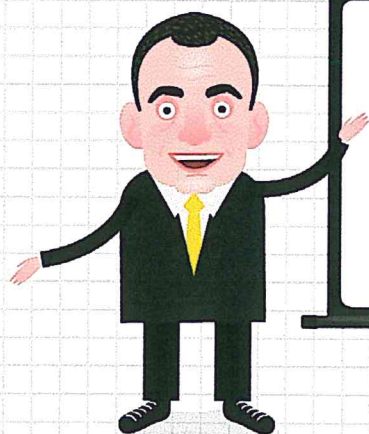




פתרון הבחינה במתמטיקה

קיץ תשע"ו, 2016, שאלונים: 317, 035807
מוגש ע"י צוות המורים של "יואל גבע"

להלן הסברים מפורטים

MY.GEVA

לפרטים
לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם
ביעילות לבגרות במתמטיקה



1. נתון טרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$).

המשכי השוקיים BC ו- AD נפגשים בראשית הצירים.

השוק BC מונחת על החלק החיובי של ציר ה- x .

הקדקודים A ו- D נמצאים ברביע השלישי.

הבסיס AB מונח על הישר $3x - 4y - 15 = 0$.

גובה הטרפז הוא 6.

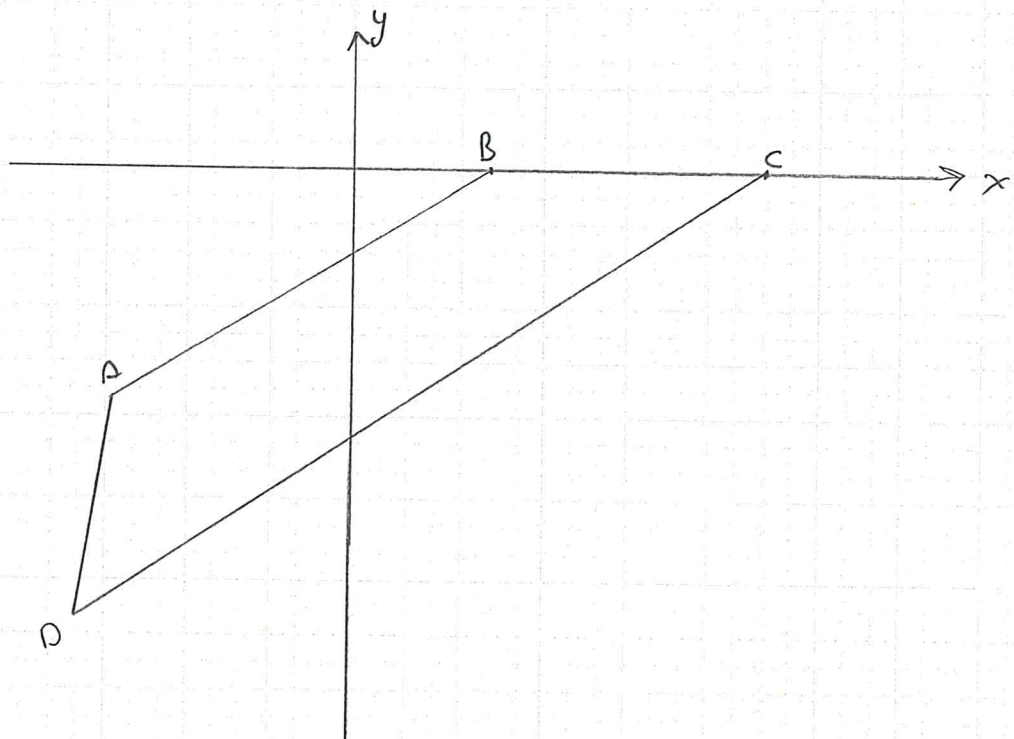
היעזר בסרטוט סקיצה של הטרפז במערכת צירים, וענה על סעיפים א ו- ב.

א. מצא את משוואת הבסיס DC .

נתון כי הקדקודים A ו- C נמצאים על מעגל שמרכזו בקדקוד B .

ב. (1) מצא את רדיוס המעגל.

(2) מצא את השיעורים של הקדקוד D .



MY.GEVA

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם
ביעילות לבגרות במתמטיקה



לפרטים
לחצו כאן!

