הסברים לפרק חשיבה כמותית 1

1. התשובה הנכונה היא: (3).

בשאלה זו עלינו למצוא את גודלה של זווית α, שהיא זווית הראש במשולש שווה-שוקיים. סכום הזוויות במשולש הוא $180°$. לכן, על מנת לחשב את גודלה של α, עלינו לחשב את גודלן של זוויות הבסיס במשולש: אחת מזוויות הבסיס משלימה את הזווית בת ה- $140°$ ל- $180°$, ולכן שווה ל- $40°$ ($= 180° - 40°$). זוויות הבסיס במשולש שווה-שוקיים שוות זו לזו, ולכן גם זווית הבסיס השנייה שווה ל- $40°$.
כעת נמצא את גודלה של α. זווית α משלימה את זוויות הבסיס ל- $180°$.
כלומר: $\alpha + 40° + 40° = 180°$. נבודד את α, ונקבל: $\alpha = 100°$.

2. התשובה הנכונה היא: (3).

בשאלה זו עלינו למצוא את ה- x שמקיים את האי-שוויון הנתון. מכיוון שהתשובות מציעות לנו ערכים שונים עבור x, נציב תשובות. כלומר, עבור כל תשובה, נציב את המספר שבתשובה במקום x ונבדוק אם מתקבל אי-שוויון נכון:
<u>תשובה (1)</u>: נציב באי-שוויון $x = 1$, ונקבל: $4 < 1^2 < 1^3$. כלומר: $4 < 1 < 1$. מכיוון ש- 1 אינו קטן מ- 1, תשובה (1) נפסלת.
<u>תשובה (2)</u>: נציב באי-שוויון $x = -2$, ונקבל: $4 < (-2)^2 < (-2)^3$. כלומר: $4 < 4 < -8$. מכיוון ש- 4 אינו קטן מ- 4, תשובה (2) נפסלת.
<u>תשובה (3)</u>: נציב באי-שוויון $x = -1$, ונקבל: $4 < (-1)^2 < (-1)^3$. כלומר: $4 < 1 < -1$. מכיוון שקיבלנו אי-שוויון נכון, זו התשובה הנכונה. אין צורך להמשיך ולבדוק את תשובה (4).

3. התשובה הנכונה היא: (2).

בשאלה זו עלינו לקבוע מה סכום הגילאים <u>המקסימלי</u> של ילדי המשפחה. לצורך כך נמצא את גילו <u>המקסימלי</u> של כל אחד מהילדים, ונחבר את הגילאים הללו:
נתון כי גילו של הילד הבכור הוא 12.
גילו של הילד האמצעי הוא מספר שלם (שכן לכל הילדים יום הולדת באותו תאריך) וקטן מ- 12 (שכן הילדים נולדו בשנים שונות). מכאן שגילו המקסימלי של הילד האמצעי הוא 11.
גילו של הילד הצעיר הוא מספר שלם (שכן לכל הילדים יום הולדת באותו תאריך) וקטן מ- 11 (שכן הילדים נולדו בשנים שונות). מכאן שגילו המקסימלי של הילד הצעיר הוא 10.
לפיכך, סכום הגילאים המקסימלי של הילדים הוא 33 ($= 12 + 11 + 10$).

4. התשובה הנכונה היא: (1).

בכדי להבין מה אינו נכון לגבי האלכסון הארוך במעוין, נתבונן בתשובות:
<u>תשובה (1)</u>: כאשר מסרטטים את האלכסון הארוך במעוין מתקבלים משולשים שווי-שוקיים חופפים שאחת מצלעותיהם היא האלכסון, ושתי הצלעות האחרות הן מחצית היקף המעוין. מכיוון שסכום 2 צלעות במשולש תמיד גדול מהצלע השלישית, הרי שמחצית היקף המעוין גדול מהאלכסון (ולא כפי שרשום בתשובה (1)). זו התשובה הנכונה, ואין צורך להמשיך ולבדוק את התשובות האחרות, אך נעשה זאת למען שלמות ההסבר.
<u>תשובה (2)</u>: כאשר מסרטטים את האלכסון הארוך במעוין מתקבלים משולשים שווי-שוקיים חופפים שאחת מצלעותיהם היא האלכסון, ושתי הצלעות האחרות הן צלעות המעוין. בכדי להשוות בין צלעות המשולש, ניעזר בזוויות. הזווית שמול האלכסון היא קהה (שכן זהו האלכסון הארוך) ולכן הזוויות שמול צלעות המעוין הן חדות. מול הזווית הגדולה במשולש נמצאת הצלע הגדולה. כלומר, האלכסון ארוך מצלע המעוין.
<u>תשובה (3)</u>: שני האלכסונים במעוין הם חוצי זווית.
<u>תשובה (4)</u>: האלכסונים במעוין מאונכים זה לזה.

