3) $\frac{19}{28}$.

5. א. 60° . ב. $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(30+\alpha)\sin(120-\alpha)}$. ג. 40.89° .

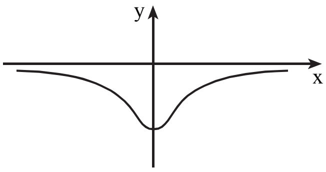
6. א. (1) כל x .

(2) עלייה : $x > 0$; ירידה : $x < 0$.

(3) $x = \sqrt{a}$, $x = -\sqrt{a}$.

(4) $(0;-1\frac{1}{3})$. (5) $y = 0$.

ב.



ג. (1) $x \neq \sqrt{-3a}$, $x \neq -\sqrt{-3a}$. (2) אין נקודות פיתול.

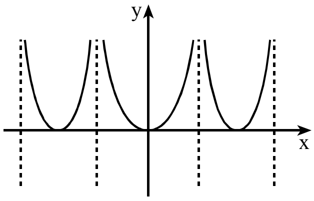
7. א. $f(x)$: $x \le -4$. $g(x)$: $x \ge 4$.

ב. (1) $\left(-x_0;-\sqrt{-x_0-4}\right)$. (2) $(8;-2)$. ג. $2\frac{2}{3}\pi$.

8. א. (1) $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{3\pi}{2}$. (2) $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{3\pi}{2}$.

(3) $(-\pi;0)$ מינימום, $(0;0)$ מינימום, $(\pi;0)$ מינימום.

(4)



ב. $g'(x) = \tan^2 x$. (2) $\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{9}$.

מבחן 19

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

1. במפעל לייצור מחשבונים עובדים פועלים ותיקים ופועלים חדשים.
פועל ותיק ופועל חדש התבקשו להרכיב מחשבונים.
לו פועל ותיק היה עובד $\frac{1}{3}$ מהזמן שנדרש לעובד חדש לבצע לבד עבודה זו,
ופועל חדש היה עובד $\frac{1}{3}$ מהזמן שנדרש לעובד ותיק לבצע לבד עבודה זו,
אז יחד הם היו מבצעים $\frac{13}{18}$ מעבודה זו. פועל ותיק מבצע לבד את העבודה
במספר שעות קטן יותר מזה הדרוש לפועל חדש.
א. מצא פי כמה גדול מספר השעות הדרוש לפועל חדש לבצע לבד
את העבודה, ממספר השעות הדרוש לפועל ותיק לבצע לבד את העבודה.
ב. נתון כי פועל ותיק מרכיב 9 מחשבונים בשעה.
(1) כמה מחשבונים בשעה מרכיב פועל חדש?
(2) מקימים שני צוותי עבודה: בצוות I יש פועל אחד חדש ושני פועלים ותיקים. בצוות II יש פועל אחד ותיק ושני פועלים חדשים.
כל צוות הרכיב אותו מספר מחשבונים. צוות I עבד שעה אחת פחות מאשר צוות II. כמה שעות עבד צוות II? (כל הפועלים הוותיקים עובדים באותו קצב, וכל הפועלים החדשים עובדים באותו קצב.)

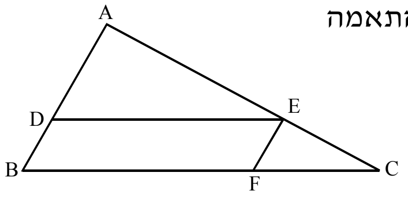
2. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית יורדת. כל איבר בסדרה זו קטן פי 2
מסכום כל האיברים שאחריו. סכום הסדרה ההנדסית הנתונה הוא 4.
מצא את סכום כל האיברים שאחרי האיבר העשירי בסדרה.