א הבסיס בטיפ מקבילים זה זה, למשל

$$\text{הבסיס } AB : -3x + 4y + 15 = 0$$

$$\text{נוף לכוף כי הבסיס } CD : -3x + 4y + C = 0$$

נניח כי המרחק בין שני הבסיסים (זוגה הטיפ) 6

ואכן המקרה למרחק בין שני ישרים:

$$6 = \frac{C - 15}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \rightarrow C - 15 = 6 \cdot 5 \rightarrow C = 45$$

$$\boxed{-3x + 4y + 45 = 0} : CD \text{ הבסיס למשל}$$

ב (1) B - מרכז המעגל. C נק' על המעגל

ואכן הידוע המעגל שווה למרחק בין שני קווי מרכז

ע' הצבה של $y=0$ במשוואה הישר CD נקבל את היקף C:

$$-3x + 0 + 45 = 0 \rightarrow x_c = 15 \rightarrow C(15, 0)$$

ע' הצבה של $y=0$ במשוואה הישר AB נקבל את היקף B:

$$-3x + 0 + 15 = 0 \rightarrow x_b = 5 \rightarrow B(5, 0)$$

$$R = x_c - x_b = \underline{\underline{10}}$$

(2) נמצא מחיצה של הקוטר A: $A(a, \frac{3}{4}a - \frac{15}{4})$

המרחק בין נק' על המעגל A למרכז המעגל B שווה לרדיוס:

$$R^2 = (a - 5)^2 + (\frac{3}{4}a - \frac{15}{4})^2$$

$$100 = a^2 - 10a + 25 + \frac{9}{16}a^2 - \frac{45}{8}a + \frac{225}{16}$$



$$1600 = 16a^2 - 160a + 400 + 9a^2 - 90a + 225$$

$$0 = 25a^2 - 250a - 975$$

נתון קבוע
של

$$a = 13$$

$$a = -3$$

$$A(-3, -6)$$

נתון כי הישר AD עוזב את הנקודה A(0,0) ונקבל כי משוואת

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6}{-3} = 2 \rightarrow y = 2x \quad \text{הישר AD}$$

אם הנקודה D נקבל שהישר AD עובר דרך הנקודה C:

$$\begin{cases} y = 2x \\ -3x + 4y + 45 = 0 \end{cases}$$

$$-3x + 8x + 45 = 0 \rightarrow x = -9 \rightarrow y = -18$$

$$D(-9, -18)$$

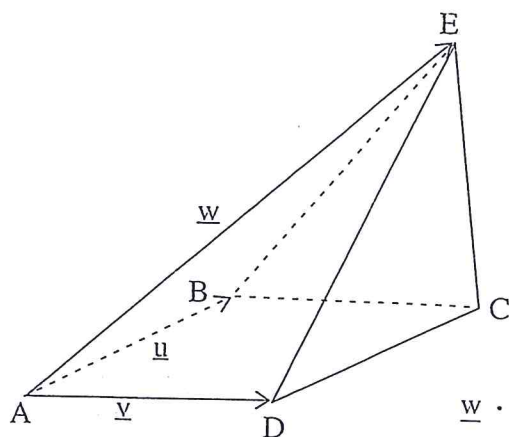
MY.GEVA

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם
ביעילות לבגרות במתמטיקה

לפרטים
לחצו כאן!





2. בפירמידה ABCDE שבסיסה ריבוע

נתון: $\vec{AD} \perp \vec{DE}$,

הווקטור $\vec{AE}$ יוצר זוויות שוות

עם הווקטורים $\vec{AD}$ ו- $\vec{AB}$,

אורך צלע הבסיס הוא 5.

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$,

$\vec{AE} = \underline{w}$

(ראה ציור).

א. מצא את הערך של המכפלה הסקלרית $\underline{w} \cdot \underline{v}$

ושל המכפלה הסקלרית $\underline{w} \cdot \underline{u}$.

הנקודה H נמצאת על המקצוע EC כך ש- $\vec{EH} = \frac{2}{5}\vec{EC}$.

נתון: $|\vec{AH}| = 2\sqrt{17}$

ב. מצא את אורך המקצוע AE.

ג. הראה כי המשולש EDC הוא ישר-זווית, ומצא את שטחו.

(2) מצא את נפח הפירמידה המשולשת AEDC.