5. התשובה הנכונה היא: (2).

השטח הכהה שווה לשטח המלבן הגדול פחות השטחים הלבנים. בכדי לחשב את שטח המלבן ואת השטחים הלבנים, יש למצוא את אורך צלעם של הריבועים הקטנים. מכיוון שנתון ששטחם 1 סמ"ר, הרי שצלעם שווה ל- 1 ס"מ ($=\sqrt{1}$).
שטח מלבן שווה לאורכו כפול רוחבו. רוחבו של המלבן הגדול שווה ל- 4 צלעות של ריבועים קטנים, כלומר ל- 4 ס"מ. ואורכו שווה ל- 5 צלעות של ריבועים קטנים, כלומר ל- 5 ס"מ.
מכאן ששטחו של המלבן הגדול הוא 20 סמ"ר ($=4\cdot 5$).
השטחים הלבנים הם מרובעים בעלי שני זוגות של צלעות סמוכות שוות. כלומר, הם דלתונים. שטח דלתון שווה למכפלת אלכסוניו חלקי 2. האלכסון הארוך של כל דלתון שווה ל- 3 צלעות של ריבועים קטנים, כלומר ל- 3 ס"מ. והאלכסון הקצר שווה ל- 2 צלעות של ריבועים קטנים, כלומר ל- 2 ס"מ. מכאן ששטחו של כל דלתון הוא 3 סמ"ר ($=\frac{3\cdot 2}{2}$).
השטח השחור שווה למלבן פחות 2 הדלתונים: 14 = 3 - 3 - 20.

<u>שימו לב</u>: השטח הכהה מורכב מ- 8 ריבועים שלמים ועוד חלקי ריבועים השווים יחד ל- 6 ריבועים שלמים. כלומר, השטח הכהה שווה ל- 14 ריבועים קטנים (= 6 + 8) ולכן שטחו הוא 14 סמ"ר.

6. התשובה הנכונה היא: (3).

בשאלה זו עלינו לקבוע תוך כמה שעות תגיע יוליה מנקודה B לנקודה C. המהירות בקטע דרך זה נתונה (80 קמ"ש), כמו כן נתון כי הדרך מ- B ל- C ארוכה ב- 30 ק"מ מהדרך מ- A ל- B. לפיכך, נמצא את הדרך מ- A ל- B, בעזרתה נמצא את הדרך מ- B ל- C, ואז נוכל לחשב את הזמן המבוקש.
לגבי קטע הדרך מ- A ל- B, נתון כי יוליה נסעה בו במהירות 70 קמ"ש והגיעה כעבור 3 שעות. על-פי נוסחת התנועה: דרך = זמן·מהירות. כלומר, אורכה של הדרך מ- A ל- B הוא 210 ק"מ ($70 \cdot 3 =$). נתון כי הדרך מ- B ל- C ארוכה ב- 30 ק"מ מהדרך מ- A ל- B. לפיכך אורך הדרך מ- B ל- C הוא 240 ק"מ (= 30 + 210). כעת נחשב את הזמן המבוקש על-פי נוסחת התנועה: $\text{זמן} = \frac{\text{דרך}}{\text{מהירות}}$. מכאן שהזמן שלקח ליוליה להגיע מנקודה B לנקודה C הוא 3 שעות ($\frac{240}{80} =$).

7. התשובה הנכונה היא: (3).