3. בחברת תקשורת גדולה נבדקו הרגלי הצפייה של הלקוחות. נמצא כי
מספר הלקוחות שצופים בערוצי אקטואליה גדול פי 4 ממספר הלקוחות
שאינם צופים בהם. $\frac{5}{6}$ מהלקוחות שצופים בערוצי סרטים, צופים בערוצי
אקטואליה. 75% מהלקוחות שאינם צופים בערוצי סרטים, צופים
בערוצי אקטואליה. בוחרים באקראי לקוח מבין הלקוחות שהרגלי
הצפייה שלהם נבדקו. ההסתברות שהוא צופה בערוצי סרטים היא P.
א. (1) הבע באמצעות P את ההסתברות שהלקוח שנבחר צופה בערוצי סרטים וגם בערוצי אקטואליה.
(2) מצא את P.
ב. (1) נמצא שהלקוח שנבחר אינו צופה בערוצי סרטים.
מהי ההסתברות שהוא אינו צופה בערוצי אקטואליה?
(2) בחרו באקראי 5 לקוחות שאינם צופים בערוצי סרטים.
מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם צופה בערוצי אקטואליה?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על אחת מבין השאלות 5-4.

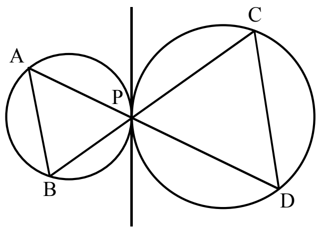
4. נתון משולש ABC. הנקודות D, E ו- F נמצאות על הצלעות AB, AC ו- BC בהתאמה כך ש- $DE \parallel BC$ ו- $FE \parallel BA$ (ראה ציור).



א. נתון: שטח המשולש ADE הוא S_1,
שטח המשולש EFC הוא S_2.
הבע באמצעות S_1 ו- S_2
את היחס $\frac{BF}{FC}$. נמק.

ב. הוכח כי שטח המשולש BEF שווה ל- $\sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

5. לשני מעגלים יש משיק משותף המשיק לשניהם בנקודה P.
נקודות C ו- D נמצאות על מעגל אחד
ונקודות A ו- B נמצאות על המעגל
האחר כך שהקטעים AD ו- CB
נפגשים בנקודה P (ראה ציור).



נתון: רדיוס המעגל העובר דרך הנקודות
C, D ו- P הוא 4.5 ס"מ, $\frac{CD}{AB} = \frac{3}{2}$,
$\sphericalangle BAP = \alpha$, $\sphericalangle DCP = \beta$.

א. מצא את רדיוס המעגל העובר דרך הנקודות A, B ו- P.

ב. הבע באמצעות α ו- β את אורך הקטע BD.

ג. אם נתון גם כי $\frac{PD}{PB} = \frac{3}{2}$, הראה כי $BD = 3\sin\alpha \cdot \sqrt{1 + 24\sin^2\alpha}$.
(α ו- β הן זוויות חדות.)

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 8-6.

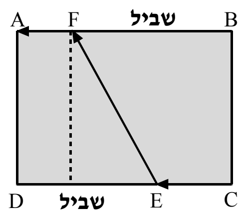
6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}}$. a הוא פרמטר שונה מאפס.

א. עבור $a > 0$ מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):
(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.
(2) את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
(3) תחומי עלייה וירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
(4) נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה:
(1) עבור $a > 0$. (2) עבור $a < 0$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - a$, $a > 0$.
(1) מה הן האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$?
(הבע באמצעות a במידת הצורך).
(2) מה הם הערכים שהפונקציה $g(x)$ יכולה לקבל?
(הבע באמצעות a במידת הצורך).

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\cos(x^2-2x)$ בתחום $-0.5\le x\le 2.5$.
א. בתחום הנתון מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
ב. בתחום הנתון שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. בתחום $0\le x\le 2$ מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה- x .
תוכל להיעזר בסקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
בתשובותיך דייק במידת הצורך עד שתי הספרות אחרי הנקודה העשרונית.

8. נתונה מדשאה בצורת מלבן $ABCD$.
לאורך צלעות המלבן BA ו- CD יש שבילי הליכה.