נשתמש בנתון: $\vec{AD} \perp \vec{DE}$

מכפלה סקלרית של וקטורים ניצבים שווה לאפס:

$$\vec{AD} \cdot \vec{DE} = \underline{v} \cdot (-\underline{v} + \underline{w}) = -\underline{v}^2 + \underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \rightarrow \underline{w} \cdot \underline{v} = \underline{v}^2 = 25 \quad (*)$$

$$\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$$

מאזן המכפלה הסקלרית

לפי הנתון:

$$\frac{\vec{AE} \cdot \vec{AD}}{|\vec{AE}| \cdot |\vec{AD}|} = \frac{\vec{AE} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AE}| \cdot |\vec{AB}|}$$

$$\frac{\underline{w} \cdot \underline{v}}{|\underline{w}| \cdot |\underline{v}|} = \frac{\underline{w} \cdot \underline{u}}{|\underline{w}| \cdot |\underline{u}|} \rightarrow \underline{w} \cdot \underline{v} = \underline{w} \cdot \underline{u} \cdot \frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|} = \underline{w} \cdot \underline{u} \quad (**)$$

נשתמש בתוצאות (*) ו- (**):

$$\underline{w} \cdot \underline{u} = \underline{w} \cdot \underline{v} = \underline{25}$$

MY.GEVA

לפרטים
לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם
ביעילות לבגרות במתמטיקה



2. (בטא) את המקצוע $\overline{AH}$ ש"ה כהצגה הוקטורית:

$$\overline{AH} = \underline{w} + \overline{EH} = \underline{w} + \frac{2}{5} \overline{EC} = \underline{w} + \frac{2}{5} (-\underline{w} + \underline{v} + \underline{u}) = \frac{2}{5} \underline{u} + \frac{2}{5} \underline{v} + \frac{3}{5} \underline{w}$$

נתון: $|\overline{AH}| = 2\sqrt{17}$ ולכן:

$$\left| \frac{2}{5} \underline{u} + \frac{2}{5} \underline{v} + \frac{3}{5} \underline{w} \right| = 2\sqrt{17}$$

$$|2\underline{u} + 2\underline{v} + 3\underline{w}| = 10 \cdot \sqrt{17}$$

$$(2\underline{u} + 2\underline{v} + 3\underline{w})^2 = 1700$$

נתון בסיס היקום: $\underline{u} \perp \underline{v}$

$$4\underline{u}^2 + 4\underline{v}^2 + 9\underline{w}^2 + 12\underline{u} \cdot \underline{w} + 12\underline{v} \cdot \underline{w} = 1700$$

$$|\underline{u}| = |\underline{v}| = 5$$

$$4 \cdot 25 + 4 \cdot 25 + 9\underline{w}^2 + 12 \cdot 25 + 12 \cdot 25 = 1700 \quad \text{נצטרך להוציא מסעיף א':}$$

$$9\underline{w}^2 = 900$$

$$|\overline{AE}| = |\underline{w}| = 10$$

3. (1) כתיב את המשוואה כי $\triangle EDC$ הוא ישר זווית,

$$\overline{CE} \perp \overline{CD} \quad \text{כי}$$

זאת נחשב כי הזווית שבמרכז הסקלר שלהם שווה לאפס:

$$\overline{CE} \cdot \overline{CD} = (-\underline{u} - \underline{v} + \underline{w}) \cdot (-\underline{u}) = (\underline{u} + \underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{u} =$$

$$= \underline{u}^2 + \underline{u} \cdot \underline{v} - \underline{u} \cdot \underline{w} \Rightarrow$$

$$|\underline{u}| = 5 \Rightarrow \underline{u}^2 = 25 \quad \text{ונתון} \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \quad \text{ולכן} \quad \underline{u} \perp \underline{v}$$

$$\underline{w} \cdot \underline{u} = \underline{w} \cdot \underline{v} = 25$$

בסיס היקום, ולכן
למסעפים הדוקלמיים

$$\Rightarrow 25 + 0 - 25 = 0$$

ולכן $\triangle$ ישר זווית.