בשאלה זו עלינו לקבוע איזה מהשינויים המוצעים בתשובות בהכרח יגדיל את ערכו של הביטוי (a - b). לצורך כך נציב מספרים נוחים במקום a ו- b ונחשב בעזרתם את ערך הביטוי. לאחר מכן נבצע את השינויים המוצעים בתשובות ונמצא את הערך החדש עבור הביטוי. נפסול כל תשובה שבה הערך שהתקבל אינו גדול יותר מהערך המקורי:
נציב למשל a = 5 ו- b = 3. ונקבל: a - b = 5 - 3 = 2. כעת נפנה לתשובות ונפסול כל תשובה שהערך שמתקבל בה אינו גדול מ- 2.
<u>תשובה (1)</u>: נקטין את a ב- 1, ונקבל: a = 4. נקטין את b ב- 1, ונקבל: b = 2.
לאחר השינויים של תשובה (1), ערך הביטוי הוא: a - b = 4 - 2 = 2.
הערך שהתקבל אינו גדול מ- 2, ולכן תשובה (1) נפסלת.
<u>תשובה (2)</u>: נקטין את a ב- 1, ונקבל: a = 4. נגדיל את b ב- 1, ונקבל: b = 4.
לאחר השינויים של תשובה (2), ערך הביטוי הוא: a - b = 4 - 4 = 0.
הערך שהתקבל אינו גדול מ- 2, ולכן תשובה (2) נפסלת.
<u>תשובה (3)</u>: נגדיל את a ב- 1, ונקבל: a = 6. נקטין את b ב- 1, ונקבל: b = 2.
לאחר השינויים של תשובה (3), ערך הביטוי הוא: a - b = 6 - 2 = 4.
הערך שהתקבל גדול מ- 2, ולכן תשובה זו מתאימה, אך על מנת לוודא שהיא נכונה בהכרח (ולא רק עבור המספרים שהצבנו) עלינו לפסול גם את תשובה (4).
<u>תשובה (4)</u>: נגדיל את a ב- 1, ונקבל: a = 6. נגדיל את b ב- 1, ונקבל: b = 4.
לאחר השינויים של תשובה (1), ערך הביטוי הוא: a - b = 6 - 4 = 2.
הערך שהתקבל אינו גדול מ- 2, ולכן תשובה (4) נפסלת.
בעזרת ההצבה פסלנו את תשובות (1), (2) ו- (4) ולכן תשובה (3) נכונה בהכרח.

<u>שימו לב</u>: הביטוי a - b הוא למעשה ההפרש בין a ל- b. בכדי להגדיל את הביטוי, עלינו להגדיל את הפער בין a ל- b. הדרך לעשות זאת היא להגדיל עוד יותר את הנעלם הגדול (a) ולהקטין עוד יותר את הנעלם הקטן (b), כך שהפער בניהם יגדל. אלו השינויים המתוארים בתשובה (3).

8. התשובה הנכונה היא: (1).

בשאלה זו עלינו למצוא את היחס בין מחיר אבן גרניט למחיר אבן צור. הנתון מתאר קשר בין אבני צור ואבני גרניט.

דרך א'

נסמן את מחיר אבן גרניט אחת ב- G ואת מחיר אבן צור אחת ב- T, ונרשום את הנתון באופן אלגברי: $5T = T + 3G$.

כעת נפשט את המשוואה עד שנגיע לביטוי המבוקש:

נחסר T משני האגפים, ונקבל: $4T = 3G$. נחלק ב- T וב- 3 את שני האגפים, ונקבל: $\frac{G}{T} = \frac{4}{3}$.

דרך ב' - הצבה

נציב מספר נוח במקום מחירה של אחת מהאבנים המתוארות בשאלה, בעזרת הקשר הנתון, נחשב את מחירה של האבן השנייה, ואז נוכל לחשב את היחס בין המחירים.
נציב, למשל, שמחיר אבן הצור הוא 2 שקלים. על-פי הנתון, מחירן של שלוש אבני גרניט ועוד 2 שקלים (מחיר אבן צור אחת) שווה ל- 10 שקלים (מחיר 5 אבני צור). מכאן שמחירן של שלוש אבני גרניט הוא 8 שקלים. נחלק ב- 3 ונקבל את מחירה של אבן גרניט אחת: $\frac{8}{3}$ שקלים.

כעת נחשב את היחס המבוקש: $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{\text{מחיר אבן גרניט}}{\text{מחיר אבן צור}}$.

9. התשובה הנכונה היא: (3).

כאשר שני ביטויים שווים זה לזה בערך המוחלט שלהם, הביטויים עצמם (ללא הערך המוחלט) שווים זה לזה או נגדיים זה לזה. כלומר, למשוואה הנתונה ישנם שני פתרונות אפשריים:
<u>פיתרון א'</u>: הביטויים שווים זה לזה: $x + y = x - y$. נפשט את המשוואה:
נחסר x משני האגפים, ונקבל: $y = -y$.
נחבר y לשני האגפים, ונקבל: $2y = 0$.
נחלק ב- 2, ונקבל: $y = 0$.
<u>פיתרון ב'</u>: הביטויים נגדיים זה לזה: $x + y = -(x - y)$. נפשט את המשוואה:
נפתח סוגריים, ונקבל: $x + y = -x + y$.
נחסר y משני האגפים, ונקבל: $x = -x$.
נחבר x לשני האגפים, ונקבל: $2x = 0$.
נחלק ב- 2, ונקבל: $x = 0$.
קיבלנו ש- x או y שווים ל- 0, ולכן מכפלתם בהכרח שווה ל- 0.