אורך הצלע BA הוא 0.4 ק״מ,
ואורך הצלע BC הוא 0.3 ק״מ.
אדם עומד בקדקוד C של המדשאה
ורוצה להגיע לקדקוד A . הוא הולך
לאורך הקטע CE שעל השביל CD ,
אחר כך הולך לאורך הקטע EF שעל המדשאה וממשיך
לאורך הקטע FA שעל השביל BA (ראה ציור).
האדם הולך במהירות של 6 קמ״ש לאורך השבילים,
ועל המדשאה הוא הולך במהירות של 4 קמ״ש.
מה צריך להיות אורך הקטע EF ,
כדי שהאדם יגיע ל- A בזמן הקצר ביותר?
בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

תשובות למבחן 19:

1. א. פי 1.5 . ב. **(1)** 6 מחשבונים. **(2)** 8 שעות.

2. $\frac{4096}{59049}$.

3. א. **(1)** $\frac{5}{6}p$. **(2)** 0.6 . ב. **(1)** 0.25 . **(2)** $\frac{1023}{1024}$.

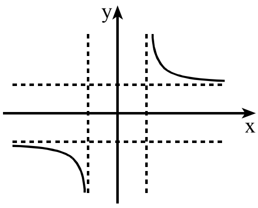
4. א. $\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$.

5. א. 3 ס״מ. ב. $BD=\sqrt{36\sin^2\alpha+81\sin^2\beta-108\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}$.

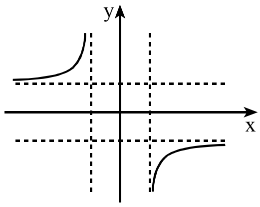
6. א. **(1)** $x>a$ או $x<-a$. **(2)** $x=a$, $x=-a$, $y=a$, $y=-a$.

(3) עלייה: אף x ; ירידה: $x>a$ או $x<-a$. **(4)** אין חיתוך עם הצירים.

ב. עבור $a>0$:

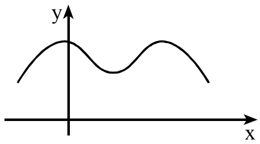


עבור $a<0$:



ג. **(1)** $x=a$, $x=-a$, $y=0$, $y=-2a$. **(2)** $g(x)>0$ או $g(x)<-2a$.

7. א. $(-0.5;0.315)$ מינימום, $(0;1)$ מקסימום, $(1;0.54)$ מינימום, $(2;1)$ מקסימום, $(2.5;0.315)$ מינימום. ב.



ג. 0.92 .

8. 0.4025 ק״מ.

מבחן 20

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

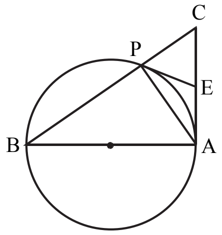
1. רוכב אופניים יצא ממושב A אל מושב B, ולאחר $\frac{1}{2}$ שעה יצא רוכב אופניים שני ממושב B אל מושב A.
הרוכבים נפגשו לאחר שהרוכב השני עבר $\frac{1}{4}$ מהמרחק שבין B ל-A.
ביום אחר יצא רוכב האופניים הראשון ממושב A למושב B $\frac{1}{2}$ שעה אחרי שרוכב האופניים השני יצא ממושב B אל מושב A. הרוכבים נפגשו באמצע הדרך שבין A ל-B. מהירויות הרוכבים לא השתנו.
א. חשב את היחס בין מהירות הרוכב הראשון ובין מהירות הרוכב השני.
ב. ידוע שאם שני הרוכבים יוצאים באותו רגע זה לקראת זה,
הם נפגשים במרחק b ק"מ מאמצע הדרך שבין A ל-B.
הבע באמצעות b את הדרך שבין A ל-B.

2. סדרה מקיימת: $a_{n+1} - a_n = 4n - 1$ (n – מספר טבעי) ו- $a_1 = 5$.
א. הוכח שההפרשים בין כל שני איברים סמוכים בסדרה מהווים סדרה חשבונית.
ב. מצא את הנוסחה ל- a_n (לאיבר ה- n-י בסדרה).
ג. מצא, בהסתמך בין היתר על הנוסחה
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, את הנוסחה ל- S_n
(סכום n האיברים הראשונים בסדרה).