MY.GEVA

לפרטים
לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם
ביעילות לבגרות במתמטיקה



נמצא את שטח $\triangle EDC$:

$\overline{EC}$ ניצב לוונייה u ו- v וכן, ניצב למישור המוחזר של י"ר

ומכאן, ניצב לכל ישר במישור, במיוחד AC

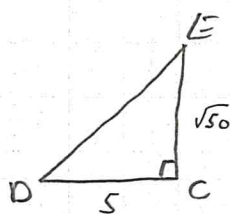
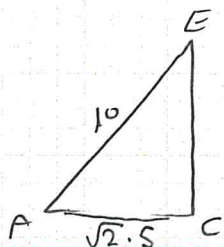
$AC = 5\sqrt{2}$ אורכו של AC במישור $ABCD$ זכור

מכאן כי $AE = 10$

למשולש $\triangle EAC$ ישר $\angle C$

לכן $\triangle EAC$

$$EC = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50}$$



שטח $\triangle EDC$ נמצא

$$S_{\triangle EDC} = \frac{\sqrt{50} \cdot 5}{2} = \underline{\underline{17.68}}$$

$$V = \frac{\text{שטח בסיס} \times \text{גובה}}{3} = \frac{\sqrt{50} \cdot 25 \cdot \frac{1}{2}}{3} = \underline{\underline{29.46}} \quad (2)$$

MY.GEVA

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם
ביעילות לבגרות במתמטיקה

לפרטים
לחצו כאן!



$$3. \text{ נתון: } z^2 - 2R \operatorname{cis} \theta \cdot z - 3R^2 \operatorname{cis} (2\theta) = 0$$

z הוא מספר מרוכב, $0 < \theta < 90^\circ$, R הוא מספר ממשי חיובי.

פתרונות המשוואה הנתונה הם z_1 ו- z_2 .

z_1 נמצא ברביע הראשון.

א. הבע באמצעות θ ו- R את z_1 ואת z_2 .

נתון כי משוואת הישר העובר דרך z_1 ו- z_2 היא $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

ב. מצא את θ .

המספר המרוכב z_3 מקיים: $z_3 = \bar{z}_1$.

ג. (1) סרטט במישור גאוס את המספרים z_1 , z_2 , z_3 .

(2) נתון כי שטח המשולש $z_1 O z_3$ הוא $225\sqrt{3}$ (ראשית הצירים)

מצא את הערך המוחלט של z_2 .

כ נפתור את המשוואה הריבועית:

$$z_{1,2} = \frac{2R \operatorname{cis} \theta \pm \sqrt{4R^2 \operatorname{cis}^2 \theta + 4 \cdot 3 \cdot R^2 \operatorname{cis} (2\theta)}}{2} =$$

$$= \frac{2R \operatorname{cis} \theta \pm 2R \sqrt{\operatorname{cis} 2\theta + 3 \operatorname{cis} 2\theta}}{2} =$$

$$= R \operatorname{cis} \theta \pm R \cdot 2 \operatorname{cis} \theta \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} -R \operatorname{cis} \theta \\ 3R \operatorname{cis} \theta \end{matrix}$$

$$\left[* \text{ ניתן היה לפרוק גם בעזרת טריגונום: } (z - 3R \operatorname{cis} \theta)(z + R \operatorname{cis} \theta) \right]$$

$$z_1 = 3R \operatorname{cis} \theta$$

$$z_2 = -R \operatorname{cis} \theta = R \operatorname{cis} (180^\circ + \theta)$$

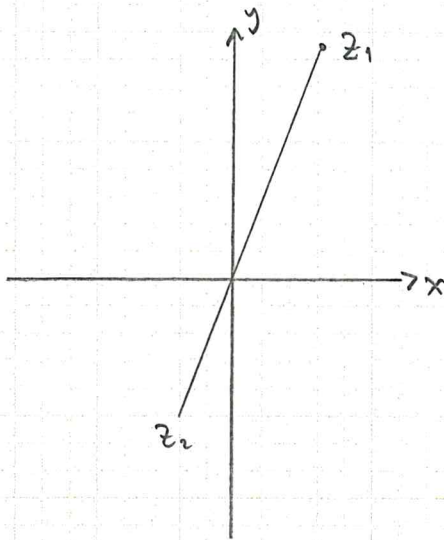
MY.GEVA

לפרטים
לחצו כאן!

תיכונים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם
ביעילות לבגרות במתמטיקה