10. התשובה הנכונה היא: (1).

בשאלה זו עלינו למצוא את אורך הקטע AB שהוא למעשה ההפרש בין רדיוס המעגל לצלע הריבוע. רדיוס המעגל נתון בשאלה (1 ס"מ). לפיכך, בכדי לחשב את אורך הקטע המבוקש, עלינו למצוא את אורך צלע הריבוע.
מכיוון שהנתון היחיד הוא רדיוס המעגל, נמצא את הקשר בין הריבוע למעגל בעזרת העברת רדיוס לנקודת המפגש של הריבוע עם המעגל (קודקוד הריבוע הנמצא מול נקודה O).
הרדיוס שהעברנו הוא אלכסון בריבוע, ולכן מחלק אותו לשני משולשי כסף. לכן, בכדי למצוא את צלע הריבוע, נחלק את הרדיוס (השווה 1 ס"מ) ב- $\sqrt{2}$, ונגלה שצלע הריבוע שווה ל- $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

כעת נחשב את AB, על-ידי חיסור צלע הריבוע מרדיוס המעגל: $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (תשובה (1)).

11. התשובה הנכונה היא: (1).

בשאלה זו עלינו למצוא את הסיכוי לכך שצבעו של הכדור הרביעי יהיה זהה לצבעם של שלושת הכדורים הקודמים. בכדי לחשב סיכוי זה נמצא כמה כדורים יש בקופסה בסך הכל כאשר צביקה ניגש להוציא את הכדור הרביעי, וכמה מתוכם הם בצבע של שלושת הכדורים שכבר הוצאו. בתחילה היו בקופסה 15 כדורים (5 לבנים, 5 שחורים ו- 5 אדומים). לאחר שהוצאו 3 כדורים נותרו בקופסה 12 כדורים בלבד (= 3 - 15). 3 הכדורים שהוצאו הם בעלי אותו צבע. מכיוון שבתחילה היו 5 כדורים בכל צבע, הרי שנותרו בקופסה רק 2 כדורים שצבעם זהה לצבע הכדורים שהוצאו (= 3 - 5).
לסיכום, עלינו לקבוע מה הסיכוי להוציא את אחד משני הכדורים שצבעם זהה לצבע הכדורים שהוצאו, מתוך קופסה שבה 12 כדורים בסך הכל.
על-פי נוסחת ההסתברות: $\text{סיכוי} = \frac{\text{מספר הכדורים הרצויים}}{\text{מספר הכדורים המצויים}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

12. התשובה הנכונה היא: (3).

בכדי לדעת איזה מהמספרים שבתשובות לא ניתן לקבל משימוש במקשים: 5, 3, כפל ושוויון בלבד, נבדוק לגבי כל אחת מהתשובות אם ניתן להגיע אליה בעזרת המקשים המתוארים, כלומר, אם ניתן לפרק אותה למכפלה של המספרים 3 ו- 5 בלבד:
<u>תשובה (1)</u>: $5\cdot5=25$. ניתן להגיע למספר 25, בעזרת המקשים 5, כפל ושוויון בלבד.
<u>תשובה (2)</u>: $3\cdot3\cdot3=27$. ניתן להגיע למספר 27, בעזרת המקשים 3, כפל ושוויון בלבד.
<u>תשובה (3)</u>: $5\cdot5\cdot2=50$. לא ניתן להגיע למספר 50 מבלי להשתמש במקש 2, ולכן זו התשובה הנכונה.
אין צורך להמשיך ולבדוק את תשובה (4), אך נעשה זאת למען שלמות ההסבר.
<u>תשובה (4)</u>: $5\cdot5\cdot3=75$. ניתן להגיע למספר 75, בעזרת המקשים 3, 5, כפל ושוויון בלבד.

13. התשובה הנכונה היא: (3).

בשאלה נתונים נפח החרוט (π סמ"ק) ושטח בסיסו של החרוט (π סמ"ר), ועלינו לחשב את גובה החרוט. לצורך כך נשתמש בנוסחה לחישוב נפח חרוט: $\text{נפח} = \frac{\text{שטח בסיס} \cdot \text{גובה}}{3}$.