3. בקבוצה של 40 אנשים יש 16 גברים והשאר נשים. ל- 12 גברים בקבוצה יש רישיון נהיגה, ול- 16 נשים בקבוצה יש רישיון נהיגה.
א. בוחרים באקראי אדם מהקבוצה.
מהי ההסתברות שייבחר אדם שיש לו רישיון נהיגה?
ב. בוחרים באקראי אדם מהקבוצה. לאחר שהאדם חוזר לקבוצה, שוב בוחרים באקראי אדם מהקבוצה. מהי ההסתברות שלפחות פעם אחת ייבחר אדם שיש לו רישיון נהיגה?
ג. האם המאורע "לבחור מהקבוצה גבר" והמאורע "לבחור מהקבוצה אדם שיש לו רישיון נהיגה" הם מאורעות בלתי תלויים? נמק.
ד. לכמה נשים בקבוצה צריך שיהיה רישיון נהיגה כדי לקבוע שבקבוצה הנתונה של 40 האנשים אין תלות בין מין האדם לכך שיש לו רישיון נהיגה? (מספר הגברים והנשים בקבוצה אינו משתנה, ומספר הגברים בעלי רישיון אינו משתנה).

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

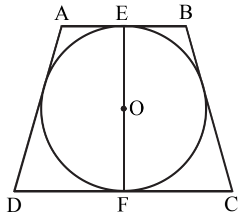
ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.



4. במשולש ישר-זווית CAB $(\sphericalangle CAB = 90^\circ)$
הניצב AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
היתר BC חותך את המעגל גם בנקודה P.
המשיק למעגל בנקודה P חותך את הניצב
CA בנקודה E (ראה ציור).

א. הוכח כי $CE = EA$.

ב. אם נתון כי $\frac{CP}{EA} = \frac{2}{3}$, וכי שטח המשולש
CPE הוא 2 סמ"ר, מצא את שטח המשולש PAB.
נמק.



5. נתון טרפז שווה-שוקיים $ABCD$ $(AB \| DC)$
החוסם מעגל שמרכזו O. AB ו- DC משיקים
למעגל בנקודות E ו- F בהתאמה. EF הוא קוטר
במעגל (ראה ציור). האורך של שוק הטרפז הוא b.
נתון כי $(\sin\sphericalangle C)^2 = \sin(90^\circ - \sphericalangle C)$. הבע באמצעות b:

א. את רדיוס המעגל החסום בטרפז.

ב. את אורך הבסיס הקטן AB.

בתשובותיך השאר שלוש ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 8-6.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

א. מצא אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמק.

ב. בתחום $0 \le x \le 2\pi$:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה, ואת האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן. נמק.

(3) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. לשרטוט ששרטטת בתת-סעיף ב(3) הוסף סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-2\pi \le x \le 0$.

ד. השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי הישר $y = 2$, על ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$, על ידי ציר ה- x ועל ידי ציר ה- y,
מסתובב סביב ציר ה- x. מצא את הנפח של גוף הסיבוב שנוצר.

ה. בתחום שבין ∞ ל- $-\infty$, רשום בצורה כללית את השיעורים:

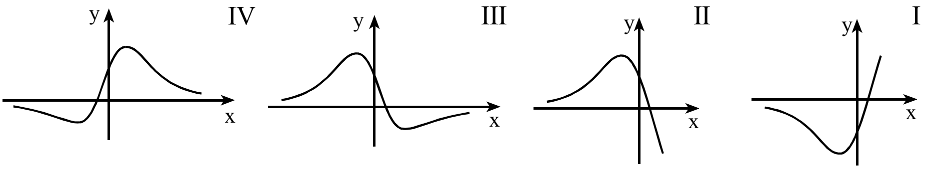
(1) של נקודות המינימום של הפונקציה $f(x)$.

(2) של נקודות המקסימום של הפונקציה $f(x)$.

7. נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$: $f''(x)=\frac{-6x^2-3x+3}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

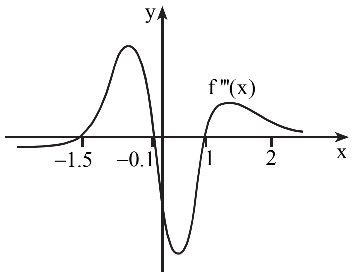
א. מבין הגרפים I , II , III , IV שלפניך, איזה גרף מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$? נמק.