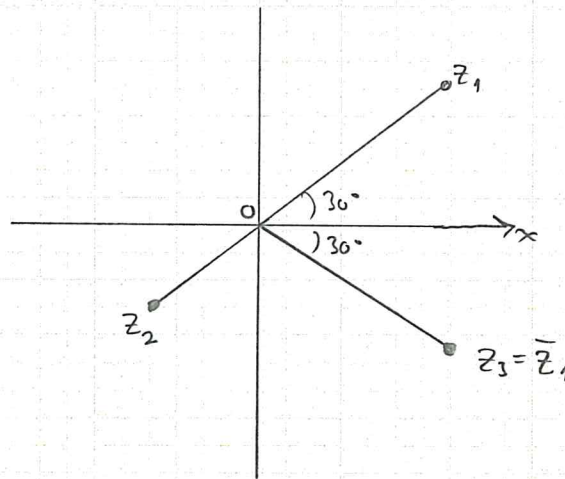




$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\theta = 30^\circ$$

2



(1) 1

$$S_{\Delta z_1 \bar{z}_1} = 225\sqrt{3} \quad (2) \quad \text{נניח}$$

$$\frac{1}{2} |z_1| \cdot |\bar{z}_1| \cdot \sin 2\theta = 225\sqrt{3}$$

$$|\bar{z}_1| = |z_1|, \quad \theta = 30^\circ$$

$$\frac{1}{2} |z_1|^2 \cdot \sin 60 = 225\sqrt{3}$$

$$|z_1| = 30$$

$$\text{מסקנה} \quad |z_1| = 3|z_2| \rightarrow |z_2| = \underline{\underline{10}}$$

MY.GEVA

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם
ביעילות לבגרות במתמטיקה

לפרטים
לחצו כאן!



4. נתונה הפונקציה $f(x) = -3x^2 \cdot e^{x^3}$.

א. (1) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

(2) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(4) נתון כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = |f(x)|$.

הוסף סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ לסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הסגור בין הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ ובין הישר $x = -1$.

ג. הפונקציות $h(a)$ ו- $t(a)$ מקיימות:

$$a \geq -1, \quad h(a) = \int_{-1}^a f(x) dx, \quad t(a) = \int_{-1}^a g(x) dx$$

מצא את השיעורים של נקודת הפגישה בין הגרפים של הפונקציות $h(a)$ ו- $t(a)$.

1c (1) למצוא נקודות קיצון פנימי: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -6x \cdot e^{x^3} - 3x^2 \cdot 3x^2 \cdot e^{x^3} = -3x \cdot e^{x^3} (2 + 3x^3) = 0$$

$$x = 0, \quad x = \sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$$

נמצא את סוג הקיצון ע"י הצבה בטבלת סימנים

x	$-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$	0	
$f'(x)$	-	+	-
	min	max	

$$f(0) = 0 \quad (0, 0) \text{ max}$$

$$f\left(\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}\right) = -1.175 \quad (-0.874, -1.175)$$

MY.GEVA

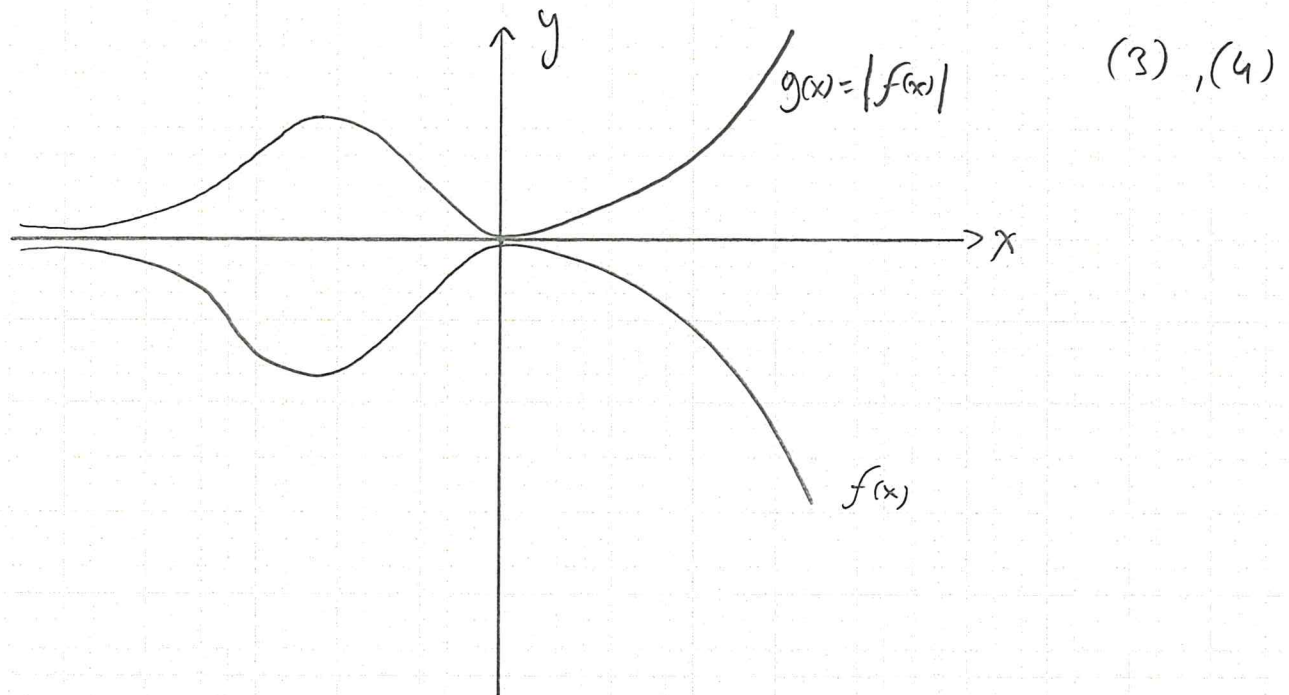
לפרטים
לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם
ביעילות לבגרות במתמטיקה