נציב את הנתונים, ונקבל: $\pi = \frac{\pi \cdot \text{גובה}}{3}$.

כעת נבודד את הגובה: נכפול ב- 3 את שני האגפים, ונקבל: $3 \cdot \pi = \pi \cdot \text{גובה}$.

נחלק ב- π את שני האגפים, ונקבל: 3 = גובה.

14. התשובה הנכונה היא: (4).

x הוא מכפלה של המספרים הראשוניים 2 ו- 3. בכדי לקבוע איזה מהמספרים שבתשובות מחלק את x ללא שארית (כלומר, באיזה מספר x מתחלק ללא שארית), נפרק כל תשובה לגורמים ראשוניים ונחפש תשובה שכל גורמיה הם גם גורמים של x:

<u>תשובה (1)</u>: $16 = 2^4$. x אינו מכיל את הגורם 2 ארבע פעמים, ולכן אינו מתחלק ב- 16.

<u>תשובה (2)</u>: $25 = 5^2$. x אינו מכיל את הגורם 5 כלל, ולכן אינו מתחלק ב- 25.

<u>תשובה (3)</u>: $48 = 2^4 \cdot 3$. x אינו מכיל את הגורם 2 ארבע פעמים, ולכן אינו מתחלק ב- 48.

<u>תשובה (4)</u>: $54 = 3^3 \cdot 2$. x מכיל את הגורם 2 וכן את הגורם 3 שלוש פעמים, ולכן x מתחלק ב- 54.

15. התשובה הנכונה היא: (1).

בשאלה נתונות 2 משוואות עם 3 נעלמים (x, y ו- k), ועלינו לקבוע מה ערכו של הביטוי $\frac{x}{y}$.

מכיוון שלא שואלים על הנעלם k והוא גם לא מופיע בתשובות, עלינו לבטל אותו על-ידי בידודו במשוואה אחת והצבתו במשוואה השנייה. במשוואה הראשונה k כבר מבודד, נציב אותו במשוואה השנייה, ונקבל: $x + y = 3\left(x - \frac{y}{3}\right)$.

כעת נפשט את המשוואה במטרה להגיע לביטוי המבוקש:

נפתח סוגריים, ונקבל: $x + y = 3x - y$. נחסר x ונחבר y לשני האגפים, ונקבל: $2y = 2x$.

נחלק ב- 2, ונקבל: $y = x$. נחלק ב- y, ונקבל: $\frac{x}{y} = 1$.

16. התשובה הנכונה היא: (2).

ראשית נמצא את המדינות יוצאות הדופן בצפון אמריקה ובדרום אמריקה. מהתבוננות בתרשים עולה שכל המדינות השייכות לצפון אמריקה נמצאות זו ליד זו בגוש אחד, מלבד מדינה אחת המרוחקת מהשאר. זו המדינה יוצאת הדופן. כך גם לגבי המדינות בדרום אמריקה.

המדינה יוצאת הדופן בצפון אמריקה היא זו שבה הכנסה ממוצעת של קצת פחות מ- \$10,000 והשכלה ממוצעת של קצת יותר מ- 9 שנים.

המדינה יוצאת הדופן בדרום אמריקה היא זו שבה הכנסה ממוצעת של כ- $10,000 והשכלה ממוצעת של קצת יותר מ- 12 שנים.
לאחר שמצאנו את המדינות יוצאות הדופן, נעבור על התשובות ונחפש תשובה שמשותפת לשתיהן. לשתי המדינות יוצאות הדופן הכנסה ממוצעת של בערך $10,000 (תשובה (2)).

17. התשובה הנכונה היא : (4).

בכדי למצוא לכמה מהמדינות שבתרשים השכלה ממוצעת הגבוהה מ- 13 שנים, נסמן על התרשים את הקו המייצג השכלה של 13 שנים, ונספור כמה סימנים מופיעים מימינו.
מדובר על 14 סימנים.

<u>שימו לב</u> : מכיוון שאין לנו סרגל, ישנם סימן או שניים לגביהם לא לגמרי ברור אם הם מימין, משמאל או על הקו. מבט בתשובות יפתור את הבלבול, שכן אין תשובה הקרובה ל- 14 (כגון 13 או 15).

18. התשובה הנכונה היא : (4).