ב. (1) מצא תחומי קעירות כלפי מטה $\cap$ ותחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$ של הפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) היעזר בגרף של $f'(x)$ שבסעיף א', ומצא בין אילו שני מספרים שלמים עוקבים נמצא שיעור ה- x של נקודת הקיצון של $f(x)$. נמק.

(3) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי הגרף חותך את ציר ה- x רק בנקודה אחת שבה $x=3$.



לפניך סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת השלישית $f'''(x)$.

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f'''(x)$, על ידי ציר ה- x וציר ה- y ועל ידי הישר $x=2$ בתחום $x\geq 0$.

ד. על פי הגרף של $f'(x)$ שבסעיף א',
הסבר מדוע הגרף של פונקציית הנגזרת השלישית $f'''(x)$ חותך את ציר ה- x בשלוש נקודות.

8. נתונות המשוואות של שתי פרבולות : $f(x)=-a^2x^2$, $g(x)=x^2-x$.

a הוא פרמטר שונה מ- 0 .

הפרבולות נפגשות בנקודות O ו- A (O – ראשית הצירים).

א. הבע באמצעות a את השיעורים של הנקודה A .

ב. מצא את השיעורים של הנקודה A שעבורה השטח, המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי האנך לציר ה- x העובד דרך הנקודה A , הוא מקסימלי.

תשובות למבחן 20:

1. א. $\frac{5}{3}$. ב. $8b$.

2. ב. $a_n=2n^2-3n+6$. ג. $S_n=\frac{n(4n^2-3n+29)}{6}$.

3. א. 0.7 . ב. 0.91 . ג. לא. המאורעות תלויים. ד. 18 .

4. ב. 32 סמ״ר.

5. א. $0.393b$. ב. $0.382b$.

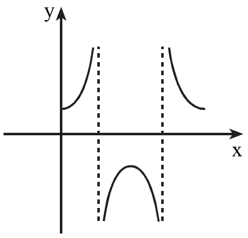
6. א. הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ב. (1) תחום הגדרה: $0\le x\le 2\pi$, $x\ne\frac{\pi}{2}$, $x\ne\frac{3\pi}{2}$.

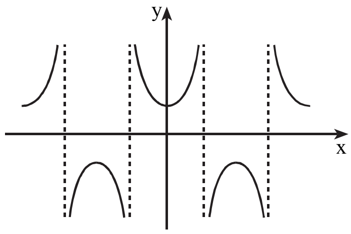
אסימפטוטות מקבילות לצירים: $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$.

(2) $(0;1)$ מינימום, $(\pi;-1)$ מקסימום, $(2\pi;1)$ מינימום.

(3)



ג.



ד. $\frac{2}{3}\pi^2+\sqrt{3}\pi=12.02$.

ה. (1) $(2\pi k;1)$ מינימום. (2) $(\pi+2\pi k;-1)$ מקסימום. הערה: k מספר שלם.

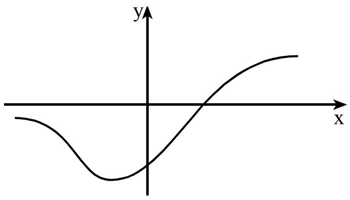
7. א. IV .

ב. (1) $\cap$: $x>\frac{1}{2}$ או $x<-1$;

$\cup$: $-1<x<\frac{1}{2}$.

(2) בין -1 ל- 0 .

(3)



ג. 4.638 .

ד. הפונקציה $f'''(x)$ היא למעשה הנגזרת השנייה של $f'(x)$. בגרף של $f'(x)$ שבסעיף א', יש 3 נקודות פיתול ולכן הנגזרת השנייה של $f'(x)$ מתאפסת ב- 3 נקודות ומכאן שבגרף של $f'''(x)$ יש 3 נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

8. א. $A\left(\frac{1}{1+a^2};\frac{-a^2}{(1+a^2)^2}\right)$. ב. $A(\frac{2}{3};-\frac{2}{9})$.