(2) לפונקציה נק' זמיון אחד עם 3 יחידות
 $0 = -3x^2 \cdot e^{x^3}$
 $x=0 \rightarrow \boxed{(0,0)}$



$$S = \int_{-1}^0 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-1}^0 (-f(x) - f(x)) dx = -2 \int_{-1}^0 3x^2 \cdot e^{x^3} dx = \underline{\underline{2}}$$

$$= 2 \int_{-1}^0 3x^2 e^{x^3} dx =$$

נשתמש בשיטת החלפת משתנה:

$$x^3 = u$$

$$3x^2 dx = du$$

$$= 2 \int 3x^2 e^u \cdot \frac{du}{3x^2} = 2 \int e^u du = 2e^u = 2e^{x^3} \Big|_{-1}^0 =$$

$$= 2e^0 - 2e^{-1} = 2 - \frac{2}{e}$$

MY.GEVA

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

לפרטים
לחצו כאן!הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם
ביעילות לבגרות במתמטיקה

ל (שורה בין שתי הפונקציות כדי להצביע על נקודת חיתוך):

$$t(a) = h(a)$$

$$\int_{-1}^a g(x) dx = \int_{-1}^a f(x) dx$$

$$\int_{-1}^a -f(x) dx = \int_{-1}^a f(x) dx$$

$$-\int f(x) dx = \int f(x) dx$$

$$2 \int f(x) dx = 0$$

$$\int_{-1}^a f(x) dx = 0$$

$$\int_{-1}^a -3x^2 \cdot e^{x^3} dx = 0$$

$$-e^{x^3} \Big|_{-1}^a = 0$$

from ב' כדי למצוא את האינטגרל:

$$-e^{a^3} + e^{-1} = 0$$

$$e^{a^3} = a^{-1} \rightarrow a^3 = -1 \rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$h(a) = h(-1) = \int_{-1}^{-1} f(x) dx = 0 \rightarrow \boxed{(-1, 0)}$$

MY.GEVA

לפרטים
לחצו כאן!

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם
ביעילות לבגרות במתמטיקה



5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{2} (\frac{1}{2} - \ln x)$.

א. מצא את תחום ההגדרה של $f(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה),

וקבע את סוגן.

ב. (1) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה),

וקבע את סוגן.

(2) מצא את השיעורים של נקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של הפונקציה $f(x)$,

וסקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) ברביע הראשון הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ נפגשים בנקודה אחת.

באיזה תחום ערכים נמצא שיעור ה- x של נקודה זו?

ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g'(x) = f(x)$.

נתון: $g(1) = a$, $g(\sqrt{e}) = b$, $g(e) = c$.

הבע באמצעות a , b , ו- c את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,

על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו- $x = e$.

(1) תחום ההגדרה - הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{2} (\frac{1}{2} - \ln x)$:
 $x > 0$

(2) $0 = \frac{x^2}{2} (\frac{1}{2} - \ln x) \rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt{e} \rightarrow (\sqrt{e}, 0)$

(3) תחום ההגדרה - הפונקציה $f'(x) = x (\frac{1}{2} - \ln x) + \frac{x^2}{2} (-\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}x - x \ln x - \frac{1}{2}x = -x \ln x$

$f'(x) = x (\frac{1}{2} - \ln x) + \frac{x^2}{2} (-\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}x - x \ln x - \frac{1}{2}x = -x \ln x$

$f'(x) = 0 \rightarrow x \neq 0$
 $\ln x = 0 \rightarrow x = 1$

MY.GEVA

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם
 בייעולות לבגרות במתמטיקה



לפרטים
 לחצו כאן!