בשאלה מוגדר מדד באופן הבא : הכנסה – השכלה · 1,000. המדד הגדול ביותר יתקבל כאשר ההשכלה תהיה מקסימלית וההכנסה (הנמצאת בסימן מינוס) תהיה מינימלית. לפיכך נחפש את המדינה הנמצאת באזור הימני (השכלה מקסימלית) התחתון (הכנסה מינימלית) של התרשים. המדינות הנמצאות באזור זה של התרשים שייכות לאפריקה.

<u>שימו לב</u> : באזור המבוקש בתרשים יש גם מדינות השייכות לאירופה, אך אירופה אינה נמצאת בתשובות ולכן אין צורך לחשב את ערך המדד בכדי לענות על השאלה.

19. התשובה הנכונה היא : (4).

ההכנסה הממוצעת נמצאת בתרשים על הציר האנכי. כלומר, בכדי לדעת באיזה אזור טווח ההכנסה הוא הגדול ביותר, נבדוק עבור כל אזור את ההפרש בין ההכנסה הממוצעת של המדינה הגבוהה בתרשים לזו של המדינה הנמוכה ביותר בתרשים :
<u>תשובה (1)</u> : במדינה הגבוהה ביותר באירופה יש הכנסה ממוצעת של כ- $17,500 ובמדינה הנמוכה ביותר באירופה יש הכנסה ממוצעת של כ- $6,000. לפיכך טווח ההכנסה הממוצעת באירופה הוא כ- $11,500 (= 17,500 - 6,000).
<u>תשובה (2)</u> : במדינה הגבוהה ביותר בצפון אמריקה יש הכנסה ממוצעת של כ- $17,500 ובמדינה הנמוכה ביותר בצפון אמריקה יש הכנסה ממוצעת של כ- $8,500. לפיכך טווח ההכנסה הממוצעת בצפון אמריקה הוא כ- $9,000 (= 17,500 - 8,500).
<u>תשובה (3)</u> : במדינה הגבוהה ביותר בדרום אמריקה יש הכנסה ממוצעת של כ- $15,000 ובמדינה הנמוכה ביותר בדרום אמריקה יש הכנסה ממוצעת של כ- $6,000. לפיכך טווח ההכנסה הממוצעת באירופה הוא כ- $9,000 (= 15,000 - 6,000).
<u>תשובה (4)</u> : במדינה הגבוהה ביותר באסיה יש הכנסה ממוצעת של כ- $16,000 ובמדינה הנמוכה ביותר באסיה יש הכנסה ממוצעת של כ- $2,500. לפיכך טווח ההכנסה הממוצעת באירופה הוא כ- $13,500 (= 16,000 - 2,500).
הטווח הגדול ביותר הוא בתשובה (4).

20. התשובה הנכונה היא: (1).

דרך א'

בשאלה זו עלינו להשוות בין המעגלים הקטנים שבטור א' למעגלים הקטנים שבטור ב'.
הקשר בין המעגלים הללו הוא שהם חסומים במעגלים הגדולים ואלו חופפים זה לזה.
לפיכך נסמן את רדיוס המעגלים הגדולים ב- R ונחשב בעזרתו את שטחי המעגלים הקטנים בשני הטורים:

טור א': על קוטר המעגל הגדול חסומים 2 מעגלים קטנים וחופפים, ולכן קוטר כל מעגל קטן שווה למחצית קוטרו של המעגל הגדול (כלומר ל- R), ומכאן שרדיוסו של כל מעגל קטן הוא $\frac{R}{2}$.

שטח כל מעגל קטן הוא: $\pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot R^2}{4}$.

סכום שטחי המעגלים הקטנים הוא: $2 \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{4} = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$.

טור ב': על קוטר המעגל הגדול חסומים 3 מעגלים קטנים וחופפים, ולכן קוטר כל מעגל קטן שווה לשליש קוטרו של המעגל הגדול (כלומר ל- $\frac{2R}{3}$), ומכאן שרדיוסו של כל מעגל קטן הוא $\frac{R}{3}$. שטח כל מעגל קטן הוא: $\pi \cdot \left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{\pi \cdot R^2}{9}$. סכום שטחי המעגלים הקטנים הוא: $3 \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{9} = \frac{\pi \cdot R^2}{3}$.

כעת נשווה בין הטורים:	$\frac{\pi \cdot R^2}{2}$	?	$\frac{\pi \cdot R^2}{3}$
נצמצם ב- π וב- R^2, ונקבל:	$\frac{1}{2}$	?	$\frac{1}{3}$
נכפול ב- 2 וב- 3, ונקבל:	3	?	2

טור א' גדול מטור ב'.

דרך ב'

טור א': כפי שראינו בדרך א', רדיוס כל מעגל קטן שווה למחצית מרדיוס המעגל הגדול. מעגלים הם צורות דומות, ולכן אם הרדיוס קטן פי 2, השטח יהיה קטן פי 2^2, כלומר פי 4. לפיכך שטח כל מעגל קטן שווה ל- $\frac{1}{4}$ משטח המעגל הגדול, וסכום שטחי שני המעגלים שווה ל- $\frac{1}{2}$ משטח המעגל הגדול ($\frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$).

טור ב': במקרה זה רדיוס כל מעגל קטן שווה לשליש מרדיוס המעגל הגדול. כאמור, מעגלים הם צורות דומות, ולכן אם הרדיוס קטן פי 3, השטח יהיה קטן פי 3^2, כלומר פי 9. לפיכך שטח כל מעגל קטן שווה ל- $\frac{1}{9}$ משטח המעגל הגדול, וסכום שטחי שני המעגלים שווה ל- $\frac{1}{3}$ שטח המעגל הגדול ($\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} =$).

חצי משטח המעגל גדול משליש משטח המעגל, ולכן טור א' גדול מטור ב'.

21. התשובה הנכונה היא: (1).

על-פי המידע הנוסף, הנעלמים x ו- y שניהם חיוביים, וסכומם שווה ל- 1. בחיבור שני מספרים חיוביים מתקבלת תוצאה הגדולה יותר מכל אחד משניהם, ומכאן ש- x קטן יותר מ- 1 (כלומר הוא שבר חיובי).
טור א': הוצאת שורש משבר חיובי, מגדילה את השבר, כך שהתוצאה גדולה יותר מ - x.
טור ב': העלאת שבר חיובי בריבוע, מקטינה את השבר, כך שהתוצאה קטנה יותר מ- x.
מכיוון שהביטוי בטור א' גדול יותר מ- x, והביטוי בטור ב' קטן יותר מ- x, הביטוי שבטור א' גדול יותר מהביטוי בטור ב'.

22. התשובה הנכונה היא: (1).

טור א': על מנת לחשב את מספר הדיירים הקטן ביותר שאין להם לא כלב ולא חתול, אנו רוצים שלכמה שיותר דיירים תהיה לפחות חיית מחמד אחת (כלב או חתול).
לשם כך ננסה לחלק את החיות בין כמה שיותר דיירים.
על-פי המידע הנוסף ישנו דייר אחד לפחות שיש לו כלב אחד וחתול אחד, לכן לכל היותר יהיו עוד 2 בעלי חתולים שאין להם כלב, ועוד 3 בעלי כלבים שאין להם חתול.
בסך הכול יהיו 6 דיירים שיש להם חיית מחמד: 3 בעלי כלבים, 2 בעלי חתול, 1 בעל כלב וחתול גם יחד).
נתון שבבניין 10 דיירים, ולכן נותרו 4 דיירים ($= 10 - 6$) שאין להם כלב ואין להם חתול.
טור ב': מספר הדיירים הגדול ביותר האפשרי שיש להם גם כלב וגם חתול יתקבל כאשר כל הדיירים שיש להם חתול יהיו גם בעלי כלבים. מכיוון שיש 3 בעלי חתולים ו- 4 בעלי כלבים, יהיו לכל היותר 3 דיירים שיש להם גם כלב וגם חתול.

23. התשובה הנכונה היא: (4).