נמצא את סוג הקיצון ע"י מבחן הנגזרת השנייה

x	0	$\frac{1}{e}$	1	2
f''(x)	///	+	max	-

$$f(1) = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{(1, \frac{1}{4}) \text{ max}}$$

$$f'(x) = -x \ln x$$

(1) 2

נמצא הפיתול לקיצון פנימי: $f''(x) = -\ln x - x \cdot \frac{1}{x} = -\ln x - 1 = 0$

$$\ln x = -1 \rightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$f'(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e} \ln e^{-1} = \frac{1}{e} \rightarrow (\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$$

נמצא את סוג הקיצון ע"י מבחן הנגזרת השנייה

x	$\frac{1}{e}$	
f''(x)	+	-

$$\rightarrow \boxed{(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}) \text{ max}}$$

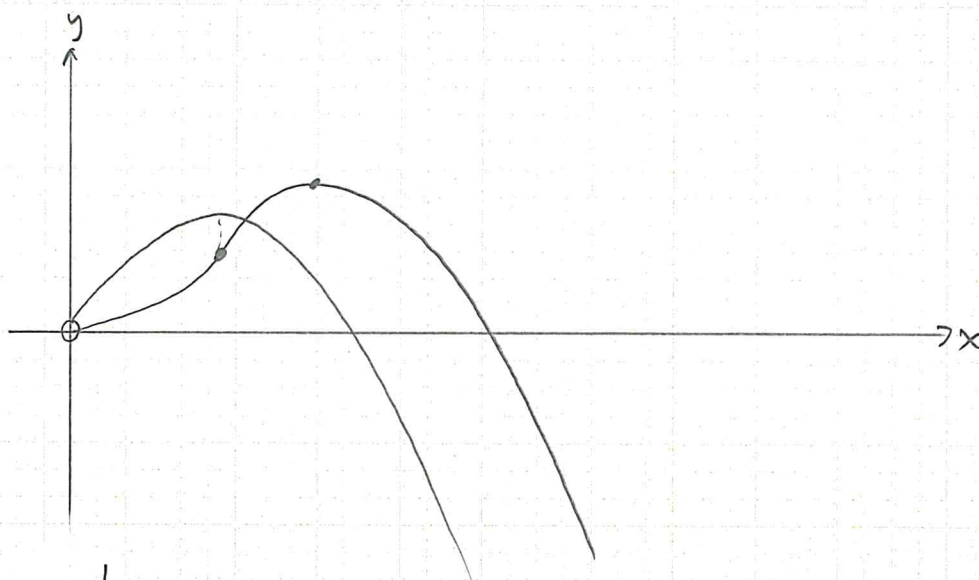
(2) נקודה קיצון לפונקציה הנמצאת היא נקודה פיתול

לפונקציה הנמצאת ולכן בעבר $x = \frac{1}{e}$ היא נקודה פיתול:

$$f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{2e^2} (\frac{1}{2} - \ln e^{-1}) = \frac{3}{4e^2}$$

$$\boxed{(\frac{1}{e}, \frac{3}{4e^2}) \text{ פיתול}}$$



(1) 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{נקודה סינגולרית (0,0) (נקודה אי-הגדרה)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x \ln x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{נקודה סינגולרית (0,0)}$$

(2) מהלך ניתן לשימוש כי נק' זו נמצאת בין נקודת הפיתול
 לנקודת הקיצון של הפונקציה: $\frac{1}{e} < x < 1$

2 הפונקציה $f(x)$ חוזרת על ציר ה-x בעצמו $x = \sqrt{e}$ לכן:

$$S = \int_1^{\sqrt{e}} f(x) dx - \int_{\sqrt{e}}^e f(x) dx = g(x) \Big|_1^{\sqrt{e}} - g(x) \Big|_{\sqrt{e}}^e =$$

$$= g(\sqrt{e}) - g(1) - g(e) + g(\sqrt{e}) = 2b - a - c = \underline{\underline{2b - a - c}}$$

MY.GEVA

לפרטים
לחצו כאן

תיכוניםטים, אתם לא לבד!

הכירו את MY.GEVA סרטוני הסבר שיכינו אתכם
ביעילות לבגרות במתמטיקה