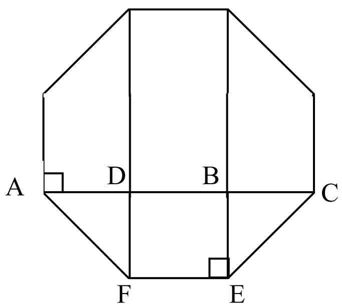
עלינו להשוות בין השטחים של המשולש הכהה ושל הריבוע המקווקו. צלע HC משותפת הן למשולש והן לריבוע, ולכן נוכל להשתמש בה לחישוב השטחים.
טור א': שטח משולש ישר-זווית שווה למחצית מכפלת הניצבים, כלומר שווה ל- $\frac{HC \cdot HD}{2}$.
טור ב': שטח ריבוע שווה לצלע בריבוע, כלומר שווה ל- HC^2.
ההשוואה שמתקבלת בטורים:
$\frac{HC \cdot HD}{2} \ ? \ HC^2$ נכפול ב- 2 את שני הטורים, ונקבל:
$HC \cdot HD \ ? \ 2 \cdot HC^2$ נחלק ב- HC את שני הטורים, ונקבל:
$HD \ ? \ 2 \cdot HC$
HD הוא קו שאין לנו מגבלה על אורכו, והוא יכול להתארך ולהתקצר (בהתאמה יתארך או יתקצר גם קו BE, כך שצלעות AB ו- CD יוותרו מקבילות זו לזו).
מכיוון שאיננו יודעים את היחס בין אורכו של HD לבין אורכו של HC, הרי שלא ניתן לקבוע את יחס הגדלים בין הביטויים בשני הטורים.

24. התשובה הנכונה היא: (4).

בשני הטורים עלינו למצוא את מספר המספרים שהשורש שלהם הוא מספר שלם בטווח מסויים. על מנת לעשות זאת, נציין את המספרים הללו ונמנה אותם.
<u>טור א׳</u>: המספרים בין 2 ל- 101 שהשורש שלהם הוא מספר שלם: 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.
כלומר סך הכל 9 מספרים.
<u>טור ב׳</u>: על-פי המידע הנוסף, x מוגדר בטווח בין 100 ל- 170. כדי לבדוק לכמה מספרים בטווח השורש שלהם הוא מספר שלם, נבדוק את המקרים הקיצוניים.
x הוא לכל הפחות גדול מ- 100, נניח לשם הנוחות שהוא שווה ל- 101. במקרה זה, המספרים בין 5 ל - x שהשורש שלהם הוא מספר שלם: 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100. כלומר סך הכל 8 מספרים. במקרה זה טור א׳ גדול יותר.
x הוא לכל היותר קטן מ- 170, נניח לשם הנוחות שהוא שווה ל- 169. במקרה זה, המספרים בין 5 ל - x שהשורש שלהם הוא מספר שלם: 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169.
כלומר סך הכל 11 מספרים. במקרה זה טור ב׳ גדול יותר.
מכיוון שהראנו שטור א׳ יכול להיות גדול מטור ב׳, וטור ב׳ יכול להיות גדול מטור א׳, הרי שלא ניתן לקבוע את יחס הגדלים בין שני הטורים.

<u>**הערה**</u>: למעשה, אין צורך לספור כלל את המספרים שהשורש שלהם הוא מספר שלם בטווח שבין 5 ל - 101 כיוון שהוא משותף לשני הטורים, ולספור רק את המספרים הנמצאים בטווח הייחודי לכל טור.

25. התשובה הנכונה היא: (1).



עלינו להשוות בין הקטע AB לפעמיים הקטע BC.
AB ו- BC הם חלקים מהאלכסון המאונך לצלעות במתומן המשוכלל.
נוסיף אלכסון נוסף המאונך לצלעות, ויווצר מלבן שמשני צדדיו משולשים ישרי-זווית.
זווית המתומן שווה ל - 135°, והיא נחלקת לזווית בת 90° בתוך המלבן DBFE (ראה סרטוט), ולזווית בת 45° בתוך המשולשים (למשל זווית BCE וזווית DFA).
אם כן, המשולשים BCE ו- ADF הם משולשים ישרי-זווית ושווי-שוקיים שבהם היתר גדול פי $\sqrt{2}$ מהניצב.
נסמן לשם הנוחות את אורך צלע המתומן כ- $a\cdot\sqrt{2}$.
<u>טור א׳</u>: AB מורכב מהקטע AD, השווה ל- a (ניצב במשולש ישר-הזווית ושווה-השוקיים), ומהקטע DB השווה ל- $a\cdot\sqrt{2}$ (צלע במלבן DBEF בו הצלע הנגדית, FE, היא צלע במתומן).
<u>טור ב׳</u>: BC שווה ל- a (ניצב במשולש ישר-הזווית ושווה-השוקיים)
ולכן $2\cdot BC$ שווה ל- 2a.

$2+a\cdot\sqrt{2}$? $2a$ נחסר a משני הצדדים, ונקבל:
$a\cdot\sqrt{2}$? a נחלק את שני הצדדים ב- a, ונקבל:
$\sqrt{2}$? 1

$\sqrt{2}$ גדול יותר מ- 1, ולכן טור א׳ גדול יותר.